Popper
Logica della scoperta scientifica

Il carattere autocorrettivo della scienza

Einaudi Paperbacks 14

«Di tanto in tanto sorge un movimento filosofico... che smaschera definitivamente i vecchi problemi filosofici mostrando che sono pseudoproblemi, e contrappone il malvagio non-senso della filosofia al senso buono della scienza significante, positiva, empirica. E di tanto in tanto i disprezzati sostenitori della "filosofia tradizionale" tentano di spiegare ai condottieri dell'ultimo assalto positivistico che il problema principale della filosofia è l'analisi critica dell'appello all'autorità dell'"esperienza", e precisamente di quell'esperienza che tutti i piú recenti scopritori del positivismo prendono ingenuamente come definitiva».
Ai filosofi «che hanno fatto una virtú del parlar con se stessi», ai «deprimenti monologhi che oggi passano per filosofia», ai rituali magici dei tecnicismi logici che caratterizzano «quest'età postrazionalistica», Popper oppone il concetto di una scienza come «cosmologia», che tenta di comprendere il mondo e di penetrare strati sempre piú ampi e profondi di realtà, e di una filosofia come metodo critico che tenta di comprendere «noi stessi e la conoscenza, in quanto parte del mondo». Ma la scienza a cui fa appello Popper non è «un sistema di asserzioni certe o stabilite una volta per tutte», ma un insieme di tentativi di indovinare, «di ipotesi azzardate, di anticipazioni affrettate e premature, di pregiudizi», che l'uomo tenta di cogliere in fallo cercando di farli collidere con la realtà, mediante l'osservazione e l'esperimento. E la scienza si differenzia dalla metafisica – che pretende di fornirci un quadro coerente e definitivo del mondo – perché le sue asserzioni sono in linea di principio falsificabili; perché *tende* a falsificarle con tutte le armi del suo arsenale «logico, matematico e tecnico»; perché, infine, proprio nella misura in cui si propone, e realizza, questi obbiettivi, le sue asserzioni si arricchiscono di un «contenuto empirico» che le proposizioni della metafisica, sottratte per principio ad ogni falsificazione, non riescono a comunicare.
Scritto verso la fine degli anni venti, e pubblicato solo nel 1934, questo libro costituisce una delle critiche piú penetranti e rigorose alle idee degli appartenenti al Circolo di Vienna; ma la sua importanza non si arresta al giro di problemi dibattuti dal «primo» neopositivismo. La nozione del carattere autocorrettivo del sapere scientifico fatta valere in modo estremamente acuto e coerente è oggi patrimonio comune dell'analisi metodologica della scienza.

Sir Karl Popper, nato a Vienna nel 1902, dopo l'occupazione nazista dell'Austria si è trasferito a Londra, nella cui università è professore di logica dal 1945. Dopo la polemica con il Circolo di Vienna, in *What is Dialectic* (1940), *The Poverty of Historicism* (1944, trad. it. *Miseria dello storicismo*, Milano 1954) e *The Open Society and its Enemies* (1944-45), Popper ha rivolto l'attenzione alla metodologia delle scienze socialiste storiche, con obiettivi polemici e ideologici. I suoi saggi sugli scopi e sulle responsabilità della scienza (1956-67) sono raccolti nel volume *Scienza e filosofia* («Nuovo Politecnico» Einaudi, 1969).

Indice

VII. Semplicità

VIII. Probabilità

A MIA MOGLIE

a cui devo la rinascita di questo libro

Prefazione all'edizione italiana, 1970

La teoria della conoscenza, e, in generale, la filosofia, ha bisogno di un'*apologia pro vita sua*, di una difesa ragionata della propria esistenza. Infatti, quello che molti filosofi hanno detto e fatto nel corso di questo secolo rappresenta un grave atto d'accusa. Un aspetto di quest'accusa fu presentato da Julien Benda nel suo libro *La trahison des clercs*: in tempi piú recenti al tradimento dei razionalisti si è sostituito il tradimento degli irrazionalisti.

Credo che ci sia *un solo* argomento a difesa dell'esistenza della filosofia. È questo: lo sappiano o no, tutti gli uomini hanno una filosofia. Certo, può ben darsi che nessuna delle nostre filosofie valga gran che, ma la loro influenza sui nostri pensieri e sulle nostre azioni è grande, e spesso incalcolabile. Ecco perché c'è bisogno di un *esame critico* di tutte queste filosofie: l'esame critico delle filosofie è il compito centrale della filosofia in quanto disciplina, è la sua *raison d'être*. Si tratta di un compito piú modesto della maggior parte di quelli che sono stati proposti alla filosofia, ma è un compito che, se impariamo a parlare e a scrivere con chiarezza, può essere portato a termine. Il culto dell'oscuro, oggi alla moda, il nebuloso e l'apparentemente profondo devono essere abbandonati: in loro luogo dobbiamo adottare di nuovo un atteggiamento razionale, cioè un atteggiamento critico. E dobbiamo smetterla di preoccuparci delle parole e dei loro significati, per preoccuparci invece delle teorie criticabili, dei ragionamenti e della loro validità.

Proprio come tutti hanno la loro filosofia, cosí tutti hanno la loro teoria della conoscenza. Di solito si tratta di una teoria sostenuta inconsapevolmente, e perciò acriticamente, ma si tratta di una teoria che spesso determina il resto della nostra filosofia. Le questioni: «Che cosa posso conoscere?»

(Kant) e «Posso conoscere?» e, ancora, «Posso conoscere qualcosa con certezza?» sembrano fondamentali.

In questo libro tentai, trentasei anni fa, di dare una risposta a queste questioni. La mia era una risposta modesta. Guardavo alla conoscenza umana come a qualcosa che consiste delle nostre teorie, delle nostre ipotesi, delle nostre congetture, come al *prodotto* delle nostre attività intellettuali. C'è naturalmente un altro modo di guardare alla «conoscenza»: possiamo considerarla come uno «stato mentale» soggettivo, come lo stato soggettivo di un organismo. Ma io scelsi di trattarla come un sistema di asserzioni, di teorie sottoposte alla discussione. Intesa in questo senso, la «conoscenza» è *oggettiva*, ed è ipotetica e congetturale.

Questo modo di considerare la conoscenza mi rese possibile riformulare il *problema dell'induzione* di Hume. In questa riformulazione oggettivistica il problema dell'induzione non è piú un problema che riguardi le nostre credenze – la loro razionalità – ma un problema che verte sulle relazioni logiche fra asserzioni singolari (descrizioni di fatti singoli «osservabili») e teorie universali.

In questa forma, il problema dell'induzione diventa risolubile: non c'è induzione, perché le teorie universali non sono mai deducibili da asserzioni singolari. Ma le teorie possono essere confutate da asserzioni singolari, da descrizioni di fatti osservabili.

Questa risoluzione del problema dell'induzione dà origine a una nuova teoria del metodo della scienza, a un'analisi del *metodo critico*, del metodo cioè che procede per tentativi ed eliminazione degli errori: del metodo che consiste nel proporre ipotesi ardite e nell'esporle alle critiche piú severe al fine di scoprire dove si sia sbagliato.

Dal punto di vista di questa metodologia, noi cominciamo la nostra ricerca con *problemi*. Noi ci troviamo sempre adagiati in un certo orizzonte di problemi e scegliamo un problema che speriamo di essere capaci di risolvere. La soluzione, sempre avanzata per tentativi, consiste di una teoria, di un'ipotesi, di una congettura. Le varie teorie rivali vengono confrontate e discusse criticamente allo scopo di portarne alla luce gli errori; e i risultati sempre mutevoli e mai definitivi della discussione critica costituiscono quello che chiamiamo «la scienza del tempo».

Dunque, non c'è induzione: il nostro ragionamento non procede mai da fatti a teorie, se non per confutazioni o «falsificazioni». Questa concezione della scienza può essere descritta come una concezione selettiva, darwiniana. Per contro, le teorie del metodo che asseriscono che procediamo per induzione, o mettono l'accento sulla *verificazione* (piuttosto che sulla *falsificazione*) sono tipicamente lamarckiane: mettono l'accento sull'*istruzione* ricevuta dall'ambiente, piuttosto che sulla *selezione* operata dall'ambiente.

Mi sarà forse permesso di menzionare (anche se non si tratta di una tesi del presente libro) che la soluzione del problema dell'induzione da me proposta mostra anche la strada che conduce a una soluzione del problema piú antico: del problema della razionalità delle nostre credenze. Possiamo infatti, in primo luogo, sostituire all'idea di credenza quella di azione, e possiamo dire che le azioni (o l'inazione) sono «razionali» se vengono compiute d'accordo con lo stato, prevalente in un determinato tempo, della discussione scientifica critica. «Critico» è il miglior sinonimo di «razionale». (Naturalmente, la credenza non è mai razionale: razionale è il *sospendere* la credenza).

La mia risoluzione del problema dell'induzione è stata largamente fraintesa. Non conosco una sola critica valida della mia risoluzione. Tuttavia l'idea di falsificazione e molte altre idee presentate per la prima volta in questo libro sono diventate parte e patrimonio della filosofia di oggi.

A che cosa equivale, in termini umani, tutto questo? Suggerisce che l'uomo e la conoscenza umana sono fallibili: che le teorie sono opere d'arte, però criticabili oggettivamente e che questo fatto rende possibile progredire, progredire in senso oggettivo; che tutti diamo il nostro contributo all'edificio della conoscenza oggettiva, come artigiani che costruiscono una cattedrale; e che tutto questo fa parte della grande avventura della vita.

KARL R. POPPER

Penn, Buckinghamshire, marzo 1970.

Prefazione alla prima edizione, 1934

> Il sapere che, dopo tutto, l'uomo ha risolto i suoi problemi piú ostinati... è di poco conforto a chi conosce la filosofia; infatti, non può fare a meno di temere che la filosofia non arriverà mai al punto di porre un problema genuino.
>
> M. SCHLICK (1930)

> Io, per parte mia, sostengo l'opinione esattamente opposta, ed affermo che ogni volta che una disputa è infuriata per un qualche tempo, specialmente in filosofia, il problema che stava alla sua base non era mai un problema di pure e semplici parole, ma un autentico problema intorno a cose.
>
> I. KANT (1786)

Uno scienziato impegnato in una ricerca particolare, ad esempio in fisica, può affrontare direttamente il proprio problema. Può andare diritto al cuore della materia: al cuore, cioè, di una struttura organizzata. Infatti una struttura delle dottrine scientifiche esiste già, e con essa un orizzonte di problemi generalmente accettato. Per questa ragione lo scienziato può lasciare ad altri il compito di sistemare il proprio contributo nell'ossatura generale della conoscenza scientifica.

Il filosofo si trova in una posizione diversa. Non affronta una struttura organizzata, ma piuttosto qualcosa che ha l'aspetto di un cumulo di macerie (sotto le quali, del resto, è forse sepolto qualche tesoro). Non può fare appello al fatto che esiste un orizzonte di problemi generalmente accettato, perché forse l'unico fatto generalmente accettato è che non esiste nulla del genere. In realtà, una delle questioni che oggi ricorrono piú sovente nei circoli filosofici è se la filosofia arriverà mai a porre un problema autentico.

Nondimeno, c'è ancora qualcuno che crede che la filosofia possa porre problemi autentici intorno alle cose, e perciò spera di riuscire a discutere questi problemi facendola finita con quei deprimenti monologhi che oggi passano per discussioni filosofiche. E se per caso trova di non poter accettare nessuna delle credenze oggi in voga, non può far altro che ricominciare tutto dal principio.

Vienna, autunno 1934.

Nota dell'autore alla traduzione inglese, 1959

The Logic of Scientific Discovery è una traduzione della *Logik der Forschung*, pubblicata a Vienna nell'autunno del 1934 (con la data di stampa 1935). La traduzione fu preparata dall'autore con l'aiuto di Julius e Lan Freed.

Il testo originale del 1934 è rimasto immutato ai fini della traduzione. Come al solito, la traduzione è un poco piú lunga dell'originale. Le parole e le frasi per le quali non esiste un equivalente dovettero essere parafrasate. Alcuni periodi dovettero essere spezzati e risistemati, e ciò fu tanto piú necessario in quanto il testo da tradurre era estremamente condensato: lo si dovette piú volte tagliare drasticamente per ottemperare alle richieste dell'editore. Tuttavia l'autore decise di non fare aggiunte al testo; e anche di non reintegrare i passi tagliati (tranne alcune parole indicate in parentesi quadra nelle note a piè di pagina).

Per aggiornare il libro l'autore ha aggiunto nuove appendici e nuove note. Di queste, alcune non fanno che ampliare il testo o correggerlo; ma altre spiegano dove l'autore ha cambiato idea, o in che modo ora ristrutturerebbe le sue argomentazioni.

Tutte le nuove aggiunte – nuove appendici e nuove note – sono segnate da un numero con asterisco; e là dove la nota vecchia è stata ampliata, l'aggiunta è anch'essa segnata da un asterisco (a meno che non consista unicamente del riferimento all'edizione inglese di un libro citato, nell'originale, da un'edizione tedesca)[1].

[1] [Nella traduzione italiana si è tralasciato, dove non fosse necessario, il riferimento a eventuali traduzioni inglesi, mantenendo invece quello alle edizioni originali (*N. d. T.*)].

In queste nuove aggiunte segnate con asterisco, si troveranno riferimenti a una continuazione di questo volume, intitolata: *Postscript: After Twenty Years* (mai pubblicata sinora). Anche i capitoli e le parti di ques'ultimo libro sono preceduti da un numero con asterisco. (Poiché non vi sono appendici, tutti i rimandi ad appendici, con o senza asterisco, si riferiscono al presente volume). I due volumi trattano i medesimi problemi, e, sebbene si integrino a vicenda, sono indipendenti.

Si deve inoltre notare che la numerazione dei capitoli del presente volume è stata cambiata: nell'originale erano numerati da uno a due (parte I) e da uno a otto (parte II). Adesso sono numerati da uno a dieci.

Prefazione alla prima edizione inglese, 1959

> Nulla è piú necessario all'uomo di scienza della storia della scienza, e della logica della ricerca... Il modo in cui si scopre l'errore, l'uso dell'ipotesi, dell'immaginazione, il modo dei controlli.
>
> LORD ACTON

Nella mia vecchia prefazione del 1934 tentai di spiegare – temo troppo concisamente – il mio atteggiamento nei confronti della situazione allora predominante in filosofia, e specialmente nei confronti della filosofia del linguaggio e della scuola degli analisti del linguaggio di quei giorni. In questa nuova prefazione intendo spiegare il mio atteggiamento nei confronti della situazione attuale, e delle due principali scuole odierne degli analisti del linguaggio. Oggi come allora gli analisti del linguaggio sono importanti per me e non soltanto come oppositori, ma anche come alleati, perché sembrano i soli filosofi rimasti a tener vive alcune tradizioni della filosofia razionale.

Gli analisti del linguaggio credono che non ci siano problemi filosofici genuini, o che i problemi della filosofia – ammesso che ce ne siano – siano problemi concernenti l'uso linguistico, o il significato delle parole. Invece io sono convinto che esista almeno un problema al quale sono interessati tutti gli uomini dediti al pensiero. È il problema della cosmologia: *il problema di comprendere il mondo, compresi noi stessi e la nostra conoscenza, in quanto parte del mondo.* Sono convinto che tutta la scienza sia cosmologia, e per me l'interesse cosí della filosofia come della scienza risiede unicamente nei contributi che queste due discipline hanno portato a questo problema. In ogni caso scienza e filosofia cesserebbero di esercitare su di me qualsiasi attrazione se dovessero rinunciare a proporselo. Non c'è dubbio che il comprendere le funzioni del linguaggio sia una parte importante di questo compito; ma non lo è il liquidare i nostri problemi come semplici «enigmi» linguistici.

Gli analisti del linguaggio si considerano i depositari di un metodo peculiare alla filosofia. Io credo che abbiano torto, perché sono convinto della giustezza della tesi che sto per esporre.

Come chiunque altro, i filosofi sono liberi di usare qualsiasi metodo per la ricerca della verità. *Non esiste un metodo peculiare alla filosofia.*

Una seconda tesi, che vorrei proporre in questo libro, è la seguente.

Il problema centrale dell'epistemologia è sempre stato, e ancora è, il problema dell'accrescersi della conoscenza. *E l'accrescersi della conoscenza può essere studiato, meglio che in qualsiasi altro modo, studiando l'accrescersi della conoscenza scientifica.*

Non credo che allo studio dell'accrescersi della conoscenza si possa sostituire lo studio degli usi linguistici, o dei sistemi linguistici.

E tuttavia sono prontissimo ad ammettere che esiste un metodo che potrebbe essere descritto come l'«unico metodo della filosofia». Ma esso non è caratteristico della sola filosofia; piuttosto è l'unico metodo di ogni *discussione razionale*, e perciò tanto delle scienze della natura quanto della filosofia. Il metodo a cui penso è quello che consiste nel formulare il proprio problema chiaramente e nell'esaminare *criticamente* le varie soluzioni che vengono proposte.

Ho scritto in corsivo le parole «*discussione razionale*» e «*criticamente*» allo scopo di mettere l'accento sul fatto che considero identici atteggiamento razionale e atteggiamento critico. Il punto è che ogni qual volta tentiamo di proporre la soluzione di un problema dovremmo tentare col massimo accanimento possibile di scalzare la nostra soluzione, anziché tentare di difenderla. Sfortunatamente pochi di noi mettono in pratica questo precetto; ma, fortunatamente, se mancheremo di farlo noi, altri suppliranno con le loro critiche. Tuttavia le critiche saranno fruttuose soltanto se formuleremo il nostro problema nel modo piú chiaro possibile, mettendo la nostra soluzione in una forma sufficientemente definita; in una forma, cioè, che possa essere discussa criticamente.

Non nego che una certa cosa che possiamo chiamare «analisi logica» possa aver parte in questo processo di chiarificazione e di attento esame dei nostri problemi e delle soluzioni che proponiamo, e non asserisco che i metodi dell'«analisi logica» o dell'«analisi del linguaggio» siano necessariamente inutili. La mia tesi è, piuttosto, che questi metodi sono ben lontani dall'essere gli unici che un filosofo possa usare vantaggiosamente, e che non sono per nulla caratteristici della filosofia. Non sono piú caratteristici della filosofia di quanto non lo siano di ogni altra ricerca razionale o scientifica.

Si può forse chiedere quali altri «metodi» un filosofo possa usare. Rispondo che, sebbene ci sia un certo numero di «metodi» differenti, non ho alcun interesse reale ad enumerarli. Non m'importa quali metodi un filosofo (o chiunque altro) possa usare, purché abbia un problema interessante e tenti sinceramente di risolverlo.

Tra i molti metodi che possiamo usare – e che, naturalmente, dipendono sempre dal problema che abbiamo per le mani – uno mi sembra degno di essere menzionato. Si tratta di una variante del metodo storico, oggi fuori moda. Esso consiste, semplicemente, nel tentare di scoprire che cosa gli altri abbiano pensato e detto a proposito del problema che si ha fra le mani; perché abbiano dovuto affrontarlo; in qual modo l'abbiano formulato; in qual modo abbiano tentato di risolverlo. Questo metodo mi sembra importante perché fa parte del metodo generale della discussione razionale. Se ignoriamo che cosa pensino gli altri, o che cosa abbiano pensato in passato, la discussione razionale arriva necessariamente a un punto morto, anche se poi ciascuno di noi può continuare a parlare allegramente con se stesso. Alcuni filosofi hanno fatto una virtú del parlar con se stessi, forse perché si erano convinti che non ci fosse nessuno con cui parlare. Ho paura che l'abitudine di filosofare su questo livello un po' troppo elevato sia un sintomo del declino della discussione razionale. Non c'è dubbio che Iddio parli quasi esclusivamente con se stesso, perché non trova nessuno con cui valga la pena di parlare. Ma i filosofi dovrebbero sapere che non sono piú simili a Dio di quanto non lo siano gli altri uomini.

Alla base della diffusa credenza secondo cui ciò che viene chiamato «analisi linguistica» è il vero metodo della filosofia stanno alcune interessanti ragioni storiche.

Una di queste ragioni è la credenza, corretta, che la soluzione dei *paradossi logici*, come quello del mentitore («io mento, ora») o quelli scoperti da Russell, Richard e altri, richieda l'analisi linguistica con la sua famosa distinzione tra espressioni linguistiche significanti (o «ben formate») ed espressioni linguistiche insignificanti. Questa credenza, corretta, è commista alla credenza, errata, che i problemi filosofici sorgano dal tentativo di risolvere *paradossi filosofici* la cui struttura è analoga a quella dei *paradossi logici*, cosicché la distinzione tra discorso significante e discorso insignificante debba essere di importanza capitale anche per la filosofia. Che questa credenza sia errata si può far vedere con estrema facilità, e si può far vedere proprio per mezzo dell'analisi linguistica. Quest'ultima, infatti, rivela che un certo tipo di riflessività, o auto-referenza presente in tutti i paradossi logici, è assente da tutti i paradossi filosofici, perfino dalle antinomie di Kant.

La principale ragione per esaltare il metodo dell'analisi linguistica sembra comunque essere stata la seguente. Ci si rese conto che alla cosiddetta «*nuova via delle idee*» di Locke, Berkeley e Hume, cioè al metodo psicologico o, meglio, pseudo-psicologico, consistente nell'analizzare le nostre idee e la loro origine nella sensazione, si doveva sostituire un metodo piú obbiettivo e meno genetico. Che invece di analizzare le «idee» o le «concezioni», o le «nozioni» si dovevano analizzare le parole e i loro usi; che si dovevano analizzare proposizioni o asserzioni o enunciati, anziché «pensieri» o «credenze» o «giudizi». Sono pronto ad ammettere che questa sostituzione alla «nuova via delle idee» inaugurata da Locke di una «nuova via delle parole» abbia rappresentato un progresso di cui si sentiva urgente bisogno.

È comprensibile come coloro che un tempo vedevano nella «nuova via delle idee» l'unico vero metodo della filosofia, possano essersi in tal modo convertiti alla credenza che «la nuova via delle parole» sia l'unico vero metodo della filosofia. Io dissento recisamente da questa stimolante credenza. Voglio però fare, al proposito, due soli commenti critici. In primo luogo la «nuova via delle idee» non si sarebbe mai dovuta considerare come il principale metodo della filosofia: figuriamoci poi come l'unico vero metodo. Perfino Locke la introdusse unicamente come un metodo per trattare certi preliminari (preliminari di una scienza dell'etica), mentre Berkeley e Hume la impiegarono principalmente come un'arma per sconfiggere i loro oppositori. L'interpretazione del mondo – del mondo delle cose e degli uomini – che gli premeva di comunicarci non fu mai basata su questo metodo. Berkeley non fondò su di essa le sue opinioni religiose, né Hume le sue teorie politiche, anche se vi basò il suo determinismo.

Ma la mia obiezione piú grave alla credenza che la «nuova via delle idee» o la «nuova via delle parole» siano il metodo principale dell'epistemologia – o forse addirittura della filosofia – è la seguente.

Il problema dell'epistemologia può essere aggredito da due lati: 1) come il problema della conoscenza ordinaria, o *conoscenza del senso comune*; 2) come il problema della *conoscenza scientifica*. I filosofi che sono favorevoli al primo approccio pensano, giustamente, che la conoscenza scientifica non può essere altro che un'estensione della conoscenza del senso comune; e pensano anche, a torto, che delle due la conoscenza del senso comune sia la piú facile da analizzare. In tal modo questi filosofi arrivano a sostituire alla «nuova via delle idee» un'analisi del *linguaggio ordinario*, cioè del linguaggio in cui è formulata la conoscenza del senso comune. All'analisi della visione, o della percezione, o della conoscenza, o della credenza sostituiscono l'analisi delle frasi «io vedo», «io percepisco», o «io so», «io credo», «io ritengo probabile»; o forse quella della parola «forse».

Ora, ai sostenitori di questo approccio alla teoria della conoscenza devo replicare quello che segue. Pur essendo d'accordo con loro nel sostenere che la conoscenza scientifica non è altro che uno sviluppo della conoscenza ordinaria, o conoscenza del senso comune, io sostengo che i problemi piú importanti e piú stimolanti dell'epistemologia non possono non rimanere completamente invisibili a coloro che si limitano all'analisi della conoscenza ordinaria, o del senso comune, o alla sua formulazione in linguaggio ordinario.

Desidero far riferimento, qui, a un solo esempio del genere di problema che ho in mente: il problema dell'accrescersi della nostra conoscenza. Basta rifletterci un po' per vedere che la maggior parte dei problemi connessi con l'accrescersi della nostra conoscenza devono necessariamente trascendere qualsiasi studio che si limiti alla conoscenza del senso comune, in quanto contrapposta alla conoscenza scientifica. Infatti il modo piú importante in cui la conoscenza del senso comune cresce è proprio la sua trasformazione in conoscenza scientifica. Per di piú, sembra chiaro che l'accrescersi della conoscenza scientifica costituisce il caso piú importante e interessante di accrescimento della conoscenza.

Si dovrebbe ricordare, in questo contesto, che quasi tutti i problemi dell'epistemologia tradizionale sono connessi con il problema dell'accrescersi della conoscenza. E sono propenso a dire ancor di piú: da Platone a Descartes, Leibniz, Kant, Duhem e Poincaré, e da Bacone, Hobbes e Locke a Hume, Mill e Russell, la teoria della conoscenza fu ispirata dalla speranza che non soltanto ci avrebbe messo in grado di sapere qualcosa di piú intorno alla conoscenza, ma avrebbe anche contribuito al progresso della conoscenza, e precisamente della conoscenza scientifica. (Tra i grandi filosofi, la sola eccezione possibile a questa regola, a cui io riesca a pensare, è rappresentata da Berkeley). La maggior parte dei filosofi che credono che il metodo caratteristico della filosofia sia l'analisi del linguaggio ordinario sembrano aver perduto quell'ammirevole ottimismo che un tempo caratterizzava la tradizione razionalistica. Il loro atteggiamento sembra essere diventato un atteggiamento di rassegnazione, per non dire di disperazione. Non soltanto abbandonano il progresso della scienza agli scienziati, ma addirittura definiscono la filosofia in modo tale da renderla per definizione incapace di portare qualsiasi contributo alla nostra conoscenza del mondo. L'auto-mutilazione che esige questa definizione, cosí sorprendentemente persuasiva, non esercita su di me nessuna attrazione. Non esiste nulla che possa essere individuato come l'essenza della filosofia e che, come tale, possa essere distillato e condensato in una definizione. Una definizione della parola «filosofia» può solo avere il carattere di una convenzione, di un accordo, e, in ogni modo, io non riesco a scorgere alcun merito nella proposta arbitraria di definire la parola «filosofia» in modo da impedire agli studiosi di filosofia di tentar di recare, in quanto filosofi, il loro contributo al progresso della nostra conoscenza del mondo.

Mi sembra anche paradossale che i filosofi, i quali acquistano ragioni d'orgoglio dalla loro specializzazione nello studio del linguaggio ordinario, credano tuttavia di saperne abbastanza di cosmologia da essere sicuri che essa è, per essenza, cosí differente dalla filosofia che quest'ultima non può darle alcun contributo. E in realtà si sbagliano. Perché è un fatto che le idee puramente metafisiche – e dunque le idee filosofiche – hanno avuto una grandissima importanza per la cosmologia. Da Talete ad Einstein, dall'atomismo antico alle speculazioni di Descartes sulla materia, dalle speculazioni di Gilbert, Newton, Leibniz e Boscovic sulle forze, a quelle di Faraday ed Einstein sui campi di forze, sono state le idee metafisiche a indicare la strada.

Tali sono, in breve, le mie ragioni per credere che, anche nell'ambito dell'epistemologia, il primo approccio sopra menzionato – quello, cioè, dell'analisi della conoscenza per mezzo dell'analisi del linguaggio ordinario – è troppo ristretto, ed è destinato a lasciarsi sfuggire i problemi di maggior interesse.

Sono tuttavia ben lontano dal concordare con tutti quei filosofi che sono favorevoli all'altra via d'accesso all'epistemologia: la via d'accesso che passa per l'analisi della conoscenza scientifica. Allo scopo di spiegare piú facilmente quali siano i punti su cui sono d'accordo e quali invece quelli su cui non sono d'accordo, suddividerò i filosofi che adottano questa seconda via d'accesso in due gruppi: come dire i caproni e le pecore.

Il primo gruppo consiste di coloro che si propongono di studiare «il linguaggio della scienza» e scelgono come metodo filosofico la costruzione di linguaggi-modello artificiali: cioè a dire, la costruzione di quelli che ritengono i modelli del «linguaggio della scienza».

Il secondo gruppo non si limita allo studio del linguaggio della scienza, o di qualsiasi altro linguaggio, e non ha scelto nessun metodo filosofico in particolare. I suoi membri filosofano in molti modi differenti, perché molti e differenti sono i problemi che vogliono risolvere; e qualsiasi metodo è per loro il benvenuto, se credono che li aiuterà a vedere piú chiaramente i loro problemi, o ad imbattersi in una soluzione, per quanto provvisoria.

Mi occuperò in primo luogo di quelli che hanno scelto il metodo della costruzione di modelli artificiali del linguaggio della scienza. Storicamente anch'essi partono dalla «nuova via delle idee». Anch'essi sostituiscono l'analisi linguistica al metodo (pseudo-) psicologico della vecchia «nuova via». Ma, forse per via delle consolazioni spirituali offerte dalla speranza in una conoscenza «esatta» o «precisa» o «formalizzata», scelgono come oggetto della loro analisi «il linguaggio della *scienza*» piuttosto che il linguaggio ordinario. Sfortunatamente, però, sembra che non esista nulla che si possa chiamare «il linguaggio della scienza» e quindi diventa necessario costruirne uno. Tuttavia la costruzione di un modello di linguaggio scientifico che operi in scala normale – un linguaggio nel quale possiamo esprimere una scienza vera e propria, come la fisica – si rivela, in pratica, piuttosto difficile. Per questa ragione troviamo i nostri filosofi impegnati a costruire intricati modelli in miniatura, vasti sistemi di minuscoli meccanismi.

Secondo me questo gruppo di filosofi prende il peggio da entrambi i mondi. Con il loro metodo di costruire modelli di linguaggi in miniatura, si lasciano sfuggire i problemi piú stimolanti della teoria della conoscenza – quelli connessi con il suo progresso. Infatti la complicazione dell'apparato non ha alcuna relazione con la sua efficacia, e praticamente nessuna teoria scientifica di qualche interesse può essere espressa in questo vasto sistema di minuzie. Questi modelli linguistici non hanno nessun significato né per la scienza né per il senso comune.

Anzi, i modelli di «linguaggio della scienza» che questi filosofi costruiscono, non hanno nulla da spartire col linguaggio della scienza moderna. Ciò si può vedere dalle seguenti osservazioni, relative ai tre modelli linguistici maggiormente noti. (Ci riferiamo ad essi nelle note 13 e 15 all'appendice *VII, e nella nota *2 al § 38). Il primo di questi modelli linguistici è addirittura privo dei mezzi per esprimere l'identità. Di conseguenza non può esprimere un'eguaglianza e non contiene neppure l'aritmetica piú primitiva. Il secondo modello linguistico funziona soltanto finché non gli aggiungiamo i mezzi per provare i teoremi dell'aritmetica ordinaria; per esempio, il teorema di Euclide che non esiste un massimo numero primo, o, addirittura, il principio secondo cui ogni numero ha un successore. Neppure nel terzo modello linguistico – il piú elaborato e il piú famoso di tutti – si può formulare la matematica; e, cosa ancora piú interessante, non esistono proprietà misurabili che possano essere espresse in questo linguaggio. Per queste, e per molte altre ragioni, i tre modelli linguistici sono troppo poveri per essere di qualche utilità per la scienza. Naturalmente sono piú poveri dei linguaggi ordinari, compresi anche i piú primitivi.

Le limitazioni menzionate furono imposte ai modelli linguistici semplicemente perché, altrimenti, le soluzioni che gli autori offrivano per i loro problemi non avrebbero funzionato. Questo fatto si può provare facilmente, ed è stato provato, in parte, dagli stessi autori. Nondimeno, tutti sembrano pretendere due cose: *a*) che in un senso o nell'altro i loro metodi siano capaci di risolvere i problemi della teoria della conoscenza scientifica, o, in altre parole, siano applicabili alla scienza (mentre, in realtà, sono applicabili con una certa precisione soltanto a discorsi di tipo estremamente primitivo); *b*) che i loro metodi siano «esatti» o «precisi». È chiaro che queste due pretese non possono essere sostenute entrambe.

Cosí il metodo consistente nel costruire modelli linguistici artificiali non è in grado di liquidare i problemi concernenti il crescere della nostra conoscenza; e ne è capace ancor meno di quanto non lo sia il metodo consistente nell'analizzare i linguaggi ordinari, semplicemente perché questi modelli linguistici sono piú poveri dei linguaggi ordinari. Come risultato della loro povertà ci presentano soltanto il modello piú rozzo e ingannevole di accrescersi della conoscenza: il modello dell'ammucchiarsi disordinato di asserzioni d'osservazione.

Mi occupo ora dell'ultimo gruppo di epistemologi: quelli che non si legano in anticipo a nessun metodo filosofico e fanno uso, in epistemologia, dell'analisi di problemi scientifici, di teorie, di procedimenti e, cosa piú importante, di discussioni scientifiche. Questo gruppo può vantare tra i suoi predecessori quasi tutti i grandi filosofi dell'Occidente. (Può anche vantare la propria discendenza da Berkeley, a dispetto del fatto che Berkeley fu, in un senso importante del termine, un nemico della stessa idea di conoscenza scientifica razionale, e ne paventò il progresso). I suoi maggiori rappresentanti negli ultimi due secoli furono Kant, Whewell, Mill, Peirce, Duhem, Poincaré, Meyerson, Russell e – almeno in alcune fasi del suo pensiero – Whitehead. Quasi tutti gli appartenenti a questo gruppo si troverebbero d'accordo nel sostenere che la conoscenza scientifica è il risultato dello sviluppo della conoscenza del senso comune; ma tutti scoprirebbero che la conoscenza scientifica si può studiare piú facilmente che non la conoscenza del senso comune. Essa infatti è la *conoscenza del senso comune scritta, per cosí dire, in tutte lettere.* I suoi stessi problemi sono un ampliamento dei problemi della conoscenza del senso comune. Per esempio, sostituisce al problema humeano della «credenza ragionevole» il problema delle ragioni per accettare o respingere le teorie scientifiche. E poiché possediamo molti resoconti dettagliati delle discussioni sul problema se una teoria come quella di Newton, o di Maxwell, o di Einstein debba essere accettata o respinta, possiamo guardare a queste discussioni come attraverso un microscopio che ci permette di studiare nei loro dettagli, e oggettivamente, alcuni dei problemi piú importanti della «credenza ragionevole».

Questo modo di accostarsi ai problemi dell'epistemologia si sbarazza (come i due menzionati sopra) del metodo pseudo-psicologico, o «soggettivo» della nuova via delle idee (metodo, questo, ancora usato da Kant), proponendoci di analizzare discussioni scientifiche e anche orizzonti di problemi scientifici. E cosí può aiutarci a comprendere la storia del pensiero scientifico.

Ho tentato di mostrare che i piú importanti problemi tradizionali dell'epistemologia – quelli connessi con il *crescere della conoscenza* – trascendono i due metodi standard dell'analisi linguistica ed esigono l'analisi della conoscenza scientifica. Ma sostenere ancora un altro dogma è l'ultima cosa che desidero fare. Anche l'analisi della scienza – la «filosofia della scienza» – sta minacciando di diventare una moda, una specializzazione. E tuttavia i filosofi non dovrebbero essere specialisti. Per parte mia, provo interesse per la scienza e la filosofia soltanto perché voglio imparare qualcosa sull'enigma del mondo in cui viviamo e sull'enigma della conoscenza che l'uomo ha di questo mondo. E credo che soltanto una rinascita dell'interesse per questi enigmi possa salvare le scienze e la filosofia dall'angusta specializzazione e dalla fede oscurantistica nella speciale abilità dell'esperto e nella sua conoscenza e autorità personale; fede, questa, che tanto bene si adatta alla nostra età «postrazionalista» e «postcritica», orgogliosamente impegnata nella distruzione della filosofia razionalistica e dello stesso pensiero razionale.

Penn, Buckinghamshire, primavera 1958.

Ringraziamenti 1960 e 1968

Desidero ringraziare David O. Nicholls per avermi fatto conoscere il mirabile passo, ora pubblicato a p. XXI, da lui scoperto tra i Manoscritti Acton nella Biblioteca dell'università di Cambridge (Add. MSS 5011:266). La ristampa del libro mi offre l'occasione di citare tale passo.

Estate 1959.

In questa seconda edizione inglese sono stati aggiunti quattro brevi Addenda alle appendici. Sono stati corretti piccoli errori e ho apportato alcune migliorie linguistiche. Sono stati corretti i refusi che mi erano stati fatti notare da Imre Lakatos, David Miller e Alan Musgrave. Queste persone mi hanno anche suggerito molte nuove voci da inserire nell'indice per argomenti e ne sono loro molto riconoscente.

Ma il mio debito piú grande è con Paul Bernays, che, poco dopo l'uscita del volume, ha controllato la mia assiomatizzazione del calcolo delle probabilità, in particolare la nuova appendice *v. La sua approvazione ha per me un valore piú grande di quanto non possa esprimere a parole. Ciò naturalmente non mi esime dall'essere il solo responsabile di qualsiasi errore io possa aver commesso.

Novembre 1967.

K. R. P.

Logica della scoperta scientifica

... le teorie sono reti: solo chi le butta pesca.

NOVALIS

Parte prima

Introduzione alla logica della scienza

Capitolo primo

Sguardo su alcuni problemi fondamentali

Uno scienziato, teorico o sperimentatore, produce asserzioni o sistemi di asserzioni, e li controlla passo per passo. Nel campo delle scienze empiriche, piú in particolare, costruisce ipotesi, o sistemi di teorie e li controlla, confrontandoli con l'esperienza mediante l'osservazione e l'esperimento.

Suggerisco che il compito della logica della scoperta scientifica, o logica della conoscenza, è quello di fornire un'analisi logica di questa procedura; cioè di analizzare il metodo delle scienze empiriche.

Ma che cosa sono i «metodi delle scienze empiriche»? E che cosa chiamiamo «scienza empirica»?

1. *Il problema dell'induzione.*

Secondo un punto di vista largamente accettato – a cui mi opporrò in quésto libro – le scienze empiriche possono essere caratterizzate dal fatto di usare i cosiddetti «*metodi induttivi*». Stando a questo punto di vista la logica della scoperta scientifica sarebbe identica alla logica induttiva, cioè all'analisi logica di questi metodi induttivi.

Si è soliti dire che un'inferenza è «induttiva» quando procede da *asserzioni singolari* (qualche volta chiamate anche asserzioni «particolari») quali i resoconti dei risultati di osservazioni o di esperimenti, ad *asserzioni universali*, quali ipotesi o teorie.

Ora, da un punto di vista logico, è tutt'altro che ovvio che si sia giustificati nell'inferire asserzioni universali da asserzioni singolari, per quanto numerose siano queste ultime;

infatti qualsiasi conclusione tratta in questo modo può sempre rivelarsi falsa: per quanto numerosi siano i casi di cigni bianchi che possiamo aver osservato, ciò non giustifica la conclusione che *tutti* i cigni sono bianchi.

La questione, se le inferenze induttive siano giustificate, o in quali condizioni lo siano, è nota come il *problema dell'induzione.*

Il problema dell'induzione può anche essere formulato come il problema del modo per stabilire la verità di asserzioni universali basate sull'esperienza, come le ipotesi e i sistemi di teorie delle scienze empiriche. Molti, infatti, credono che la verità di queste asserzioni universali sia «*nota per esperienza*»; tuttavia è chiaro, in primo luogo, che il resoconto di un'esperienza – di un'osservazione, o del risultato di un esperimento – può essere soltanto un'asserzione singolare e non un'asserzione universale. Di conseguenza, chi dice che conosciamo la verità di un'asserzione universale per mezzo dell'esperienza, intende di solito che la verità di quest'asserzione universale può essere ridotta in qualche modo alla verità di asserzioni singolari e che la verità di queste asserzioni singolari è nota per esperienza; ciò equivale a dire che l'asserzione universale è basata sull'inferenza induttiva. Dunque, chiedere se ci siano leggi naturali la cui verità è nota sembra soltanto un altro modo per chiedere se le inferenze induttive siano giustificate logicamente.

Tuttavia, se vogliamo trovare un modo per giustificare le inferenze induttive, dobbiamo prima di tutto tentare di stabilire un *principio di induzione.* Un principio d'induzione sarebbe un'asserzione con l'aiuto della quale fosse possibile mettere le inferenze induttive in una forma logicamente accettabile. Agli occhi dei sostenitori della logica induttiva il principio d'induzione riveste un'estrema importanza per il metodo scientifico: «... questo principio – dice Reichenbach – determina la verità delle teorie scientifiche. Eliminarlo dalla scienza significherebbe nientemeno che privare la scienza del potere di decidere la verità o la falsità delle sue teorie. È chiaro che senza di esso la scienza non avrebbe piú il diritto di distinguere le sue teorie dalle creazioni fantastiche e arbitrarie della mente del poeta»[1].

[1] H. REICHENBACH, in «Erkenntnis», I (1930), p. 186 (cfr. anche pp. 64 sg.). * Cfr. il penultimo capoverso del cap. XII, su Hume, di B. RUSSELL,

Ora, questo principio di induzione non può essere una verità puramente logica, come una tautologia o un'asserzione analitica. In realtà, se esistesse qualcosa come un principio d'induzione puramente logico non ci sarebbe alcun problema dell'induzione, perché in questo caso tutte le inferenze induttive dovrebbero essere considerate come trasformazioni puramente logiche o tautologiche, proprio come le inferenze della logica deduttiva. Dunque il principio d'induzione dev'essere un'asserzione sintetica, cioè un'asserzione la cui negazione non è autocontraddittoria ma logicamente possibile. Sorge cosí la questione: perché un tale principio debba essere senz'altro accettato, e come sia possibile giustificare la sua accettazione su basi razionali.

Alcuni di coloro che credono nella logica induttiva sono ansiosi di mettere in evidenza, con Reichenbach, che «il principio d'induzione è accettato senza riserve da tutta quanta la scienza, e che anche nella vita di ogni giorno nessuno può metterlo seriamente in dubbio» [2]. Tuttavia, anche supponendo che ciò fosse vero – perché, dopo tutto, «tutta quanta la scienza» potrebbe sbagliare – io sosterrei ancora che il principio d'induzione è superfluo, e che non può non condurre a contraddizioni logiche.

Già dall'opera di Hume [*1] si sarebbe dovuto vedere chiaramente che in relazione al principio d'induzione possono facilmente sorgere contraddizioni; e si sarebbe anche dovuto vedere che esse possono venire evitate, ammesso che lo possano, soltanto con difficoltà. Infatti il principio d'induzione dev'essere a sua volta un'asserzione universale. Dunque, se tentiamo di considerare la sua verità come nota per esperienza, risorgono esattamente gli stessi problemi che hanno dato occasione alla sua introduzione. Per giustificarlo, dovremmo impiegare inferenze induttive; e per giustificare queste ultime dovremmo assumere un principio induttivo di ordine superiore, e cosí via. In tal modo il tentativo di basare il principio d'induzione sull'esperienza fallisce, perché conduce necessariamente a un regresso infinito.

History of Western Philosophy [Storia della filosofia occidentale], 1946, p. 699.

[2] REICHENBACH, in «Erkenntnis» cit., p. 67.

[*1] I passi piú significativi di Hume sono citati nell'appendice *VII, testo relativo alle note 4, 5 e 6; cfr. anche § 81, nota 2.

Kant tentò di forzare la via d'uscita da questa difficoltà assumendo che il principio d'induzione (che egli formulò come «principio di causazione universale») fosse «valido a priori». Ma io non credo che il suo ingegnoso tentativo di fornire una giustificazione a priori dei giudizi sintetici abbia avuto successo.

Per conto mio, ritengo che le varie difficoltà della logica induttiva qui delineate siano insormontabili. Cosí pure, temo, sono insormontabili quelle inerenti alla dottrina, oggi tanto di moda, che l'inferenza induttiva, pur non essendo «rigorosamente valida», *possa raggiungere qualche grado di «credibilità» o di «probabilità»*. Secondo questa dottrina le inferenze induttive sono «inferenze probabili»[3]. «Abbiamo descritto – dice Reichenbach – il principio d'induzione come il mezzo grazie al quale la scienza decide sulla verità. Per essere piú esatti dovremmo dire che esso serve a decidere sulla probabilità. Infatti alla scienza non è dato di raggiungere la verità o la falsità... ma le asserzioni scientifiche possono soltanto raggiungere gradi continui di probabilità i cui limiti superiore e inferiore, peraltro irraggiungibili, sono la verità e la falsità»[4].

A questo punto posso anche non tener conto del fatto che coloro i quali credono nella logica induttiva hanno un'idea della probabilità che invece io respingerò piú tardi come altamente inadatta per i loro stessi scopi (si veda il § 80). Posso farlo perché le difficoltà che ho menzionato non vengono neppure sfiorate dall'appello alla probabilità. Infatti, se alle asserzioni basate sull'inferenza induttiva si deve assegnare un certo grado di probabilità, questo dovrà essere giustificato invocando un nuovo principio d'induzione opportunamente modificato, e questo principio dovrà essere esso stesso giustificato, e cosí via. Per di piú, se a sua volta si considera il principio d'induzione non come «vero», ma soltanto come «probabile», non si guadagna proprio nulla. In breve, come ogni altra forma di logica induttiva, la logica del-

[3] Cfr. J. M. KEYNES, *A Treatise on Probability* [Trattato di probabilità], 1921; O. KÜLPE, *Vorlesungen über Logik* [Lezioni di logica], a cura di Selz, 1923; REICHENBACH (che usa il termine «implicazioni probabilistiche»), *Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [Assiomatica del calcolo della probabilità], in «Mathematische Zeitschrift», 34 (1932); e in molti altri luoghi.

[4] REICHENBACH, in «Erkenntnis» cit., p. 186.

l'inferenza probabile, o «logica della probabilità», conduce o a un regresso infinito o alla dottrina dell'*apriorismo* [*2].

La teoria che sarà sviluppata nelle pagine seguenti si oppone radicalmente a tutti i tentativi di operare con le idee della logica induttiva. Potrebbe essere descritta come la teoria del *metodo deduttivo dei controlli*, o come il punto di vista secondo cui un'ipotesi può essere soltanto *controllata* empiricamente, e soltanto *dopo* che è stata proposta.

Prima di essere in grado di elaborare questo punto di vista (che potrebbe essere chiamato «deduttivismo» in contrapposizione a «induttivismo» [5]) devo anzitutto render chiara la distinzione tra la *psicologia della conoscenza*, che tratta di fatti empirici, e la *logica della conoscenza*, che prende in considerazione soltanto relazioni logiche. Infatti la credenza nella logica induttiva è dovuta, per la maggior parte, a una confusione tra problemi psicologici e problemi epistemologici. Vale forse la pena d'osservare, incidentalmente, che questa confusione reca disturbo non soltanto alla logica della conoscenza, ma anche alla psicologia della conoscenza.

2. *Eliminazione dello psicologismo.*

Nelle pagine precedenti ho detto che il lavoro dello scienziato consiste nel produrre teorie e nel metterle alla prova.

Lo stadio iniziale, l'atto del concepire o dell'inventare una

[*2] Si veda anche il cap. X di questo libro, specialmente la nota 2 al § 81, e il cap. *II del *Postscript: After Twenty Years*. Qui questa critica trova una formulazione piú esplicita.

[5] J. Liebig (*Induktion und Deduktion* [Induzione e deduzione], 1865) fu probabilmente il primo a respingere il metodo induttivo dal punto di vista della scienza naturale: il suo attacco è diretto contro Bacone. P. Duhem (*La théorie physique, son objet et sa structure*, 1906) sostenne esplicitamente punti di vista deduttivistici. (* Nel libro di Duhem si trovano però anche punti di vista chiaramente induttivistici, per esempio nel cap. III, parte I, dove si dice che soltanto l'esperimento, l'induzione e la generalizzazione hanno reso possibile la formulazione della legge di Descartes della rifrazione). Cfr. anche V. KRAFT, *Die Grundformen der wissenschaftlichen Methoden* [Le forme fondamentali del metodo scientifico], 1925; e R. CARNAP, in «Erkenntnis», 2 (1932), p. 440.

teoria, non mi sembra richiedere un'analisi logica né esserne suscettibile. La questione: come accada che a un uomo venga in mente un'idea nuova – un tema musicale, o un conflitto drammatico o una teoria scientifica – può rivestire un grande interesse per la psicologia empirica ma è irrilevante per l'analisi logica della conoscenza scientifica. Quest'ultima prende in considerazione non già *questioni di fatto* (il *quid facti?* di Kant), ma soltanto questioni di *giustificazione o validità* (il *quid juris?* di Kant). Le sue questioni sono del tipo seguente. Può un'asserzione essere giustificata? E, se lo può, in che modo? È possibile sottoporla a controlli? È logicamente dipendente da certe altre asserzioni? O le contraddice? Perché un'asserzione possa essere esaminata logicamente in questo modo, dev'esserci già stata presentata; qualcuno deve averla formulata e sottoposta ad esame logico.

Di conseguenza farò una netta distinzione tra il processo che consiste nel concepire una nuova idea, e i metodi e i risultati dell'esaminarla logicamente. Per quanto riguarda il compito della logica della conoscenza – in quanto distinta dalla psicologia della conoscenza – procederò basandomi sul presupposto che esso consista unicamente nell'investigare i metodi impiegati in quei controlli sistematici ai quali dev'essere sottoposta ogni nuova idea che si debba prendere seriamente in considerazione.

Qualcuno potrebbe obbiettare che sarebbe piú rispondente allo scopo il considerare ufficio dell'epistemologia la produzione di quella che è stata chiamata la «*ricostruzione razionale*» dei passi che hanno condotto lo scienziato a scoprire – a trovare – qualche nuova verità. Ma la questione è: che cosa, precisamente, vogliamo ricostruire? Se ciò che si deve ricostruire sono i processi che entrano in giuoco quando si stimola o si dà sfogo a un'ispirazione, allora rifiuto di considerare questa ricostruzione come il compito della logica della conoscenza. I processi in parola interessano la psicologia empirica, non la logica. Se invece vogliamo ricostruire razionalmente i *controlli successivi* in seguito ai quali si può scoprire che l'ispirazione è una scoperta, o diventa noto che è una conoscenza, questa è un'altra faccenda. Siccome lo scienziato giudica criticamente, altera o respinge la propria ispirazione, possiamo, se proprio lo vogliamo, considerare l'analisi metodologica qui intrapresa come una specie di «ricostruzione razionale» dei processi di pensiero corrispondenti. Ma questa ricostruzione non riesce a descrivere tali processi come avvengono nel fatto: essa può soltanto fornire un'impalcatura logica della procedura dei controlli. Forse però coloro che parlano di una «ricostruzione razionale» dei modi in cui otteniamo le nostre conoscenze non intendono dire niente di piú.

Accade cosí che le argomentazioni che espongo in questo libro siano del tutto indipendenti da questo problema. Comunque, il mio modo di vedere la cosa – per quello che vale – è che non esista nessun metodo logico per avere nuove idee, e nessuna ricostruzione logica di questo processo. Il mio punto di vista si può esprimere dicendo che ogni scoperta contiene un «elemento irrazionale» o «un'intuizione creativa» nel senso di Bergson. In modo analogo, Einstein parla della «ricerca di quelle leggi altamente universali... dalle quali possiamo ottenere un'immagine del mondo grazie alla pura deduzione. Non esiste alcuna via logica, egli dice, che conduca a queste... leggi. Esse possono essere raggiunte soltanto tramite l'intuizione, basata su un alcunché che possiamo chiamare immedesimazione (*Einfühlung*) cogli oggetti d'esperienza»[1].

3. *Controlli deduttivi delle teorie.*

Secondo il punto di vista che sarà esposto qui, il metodo consistente nel sottoporre le teorie a controlli critici e nello scegliere secondo i risultati dei controlli, procede sempre lungo le linee seguenti. Da una nuova idea, avanzata per ten-

[1] Discorso in occasione del sessantesimo compleanno di Max Planck. Il passo citato inizia con le parole: «Il compito supremo del fisico è la ricerca di quelle leggi altamente universali...» (cit. da A. EINSTEIN, *Mein Weltbild* [La mia immagine del mondo], 1934, p. 168; trad. ingl. di A. HARRIS, *The World as I see It*, 1935, p. 125). Idee analoghe si trovano già in LIEBIG, *Induktion und Deduktion* cit. Cfr. anche E. MACH, *Die Prinzipien der Wärmelehre* [I principî della teoria del calore], 1896, pp. 443 sgg. * La parola tedesca «*Einfühlung*» è di difficile traduzione: Harris la rende con «sympathetic understanding of experience» («comprensione simpatetica dell'esperienza»). [L'autore traduce, a sua volta, «intellectual love» («amore intellettuale»). A noi è parso che il termine italiano «immedesimazione» rendesse altrettanto bene l'idea (*N.d.T.*)].

tativi e non ancora giustificata in alcun modo – una anticipazione, un'ipotesi, un sistema di teorie, o qualunque cosa si preferisca – si traggono conclusioni per mezzo della deduzione logica. In un secondo tempo queste conclusioni vengono confrontate l'una con l'altra, e con altre asserzioni rilevanti, in modo da trovare quali relazioni logiche (come equivalenza, derivabilità, compatibilità o incompatibilità) esistano tra di esse.

Volendo, possiamo distinguere quattro differenti linee lungo le quali si può eseguire il controllo di una teoria. Per primo viene il confronto logico delle conclusioni tra loro: confronto per mezzo del quale si controlla la coerenza interna del sistema. In secondo luogo viene l'indagine della forma logica della teoria, il cui scopo è di determinare se la teoria abbia carattere di teoria empirica o di teoria scientifica, o se sia, per esempio, tautologica. In terzo luogo viene il confronto con altre teorie, il cui scopo principale è quello di determinare se la teoria costituisca un progresso scientifico, nel caso che sopravviva ai vari controlli a cui l'abbiamo sottoposta. E infine c'è il controllo della teoria condotto mediante le applicazioni empiriche delle conclusioni che possono essere derivate da essa.

Scopo di quest'ultimo tipo di controllo è di scoprire fino a qual punto le nuove conseguenze della teoria – qualunque cosa di nuovo possa esserci in ciò che essa asserisce – vengano incontro alle richieste della pratica, sia a quelle sollevate da esperimenti puramente scientifici, sia a quelle che derivano da applicazioni tecnologiche pratiche. Anche qui la procedura dei controlli rivela il proprio carattere deduttivo. Con l'aiuto di altre asserzioni già accettate in precedenza si deducono dalla teoria certe asserzioni singolari che possiamo chiamare «predizioni»: in particolar modo predizioni che possano essere controllate o applicate con facilità. Tra queste asserzioni scegliamo quelle che non sono derivabili dalla teoria corrente, e, piú in particolare, quelle che la teoria corrente contraddice. In seguito andiamo alla ricerca di una decisione riguardante queste (e altre) asserzioni derivate, confrontando queste ultime con i risultati delle applicazioni pratiche e degli esperimenti. Se questa decisione è positiva, cioè se le singole conclusioni si rivelano accettabili o *verificate*, la teoria ha temporaneamente superato il controllo: non abbiamo trovato alcuna ragione per scartarla. Ma se la decisione è negativa, o, in altre parole, se le conclusioni sono state *falsificate*, allora la loro falsificazione falsifica anche la teoria da cui le conclusioni sono state dedotte logicamente.

È opportuno notare che una decisione positiva può sostenere la teoria soltanto temporaneamente, perché può sempre darsi che successive decisioni negative la scalzino. Finché una teoria affronta con successo controlli dettagliati e severi, e nel corso del progresso scientifico non è scalzata da un'altra teoria, possiamo dire che ha «provato il suo valore» o che è stata «*corroborata*» dall'esperienza passata [*1].

Nel procedimento delineato qui non compare nulla che somigli alla logica induttiva. Io non presuppongo mai che si possa concludere dalla verità delle asserzioni singolari alla verità delle teorie. Non presuppongo mai che le teorie possano essere provate «vere» o anche semplicemente «probabili» in forza di conclusioni «verificate».

In questo libro intendo fornire un'analisi piú dettagliata dei metodi dei controlli deduttivi; e tenterò di mostrare che nell'ambito di quest'analisi si possono trattare tutti i problemi che di solito si chiamano «*epistemologici*». In particolare che si possono eliminare quei problemi a cui la logica induttiva dà origine, senza farne sorgere dei nuovi al loro posto.

4. *Il problema della demarcazione.*

Tra le molte obiezioni che verranno probabilmente sollevate contro il punto di vista proposto in questo capitolo, la piú seria è forse la seguente. Qualcuno potrebbe dire che, rifiutando il metodo induttivo, privo la scienza empirica di quella che sembra la sua caratteristica piú importante; e ciò significa che elimino le barriere che separano la scienza dalla speculazione metafisica. A quest'obiezione rispondo che la

[*1] Per questo termine cfr. la nota *1, prima del § 79, e il § *29 del *Postscript* cit.

principale ragione per cui rifiuto la logica induttiva è precisamente questa: che *essa non fornisce un contrassegno appropriato per distinguere* il carattere empirico, non metafisico, di un sistema di teorie; o, in altre parole, che *non fornisce un «criterio di demarcazione» appropriato.*

Chiamo *problema della demarcazione* [1] il problema di trovare un criterio che ci metta in grado di distinguere tra le scienze empiriche da un lato e la matematica e la logica, e cosí pure i sistemi «metafisici», dall'altro.

Questo problema era noto a Hume che tentò di risolverlo [2]. Con Kant divenne il problema centrale della teoria della conoscenza. Se, seguendo Kant, chiamiamo «problema di Hume» il problema dell'induzione, potremmo chiamare «problema di Kant» il problema della demarcazione.

Di questi due problemi – che sono la fonte di quasi tutti gli altri problemi della teoria della conoscenza – il problema della demarcazione è, penso, il piú fondamentale. In realtà, la ragione principale per cui gli epistemologi con tendenze empiristiche sono propensi a puntare tutto sul «metodo dell'induzione», sembra essere la credenza che soltanto questo metodo può fornire un criterio di demarcazione appropriato. Ciò è vero specialmente per quegli empiristi che militano sotto le insegne del «positivismo».

I vecchi positivisti erano ben lieti di ammettere come scientifici, o legittimi, soltanto quei *concetti* (o nozioni, o idee) che, secondo il loro modo di presentare la questione, fossero «derivati dall'esperienza»; cioè, quei concetti che essi credevano riducibili logicamente a elementi di esperienza sensibile, quali sensazioni (o dati sensibili), impressioni, percezioni, ricordi auditivi o visivi, e cosí via. I positivisti moderni sono in grado di vedere piú chiaramente che la scienza non è un sistema di concetti, ma piuttosto un sistema di *asserzioni* [*1]. Di conseguenza intendono ammettere come

[1] Cfr. con questo (e con i §§ 1-6 e 13-24) la mia nota in «Erkenntnis», 3 (1933), pp. 426, * ora pubblicata come appendice *I di questo libro.

[2] Cfr. l'ultima frase della sua *Enquiry Concerning Human Understanding* [Ricerca sull'intelletto umano]. * Cfr. con il capoverso seguente (e la mia allusione agli epistemologi) la citazione di Reichenbach al § 1, nota 1 di questo libro.

[*1] Ora mi rendo conto che quando scrissi questo paragrafo sopravvalutavo i «positivisti moderni». Avrei dovuto ricordare che, *sotto questo aspetto,* il promettente inizio del *Tractatus* di Wittgenstein («Il mondo è la to-

scientifiche, o legittime, soltanto quelle asserzioni che siano riducibili ad asserzioni elementari, o «atomiche», di esperienza – a «giudizi di percezione» o «proposizioni atomiche» o «enunciati protocollari», o dio sa che cosa *[2]. È chiaro che il criterio di demarcazione qui implicito è identico alla richiesta di una logica induttiva.

Poiché rifiuto la logica induttiva, devo anche rifiutare tutti questi tentativi di risolvere il problema della demarcazione. Il problema della demarcazione diventa importante per la nostra indagine in seguito a questo rifiuto. Il compito cruciale di qualunque epistemologia che non accetti la logica induttiva dev'essere il trovare un criterio di demarcazione accettabile.

Di solito i positivisti interpretano il problema della demarcazione in maniera *naturalistica*; lo interpretano come se si trattasse di un problema di scienza naturale. Invece di considerare come loro compito il proporre una convenzione appropriata, essi credono di aver scoperto, tra scienza empirica da un lato e metafisica dall'altro, una differenza che esiste, per cosí dire, nella natura delle cose. Tentano costantemente di provare che per sua stessa natura la metafisica non è altro che una chiacchiera insensata, – «sofisticheria e illusione» – come dice Hume, che dovremmo «dare alle fiamme»*[3].

Se con le parole «insensato» o «insignificante» non vogliamo esprimere nient'altro, per definizione, che: «non appartenente alla scienza empirica», allora la caratterizzazione della metafisica come non-senso insignificante è assolutamente ovvia; infatti la metafisica viene di solito definita co-

talità dei fatti, non delle cose») è annullato dalla fine, che denuncia colui il quale «non ha dato significato a certi segni nelle sue proposizioni». Vedi anche il mio *Open Society and its Enemies* [La società aperta e i suoi nemici], cap. II, § 2, e il cap. *I del mio *Postscript* cit., specialmente ai §§ *11 (nota 5), *24 (gli ultimi cinque capoversi) e *25.

*[2] Nulla, naturalmente, dipende dai nomi. Quando inventai il nome «asserzione-base» (o «proposizione-base», cfr. §§ 7 e 28) lo feci semplicemente perché avevo bisogno di un termine che *non* fosse gravato dalla connotazione di asserzione percettiva. Sfortunatamente però questo termine era già stato adottato da altri, ed era stato usato proprio per esprimere quel genere di significato che io desideravo evitare. Cfr. anche *Postscript* cit., § *29.

*[3] Cosí Hume, al pari di Sesto, condannava la sua *Enquiry* nell'ultima pagina del libro: proprio come avrebbe fatto Wittgenstein nell'ultima pagina del *Tractatus* (cfr. § 10, nota 2).

me non-empirica. Ma naturalmente i positivisti credono di poter dire, intorno alla metafisica, molto di piú che non che alcune delle sue asserzioni sono non-empiriche. Le parole «insignificante» o «insensato» suggeriscono, e si vuole che suggeriscano, una valutazione negativa; e non v'è dubbio che ciò che i positivisti vogliono veramente non è tanto una efficace demarcazione quanto piuttosto lo scalzamento[3] e l'annichilimento definitivi della metafisica. In qualunque modo ciò possa accadere, vediamo che ogni qual volta i positivisti hanno tentato di dire con maggior chiarezza che cosa significhi «significante», il loro tentativo ha condotto allo stesso risultato: a una definizione di «enunciato significante» (distinto da «pseudo-enunciato insignificante») la quale non faceva altro che reiterare il criterio di demarcazione della loro *logica induttiva.*

Ciò «si rivela» molto chiaramente nel caso di Wittgenstein, secondo il quale ogni proposizione significante dev'essere *logicamente riducibile*[4] a proposizioni elementari (o atomiche), che egli caratterizza come descrizioni o «immagini della realtà»[5] (caratterizzazione, questa, che tra l'altro deve coprire l'intiero campo delle proposizioni significanti). Da ciò possiamo vedere che il criterio di significanza di Wittgenstein coincide con il criterio di demarcazione degli induttivisti a condizione che si sostituisca la parola «significante» alle parole «legittimo» o «scientifico». E proprio riguardo al problema dell'induzione questo tentativo di risolvere il problema della demarcazione fallisce: i positivisti, nella loro ansia di distruggere la metafisica, distruggono, con essa, la scienza della natura. Infatti le leggi scientifiche non possono, a loro volta, essere ridotte ad asserzioni empiriche elementari. Applicato coerentemente, il criterio di significanza di

[3] CARNAP, in «Erkenntnis», 2 (1932), pp. 219 sgg. Già Mill aveva usato la parola «insignificante» in modo analogo, * senza dubbio sotto l'influenza di Comte. Cfr. A. COMTE, *Early Essays on Social Philosophy* [Primi saggi di filosofia sociale], a cura di H. D. Hutton, 1911, p. 223. Cfr. anche il mio *Open Society* cit., cap. 11, nota 51.

[4] L. WITTGENSTEIN, *Tractatus logico-philosophicus*, 1918 e 1922 [trad. it. *Tractatus logico-philosophicus e Quaderni 1914-1916*, Einaudi, Torino 1964], prop. 5. * Siccome questo libro fu scritto nel 1934, in esso mi riferisco *unicamente* al *Tractatus*. [Citeremo sempre il *Tractatus* in questa traduzione: gli eventuali riferimenti di pagina devono perciò essere considerati come riferimenti all'edizione italiana citata qui sopra].

[5] WITTGENSTEIN, *Tractatus* cit., prop. 4.01; 4.03; 2.221.

Wittgenstein liquida come insignificanti quelle leggi naturali la cui ricerca, come dice Einstein[6], è «il compito supremo del fisico»: tali leggi non potranno mai essere accettate come asserzioni genuine o legittime. Il tentativo di Wittgenstein, di smascherare il problema dell'induzione come un vuoto pseudo-problema, è stato espresso da Schlick[*4] con le seguenti parole: «Il problema dell'induzione consiste nel richiedere una giustificazione logica delle *asserzioni universali* intorno alla realtà... Noi riconosciamo, con Hume, che una giustificazione logica di questo tipo non esiste; non può esistere, semplicemente perché *tali asserzioni non sono asserzioni autentiche*»[7].

Ciò mostra come il criterio induttivistico di demarcazione non riesca a tracciare una linea di divisione tra sistemi scientifici e sistemi metafisici, e perché esso debba per forza assegnar loro status eguale. Infatti il verdetto del dogma positivistico del significato è che tanto i sistemi metafisici quanto quelli scientifici sono costituiti da pseudo-asserzioni insignificanti. Dunque, invece di sradicare la metafisica dalla scien-

[6] Cfr. § 2, nota 1.

[*4] L'idea di trattare le leggi scientifiche come pseudo-proposizioni – e di risolvere in tal modo il problema dell'induzione – fu attribuita da Schlick a Wittgenstein (cfr. il mio *Open Society* cit., note 46, 51 sg. al cap. 11). In realtà tale idea è molto piú vecchia, e fa parte della tradizione strumentalistica che può essere fatta risalire a Berkeley e oltre. (Si veda, per esempio, il mio scritto *Three Views Concerning Human Knowledge* [trad. it. *Tre punti di vista a proposito della conoscenza umana*, in K. R. POPPER, *Scienza e filosofia*, Einaudi, Torino 1969], in *Contemporary British Philosophy*, 3ª serie, 1956; e *A Note on Berkeley as a Precursor of Mach* [Nota su Berkeley come precursore di Mach], in «The British Journal for the Philosophy of Science», 4 (1953), pp. 26 sgg., ora ristampati in *Conjectures and Refutations* [Congetture e confutazioni], 1959. Ulteriori riferimenti si trovano nella nota *1 prima del § 12, p. 43. Il problema è anche trattato nel *Postscript* cit., §§ *11-*14 e *19-*26).

[7] M. SCHLICK, in «Naturwissenschaften», 19 (1931), p. 156. (Il corsivo è mio). Per quanto riguarda le leggi di natura Schlick scrive (p. 151): «È stato spesso osservato che, a rigore, non possiamo mai parlare della verificazione assoluta di una legge, perché facciamo sempre, per cosí dire, la tacita riserva che essa possa venir modificata alla luce di ulteriori esperienze». E continua: «Se posso aggiungere, incidentalmente, alcune parole sulla situazione logica, il fatto sopra menzionato significa che una legge di natura non possiede, in linea di principio, il carattere logico di un'asserzione ma è piuttosto una prescrizione per la formazione di asserzioni». * (Senza dubbio «formazione» doveva includere la trasformazione o derivazione). Schlick attribuiva questa teoria a una comunicazione personale di Wittgenstein. Cfr. anche il § *12 del *Postscript* cit.

za empirica, il positivismo conduce all'irruzione della metafisica nel dominio della scienza [8].

In opposizione a questi stratagemmi antimetafisici – che poi sono antimetafisici soltanto nell'intenzione – il mio compito, cosí come lo intendo io, non è quello di darmi da fare per scalzare la metafisica, ma piuttosto quello di formulare una caratterizzazione appropriata della scienza empirica, ovvero, di definire i concetti «scienza empirica» e «metafisica» in modo da essere poi in grado di dire se lo studiare piú da vicino un dato sistema di asserzioni sia o no di pertinenza della scienza empirica.

Di conseguenza, il mio criterio di demarcazione dovra essere considerato come una *proposta per un accordo o convenzione*. Le opinioni sull'opportunità di una convenzione siffatta possono differire; ed è possibile discutere ragionevolmente queste questioni soltanto se le parti in causa hanno qualche scopo in comune. Naturalmente, la scelta di questo scopo sarà, in ultima analisi, una questione di decisione che oltrepassa l'ambito della discussione razionale [*5].

Pertanto, chiunque abbia di mira, come scopo e oggetto della scienza, un sistema di asserzioni assolutamente certe e irrevocabilmente vere [9], respingerà senza dubbio la proposta che sto per avanzare qui. E cosí pure la respingeranno coloro che fanno consistere «l'essenza della scienza... nella dignità», e pensano che questa dignità risieda nella sua «completezza» e nella sua «reale verità ed essenzialità» [10]. Molto difficilmente costoro saranno disposti a riconoscere questa dignità alla moderna fisica teorica, nella quale invece io ed altri vediamo la realizzazione fino ad oggi piú completa di ciò che chiamo «scienza empirica».

[8] Cfr. § 78 (per esempio la nota 1). * Vedi anche il mio *Open Society* cit., cap. 11, note 46, 51 e 52 e il mio scritto *The Demarcation between Science and Metaphysics* [La demarcazione tra scienza e metafisica], contributo del gennaio 1955 al volume dedicato a Carnap della Library of Living Philosophers, edito a cura di P. A. Schilpp (*The Philosophy of Rudolf Carnap* [La filosofia di R. Carnap], La Salle, Illinois-London 1963. Questo scritto si trova ora in *Conjectures and Refutations*, 1963 e 1965).

[*5] Io credo che tra parti interessate alla verità e pronte a prestarsi vicendevolmente attenzione sia sempre possibile una discussione ragionevole. (Cfr. il mio *Open Society* cit., cap. 24).

[9] Questo è il punto di vista di Dingler. Cfr. § 19, nota 1.

[10] Questo è il punto di vista sostenuto da O. SPANN, *Kategorienlehre* [Teoria delle categorie], 1924.

Gli scopi della scienza che ho in mente sono differenti. In ogni caso non tento di giustificarli rappresentandoli come le mete vere ed essenziali della scienza. Questo non farebbe altro che snaturare il punto della discussione, e significherebbe una ricaduta nel dogmatismo positivistico. Per quanto posso vedere, c'è soltanto *un* modo di argomentare razionalmente in favore delle proposte che ho avanzato: quello, cioè, che consiste nell'analizzare le loro conseguenze logiche: nel mettere in evidenza la loro fertilità, il loro potere di mettere in chiaro i problemi della teoria della conoscenza.

Non ho perciò nessuna difficoltà ad ammettere che nell'arrivare alla formulazione delle mie proposte sono stato guidato in ultima analisi da giudizi di valore e da predilezioni personali. Spero tuttavia che le proposte che ho avanzato possano essere accettate da coloro che tengono in pregio non soltanto il rigore logico, ma anche la libertà dal dogmatismo; che cercano l'applicabilità pratica, ma sono attratti in misura ancor maggiore dalle avventure della scienza e dalle scoperte che continuamente ci mettono di fronte a questioni nuove e inaspettate e costituiscono una sfida a scoprire risposte nuove e finora insospettate.

Il fatto che le proposte che avanzo siano influenzate da giudizi di valore non significa che io stia commettendo lo stesso errore di cui ho accusato i positivisti: quello di tentare di uccidere la metafisica lanciandole improperi. Non mi spingo neppure tanto lontano da asserire che la metafisica non ha nessun valore per la scienza empirica. Infatti non si può negare che, accanto alle idee metafisiche che hanno ostacolato il cammino della scienza, ce ne sono state altre – come l'atomismo speculativo – che ne hanno aiutato il progresso. E guardando alla questione dal punto di vista psicologico, sono propenso a ritenere che la scoperta scientifica è impossibile senza la fede in idee che hanno una natura puramente speculativa, e che talvolta sono addirittura piuttosto nebulose; fede, questa, che è completamente priva di garanzie dal punto di vista della scienza e che pertanto, entro questi limiti, è «metafisica» [11].

[11] Cfr. anche M. PLANCK, *Positivismus und reale Aussenwelt* [Positivismo e mondo esterno reale], 1931; e A. EINSTEIN, *Die Religiosität der Forschung* [La religiosità dell'indagine], in *Mein Weltbild* cit., p. 43. * Cfr. anche il § 85 e il *Postscript* cit.

Tuttavia, pur avendo avanzato queste cautele, sostengo ancora che il primo compito della logica della conoscenza è quello di formulare un *concetto di scienza empirica* allo scopo di rendere l'uso linguistico, ora piuttosto incerto, il piú possibile definito; di tracciare una netta linea di demarcazione tra la scienza e le idee della metafisica, anche se queste idee possono avere favorito il progresso della scienza durante tutta la sua storia.

5. *L'esperienza come metodo.*

Il compito di formulare una definizione accettabile dell'idea di scienza empirica non è privo di difficoltà. Alcune di queste difficoltà sorgono dal *fatto che esistono di necessità molti sistemi di teorie* la cui struttura logica è molto simile a quell'unica che, in un'epoca particolare, rappresenta il sistema di scienza empirica comunemente accettato. Talvolta questa situazione si descrive dicendo che c'è una grande quantità – e presumibilmente un numero infinito – di «mondi logicamente possibili». Tuttavia il sistema chiamato «scienza empirica» è destinato a rappresentare soltanto *un* mondo: il «mondo della nostra esperienza» *[1].

Allo scopo di rendere quest'idea un po' piú precisa possiamo distinguere tre esigenze che il nostro sistema empirico di teorie dovrà soddisfare. In primo luogo esso dev'essere *sintetico*, cosí che possa rappresentare un mondo non contraddittorio, *possibile*. In secondo luogo deve soddisfare il criterio di demarcazione (confronta i §§ 6 e 21); cioè non dev'essere metafisico, ma deve rappresentare un mondo di *esperienza* possibile. In terzo luogo dev'essere un sistema che si distingue in qualche modo da altri sistemi, come l'unico che rappresenta il *nostro* mondo di esperienza.

Ma in che modo dev'essere distinto il sistema che rappresenta il nostro mondo d'esperienza? La risposta è: in base al fatto che è stato sottoposto a controlli e li ha superati. Ciò significa che lo si deve distinguere applicandogli quel metodo deduttivo che è mio scopo analizzare e descrivere.

*[1] Cfr. l'appendice *x.

Da questo punto di vista «l'esperienza» si presenta come un *metodo* di distinzione sulla base del quale si può differenziare un sistema di teorie dagli altri; cosí la scienza empirica sembra caratterizzata non soltanto dalla sua forma logica, ma anche dal *metodo* che la distingue. (Naturalmente questo è anche il punto di vista degli induttivisti che tentano di caratterizzare la scienza empirica in base all'uso del metodo induttivo).

La teoria della conoscenza, il cui compito è l'analisi del metodo o della procedura peculiari alla scienza empirica, può, di conseguenza, essere descritta come una teoria del metodo empirico; *una teoria di ciò che si è soliti chiamare «esperienza».*

6. *La falsificabilità come criterio di demarcazione.*

Il criterio di demarcazione inerente alla logica induttiva – cioè il dogma positivistico del significato – è equivalente alla richiesta che tutte le asserzioni della scienza empirica (ovvero tutte le asserzioni «significanti») debbano essere passibili di una decisione conclusiva riguardo la loro verità *e* falsità; diremo che devono essere «*decidibili in modo conclusivo*». Ciò significa che la loro forma dev'essere tale che *sia il verificarle sia il falsificarle* debbano essere logicamente possibili. Cosí Schlick dice: «... un'asserzione autentica deve essere passibile di *verificazione conclusiva*»[1]; e Waismann afferma ancor piú chiaramente: «Se non è in alcun modo possibile *determinare se un'asserzione è vera*, allora l'asserzione non ha alcun significato. Infatti il significato di un'asserzione è il metodo della sua verificazione»[2].

Ora, secondo me, non esiste nulla di simile all'induzione[*1]. È pertanto logicamente inammissibile l'inferenza da asserzioni singolari «verificate dall'esperienza» (qualunque

[1] SCHLICK, in «Naturwissenschaften» cit., p. 150.
[2] F. WAISMANN, in «Erkenntnis», I (1930), p. 229.
[*1] Naturalmente qui non prendo in considerazione la cosiddetta «induzione matematica»; ciò che nego è che nelle cosiddette «scienze induttive» esista qualcosa come l'induzione; e anche che esistano «procedimenti induttivi» o «inferenze induttive».

cosa ciò possa significare) a teorie. Dunque le teorie non sono *mai* verificabili empiricamente. Se vogliamo evitare l'errore positivistico, consistente nell'eliminare per mezzo del nostro criterio di demarcazione i sistemi di teorie delle scienze della natura [*2], dobbiamo scegliere un criterio che ci consenta di ammettere, nel dominio della scienza empirica, anche asserzioni che non possono essere verificate.

Ma io ammetterò certamente come empirico, o scientifico, soltanto un sistema che possa essere *controllato* dall'esperienza. Queste considerazioni suggeriscono che, come criterio di demarcazione, non si deve prendere la *verificabilità*, ma la *falsificabilità* di un sistema [*3]. In altre parole: da un sistema scientifico non esigerò che sia capace di esser scelto, in senso positivo, una volta per tutte; ma esigerò che la sua forma logica sia tale che possa essere messo in evidenza, per mezzo di controlli empirici, in senso negativo: *un sistema empirico deve poter essere confutato dall'esperienza*[3].

(Cosí l'asserzione «Domani qui pioverà o non pioverà» non sarà considerata un'asserzione empirica, semplicemente perché non può essere confutata, mentre l'asserzione «Qui domani pioverà» sarà considerata empirica).

[*2] Nella sua *Logical Syntax of Language* [trad. it. *Sintassi logica del linguaggio*, Silva, Milano 1961, p. 429], 1937, pp. 321 sg., Carnap ammise che questo è un errore, riferendosi esplicitamente alla mia critica; la stessa cosa ammise, ancor piú ampiamente, in *Testability and Meaning* [Controllabilità e significato], dove riconobbe che le leggi universali non sono soltanto «convenienti» per la scienza, ma addirittura «essenziali» («Philosophy of Science», 4, 1937, p. 27). Ma nell'opera induttivistica *Logical Foundations of Probability* [Fondamenti logici della probabilità], 1950, ritorna a una posizione molto simile a quella criticata qui; avendo trovato che le leggi universali hanno probabilità zero (p. 511), è costretto a dire (p. 575) che, pur non essendo necessario che esse vengano espunte dalla scienza, la scienza può farne benissimo a meno.

[*3] Si noti che io propongo la falsificabilità come criterio di demarcazione, ma *non di significato*. Si noti anche che nel § 4 ho già criticato aspramente l'uso dell'idea di significato come criterio di demarcazione, e che nel § 9 attacco di nuovo, e ancor piú aspramente, il dogma del significato. È pertanto un puro e semplice mito (sebbene un certo numero di confutazioni della mia dottrina siano basate su questo mito) che io abbia proposto la falsificabilità come criterio di significato. La falsificabilità separa due tipi di asserzioni perfettamente significanti: le falsificabili e le non falsificabili. Essa traccia una linea all'interno del linguaggio significante, non intorno ad esso. Cfr. anche l'appendice *1, e il cap. *1 del *Postscript* cit., specialmente i §§ *17 e *19.

[3] Idee affini si possono trovare, per esempio, in P. FRANK, *Die Kausalität und ihre Grenzen* [La causalità e i suoi limiti], 1931, cap. 1, § 10 (pp. 15 sg.); W. DUBISLAV, *Die Definition* [La definizione], 1931[3], pp. 100 sg. (Cfr. anche in questo libro, § 4, nota 1).

Contro il criterio di demarcazione che ho proposto qui si possono sollevare diverse obiezioni. In primo luogo può sembrare piuttosto sciocco il suggerire che la scienza, la quale dovrebbe darci informazioni positive, si debba caratterizzare dicendo che soddisfa un criterio negativo, come la confutabilità. Ma nei §§ 31-46 mostrerò che quest'obiezione ha poco peso, perché la quantità di informazione intorno al mondo fornita da un'asserzione scientifica è tanto piú grande quanto maggiore è la possibilità che essa entri in conflitto, in virtú del suo carattere logico, con possibili asserzioni singolari. (Non per nulla chiamiamo «leggi» le leggi di natura: quanto piú vietano, tanto piú dicono).

Ancora: si potrebbe tentare di rivolgere contro me stesso le critiche che ho rivolto al criterio di demarcazione induttivistico: potrebbe infatti sembrare che contro la falsificabilità come criterio di demarcazione sia possibile sollevare critiche simili a quelle che io, per parte mia, ho sollevato contro la verificabilità.

Questo attacco non può darmi noia. La mia proposta si basa su un'*asimmetria* tra verificabilità e falsificabilità, asimmetria che risulta dalla forma logica delle asserzioni universali [*4]. Queste, infatti, non possono mai essere derivate da asserzioni singolari, ma possono venir contraddette da asserzioni singolari. Di conseguenza è possibile, per mezzo di inferenze puramente deduttive (con l'aiuto del *modus tollens* della logica classica), concludere dalla verità di asserzioni singolari alla falsità di asserzioni universali. Un tale ragionamento, che conclude alla falsità di asserzioni universali, è il solo tipo di inferenza strettamente deduttiva che proceda, per cosí dire, nella «direzione induttiva»; cioè da asserzioni singolari ad asserzioni universali.

Una terza obiezione può forse sembrare piú seria. Si può dire che anche ammettendo l'asimmetria, è ancora impossibile, per varie ragioni, che un qualsiasi sistema teorico possa mai essere falsificato in modo conclusivo. Infatti è sempre possibile trovare qualche scappatoia per sfuggire alla falsificazione: per esempio, introducendo *ad hoc* un'ipotesi ausiliaria oppure trasformando, *ad hoc*, una definizione. È anche

[*4] Ora questa asimmetria si trova discussa piú ampiamente nel § *22 del mio *Postscript* cit.

possibile adottare la posizione che consiste, semplicemente, nel respingere qualsiasi esperienza falsificante, senza che ciò conduca a contraddizioni. È vero che di solito gli scienziati non procedono in questo modo, ma tale procedimento è logicamente possibile; e il meno che si possa sostenere è che questo fatto rende dubbio il valore del criterio di demarcazione che ho proposto.

Devo ammettere che questa critica è giusta; ma non per questo è necessario che io ritiri la mia proposta di adottare la falsificabilità come criterio di demarcazione. Nel § 20 e in quelli seguenti, proporrò infatti che il *metodo empirico* venga caratterizzato come un metodo che esclude precisamente quei modi di sfuggire alla falsificazione che, come giustamente insiste il mio critico immaginario, sono logicamente ammissibili. Secondo la mia proposta, ciò che caratterizza il metodo empirico è la maniera in cui esso espone alla falsificazione, in ogni modo concepibile, il sistema che si deve controllare. Il suo scopo non è quello di salvare la vita a sistemi insostenibili, ma, al contrario, quello di scegliere il sistema che al paragone si rivela piú adatto, dopo averli esposti tutti alla piú feroce lotta per la sopravvivenza.

Il criterio di demarcazione che ho proposto conduce anche a una soluzione del problema dell'induzione di Hume; del problema, cioè, della validità delle leggi di natura. La radice di questo problema è l'apparente contraddizione tra quella che può essere chiamata «la tesi fondamentale dell'empirismo» – la tesi secondo cui soltanto l'esperienza può decidere della verità o della falsità delle asserzioni della scienza – e la realizzazione humeana dell'inammissibilità delle argomentazioni induttive. Questa contraddizione nasce soltanto se si assume che tutte le asserzioni empiriche della scienza debbano essere «decidibili in modo conclusivo»; se cioè si assume che tanto la loro verificazione quanto la loro falsificazione debbano essere entrambe possibili in linea di principio. Se rinunciamo a quest'esigenza e ammettiamo come empiriche soltanto quelle asserzioni che sono decidibili in un unico senso – unilateralmente decidibili e, piú specificamente, falsificabili – e possono essere controllate per mezzo di tentativi sistematici di falsificarle, allora la contraddizione svanisce: il metodo della falsificazione non presuppone alcun'inferenza induttiva, ma soltanto le trasformazioni tautologiche della logica deduttiva, la cui validità è fuori discussione[4].

7. *Il problema della «base empirica».*

Se, come criterio di demarcazione, si deve poter applicare comunque la falsificabilità, dobbiamo poter disporre di asserzioni singolari che possano servire come premesse di inferenze falsificanti. Il nostro criterio, perciò, sembra non far altro che spostare il problema riportandoci, dalla questione circa il carattere empirico delle teorie, alla questione circa il carattere empirico delle asserzioni singolari.

Tuttavia anche in questo modo si è guadagnato qualcosa. Infatti, nella pratica della ricerca scientifica è talvolta di estrema urgenza stabilire una demarcazione in relazione ai sistemi di teorie, mentre raramente sorgono dubbi circa il carattere empirico delle asserzioni singolari. È vero che si compiono errori di osservazione e che tali errori dànno origine ad asserzioni singolari false, ma difficilmente lo scienziato ha occasione di descrivere un'asserzione singolare come non-empirica o metafisica.

Nella logica della scienza, i *problemi riguardanti la base empirica*, cioè i problemi concernenti il carattere empirico delle asserzioni singolari e il modo in cui esse vengono controllate, svolgono, dunque, una parte differente da quella che svolgono moltissimi altri problemi di cui ci occuperemo. Infatti, la maggior parte di questi problemi hanno una stretta relazione con la *pratica* della ricerca, mentre il problema della base empirica appartiene quasi esclusivamente alla *teoria* della conoscenza. In ogni modo dovrò trattarne, perché tali problemi hanno dato origine a molte oscurità. Questo è particolarmente vero per la relazione tra *esperienze percettive* e *asserzioni-base*. (Chiamo «asserzione-base» o «proposizione-base» un'asserzione che può servire come premessa di una falsificazione empirica; in breve, l'asserzione di un fatto singolare).

[4] A questo proposito vedi anche il mio scritto citato al § 4, nota 1. * Ora ristampato come appendice *1 e il mio *Postscript* cit., specialmente al § *2.

Si è spesso ritenuto che le esperienze percettive forniscano una specie di giustificazione per le asserzioni-base. Si è sostenuto che tali asserzioni sono «basate sopra» queste esperienze; che la loro verità diventa «manifesta in seguito all'ispezione» di queste esperienze; o che è resa «evidente» da queste esperienze, e cosí via. Tutte queste espressioni manifestano la tendenza, perfettamente legittima, a mettere l'accento sulla stretta connessione tra le asserzioni-base e le nostre esperienze percettive. Ma si è anche pensato, giustamente, che *le asserzioni possono essere logicamente giustificate soltanto da altre asserzioni.* Cosí la connessione tra le percezioni e le asserzioni rimaneva oscura, e veniva descritta da espressioni egualmente oscure che non spiegavano nulla ma sorvolavano sulle difficoltà o, nel migliore dei casi, le nascondevano dietro metafore.

Anche di questo problema credo si possa trovare una soluzione, purché si separino nettamente i suoi aspetti psicologici da quelli logici e metodologici. Dobbiamo distinguere, da un lato, tra le *nostre esperienze soggettive o i nostri sentimenti di convinzione*, che non possono mai giustificare nessun'asserzione (anche se possono diventare l'oggetto di una indagine psicologica) e le *relazioni logiche oggettive* sussistenti tra i vari sistemi di asserzioni scientifiche e all'interno di ciascuno di essi, dall'altro.

Il problema della base empirica sarà discusso dettagliatamente nei §§ che vanno dal 25 al 30. Per il momento penso che sia meglio rivolgere la nostra attenzione al problema dell'oggettività scientifica, perché i termini «oggettivo» e «soggettivo», che ho appena usato, richiedono una delucidazione.

8. *Oggettività scientifica e convinzione soggettiva.*

Le parole «oggettivo» e «soggettivo» sono termini filosofici su cui grava una pesante eredità di usi contraddittori e di discussioni inconcludenti e interminabili.

Il mio uso dei termini «oggettivo» e «soggettivo» non è dissimile da quello di Kant. Egli usa la parola «oggettivo» per indicare che la conoscenza scientifica dev'essere *giustificabile* indipendentemente dal capriccio di chicchessia: una giustificazione è «oggettiva» se in linea di principio può essere sottoposta a controllo e può essere compresa da chiunque. «Quando – egli scrive – una cosa è valida per qualunque essere in possesso di ragione, la sua ragion d'essere è oggettiva e sufficiente» [1].

Ora, io sostengo che le teorie scientifiche non sono mai completamente giustificabili e verificabili, ma che, nondimeno, possono essere sottoposte a controlli. Dirò pertanto che l'*oggettività* delle asserzioni della scienza risiede nel fatto che esse possono *essere controllate intersoggettivamente* [*1].

La parola «soggettivo» è applicata da Kant ai nostri sentimenti di convinzione (di gradi diversi) [2]. Esaminare come essi si originino è compito della psicologia. Possono sorgere, per esempio, «in conformità con le leggi dell'associazione» [3]. Anche ragioni oggettive possono servire come «*cause* soggettive di giudizio» [4], nella misura in cui possiamo riflettere su queste ragioni e convincerci della loro forza costrittiva.

Kant fu forse il primo a rendersi conto che l'oggettività delle asserzioni scientifiche è strettamente connessa con la costruzione di teorie – con l'uso di ipotesi e di asserzioni universali. Soltanto quando certi eventi ricorrono in accordo con regole, o regolarità, come nel caso degli esperimenti ripetibili, le nostre osservazioni possono essere controllate – in linea di principio – da chiunque. Non prendiamo nep-

[1] I. KANT, *Kritik der reinen Vernunft* [Critica della ragion pura], Methodenlehre, 2. Hauptstück, 3. Abschnitt, 2ª ed., p. 848. [Nell'edizione inglese del suo libro, l'autore utilizza, in questa come in altre citazioni della *Critica della ragion pura*, la traduzione inglese di N. Kemp Smith, *Critique of Pure Reason*, 1933. Noi ci limiteremo, qui e altrove, a riportare i riferimenti dell'autore all'edizione critica completa delle opere di Kant pubblicata a cura dell'Accademia delle scienze di Berlino, riferimenti che, del resto, si trovano sia nella *Logik der Forschung* sia accanto ai riferimenti alla traduzione di N. Kemp Smith, nell'edizione inglese del libro di Popper (*N.d.T.*)].

[*1] Da allora ho generalizzato questa formulazione; infatti il *controllo* intersoggettivo non è che un aspetto molto importante dell'idea piú generale di *critica* intersoggettiva, o, in altre parole, dell'idea di controllo razionale reciproco per mezzo della discussione critica. Quest'idea piú generale, discussa con una certa ampiezza nel mio *Open Society* cit., capp. 23 e 24, e nel mio *Poverty of Historicism* [Miseria dello storicismo], 1945 e 1957, § 32, ora si trova discussa anche nel *Postscript* cit., specialmente nei capp. *I, *II e *VI.

[2] Cfr. *Kritik der reinen Vernunft*, Methodenlehre, loc. cit.

[3] *Ibid.*, Transzendentale Elementarlehre, § 19, 2ª ed., p. 142.

[4] *Ibid.*, Methodenlehre; 2. Hauptstück, 3. Abschnitt, 2ª ed., p. 849.

pure sul serio le nostre proprie osservazioni, né le accettiamo come osservazioni scientifiche, finché non le abbiamo ripetute e controllate. Soltanto in seguito a tali ripetizioni possiamo convincerci che non stiamo trattando con una semplice «coincidenza» isolata, ma con eventi che, grazie alla loro regolarità e riproducibilità, possono, in linea di principio, essere sottoposti a controlli intersoggettivi [5].

Qualsiasi fisico sperimentale conosce quegli «effetti» apparenti, sorprendenti e inesplicabili, che forse possono essere persino riprodotti in laboratorio alcune volte, ma che infine spariscono senza lasciar traccia. Naturalmente nessun fisico direbbe, in questo caso, di aver fatto una scoperta scientifica (anche se potrebbe tentar di ricostruire i suoi esperimenti in modo da far sí che l'effetto sia riproducibile). In realtà l'*effetto fisico* scientificamente significante può essere definito come quell'effetto che può essere riprodotto regolarmente da chiunque conduca a termine nel modo descritto l'esperimento appropriato. Nessun fisico serio farebbe oggetto di una pubblicazione, presentandolo come una scoperta scientifica, un simile «effetto occulto» (come propongo di chiamarlo); un effetto, cioè, per la cui riproduzione non potesse dare alcuna istruzione. La «scoperta» non sarebbe mai troppo presto respinta come chimerica, e questo semplicemente perché i tentativi per controllarla condurrebbero a risultati negativi [6]. (Ne consegue che la controversia se possano mai darsi eventi che in linea di principio sono unici ed

[5] Kant si rese conto che dall'esigenza dell'oggettività delle asserzioni scientifiche segue che esse devono poter essere sottoposte a controllo intersoggettivo in qualsiasi momento, e che pertanto devono avere la forma di leggi universali o di teorie. Egli formulò la sua scoperta in modo piuttosto oscuro nel «principio della successione temporale secondo la legge di causalità» (principio che egli credeva di poter provare *a priori* impiegando il ragionamento indicato qui). Io non postulo nessun principio del genere (cfr. § 12), ma sono d'accordo nel dire che le asserzioni scientifiche, dal momento che devono poter essere sottoposte a controlli intersoggettivi, devono sempre avere il carattere di ipotesi universali. * Cfr. anche § 22, nota *1.

[6] Nella letteratura della fisica si possono trovare alcuni casi, riferiti da seri ricercatori, dell'avverarsi di effetti che non poterono essere riprodotti perché controlli successivi condussero a risultati negativi. Un esempio ben noto di un caso del genere, avvenuto in tempi recenti, è il risultato positivo, rimasto inspiegato, dell'esperimento di Michelson osservato da Miller (1921-1926) a Mount Wilson, dopo che egli stesso, insieme con Morley, aveva riprodotto il risultato negativo di Michelson. Ma poiché prove successive diedero di nuovo risultati negativi, si è soliti considerare questi ultimi come de-

irripetibili non può essere decisa dalla scienza: sarebbe una controversia metafisica).

Possiamo ora ritornare su un punto a cui si è accennato nel paragrafo precedente: alla mia tesi che un'esperienza soggettiva, o un sentimento di convinzione, non può mai giustificare un'asserzione scientifica, e che all'interno della scienza tale sentimento non può avere parte alcuna, se non come oggetto di una ricerca empirica (psicologica). Per quanto intenso sia, un sentimento di convinzione non può mai giustificare un'asserzione. Di conseguenza posso essere profondamente convinto della verità di una asserzione, posso essere sicuro dell'evidenza delle mie percezioni; posso addirittura essere sommerso dall'intensità della mia esperienza: qualsiasi dubbio può sembrarmi assurdo. Ma può un'asserzione qualsiasi essere giustificata dal fatto che Karl R. Popper è profondamente convinto della sua verità? La risposta è «no»; e qualsiasi altra risposta sarebbe incompatibile con l'idea di oggettività scientifica. Neanche il fatto, per me cosí saldamente acquisito, che sto provando questo sentimento di convinzione, può comparire nel campo della scienza oggettiva se non sotto la forma di un'*ipotesi psicologica* la quale, naturalmente, richiede un controllo intersoggettivo: dalla congettura che io provo questo sentimento lo psicologo può dedurre, con l'aiuto di teorie psicologiche e di altro tipo, certe predizioni intorno al mio comportamento, e queste predizioni possono essere confermate o confutate nel corso di controlli sperimentali. Ma dal punto di vista epistemologico è assolutamente irrilevante se il mio sentimento di convinzione sia forte o debole; se provenga da una forte o addirittura irresistibile impressione di indubitabile certezza (o «autoevidenza») o semplicemente da una supposizione dubbia. Nulla di tutto ciò ha importanza ai fini della questione riguardante il modo in cui le asserzioni della scienza possono venire giustificate.

Considerazioni di questo genere non forniscono, naturalmente, una risposta al problema della base empirica; ma almeno ci aiutano a scorgerne la principale difficoltà. Quando

cisivi, e spiegare il risultato discordante di Miller dicendo che esso è «dovuto a fonti sconosciute di errore». * Cfr. anche § 22, specialmente la nota *1.

esigiamo l'oggettività sia delle asserzioni-base, sia delle altre asserzioni della scienza, ci priviamo di ogni mezzo logico col quale avremmo potuto sperare di ricondurre la verità delle asserzioni scientifiche alle nostre esperienze. Per di piú ci priviamo della possibilità di assegnare un qualsiasi status privilegiato alle asserzioni che rappresentano esperienze, come quelle asserzioni che descrivono le nostre percezioni (e che qualche volta chiamiamo «enunciati protocollari»). Esse possono presentarsi nella scienza soltanto come asserzioni psicologiche, vale a dire come ipotesi di un genere i cui standard di controllo intersoggettivo, considerato lo stato attuale della psicologia, non sono certamente molto alti.

Quale che possa essere la nostra risposta definitiva alla questione circa la base empirica, una cosa dev'essere chiara: se aderiamo alla richiesta secondo cui le asserzioni della scienza devono essere oggettive, allora quelle asserzioni che appartengono alla base empirica della scienza devono a loro volta essere oggettive, devono cioè poter essere sottoposte a controlli intersoggettivi. Tuttavia la controllabilità intersoggettiva implica sempre che dalle asserzioni che devono essere controllate si possano dedurre altre asserzioni controllabili. Cosí, se le asserzioni-base devono a loro volta poter essere sottoposte a controlli intersoggettivi, *non possono esserci, nella scienza, asserzioni definitive*: non possono esserci, nella scienza, asserzioni che non possano essere sottoposte a controllo, e perciò non può esserci asserzione che non possa essere confutata in linea di principio falsificando alcune delle conclusioni che se ne possono dedurre.

Arriviamo cosí al punto di vista seguente. I sistemi di teorie si controllano deducendo, da essi, asserzioni dotate di un livello di universalità piú basso. A loro volta queste asserzioni, che devono poter essere sottoposte a controlli intersoggettivi, devono poter essere controllate in maniera analoga, e cosí via all'infinito.

Si potrebbe pensare che questo punto di vista conduca ad un regresso infinito, e che perciò sia insostenibile. Nel § 1, criticando l'induzione, sollevai l'obiezione che essa poteva condurre a un regresso infinito: al lettore potrebbe ora sembrare che la stessa obiezione possa essere elevata contro quella procedura dei controlli deduttivi che io, per parte mia, difendo. Ma le cose non stanno cosí. Il metodo deduttivo dei controlli non può consolidare o giustificare le asserzioni che devono essere controllate, né è destinato a farlo. Non c'è dunque nessun pericolo di regresso infinito. Si deve tuttavia ammettere che la situazione sulla quale ho attirato l'attenzione – possibilità di controllare *ad infinitum*, e mancanza di asserzioni fondamentali che non hanno bisogno di essere controllate – crea un problema. È chiaro, infatti, che i controlli non si possono di fatto portare avanti all'infinito: presto o tardi dobbiamo arrestarci. Senza discutere questo problema in dettaglio, desidero soltanto far notare che il fatto che i controlli non possano andare avanti indefinitamente non urta contro la mia richiesta che ogni asserzione scientifica debba poter essere controllata. Io non esigo, infatti, che prima di essere accettata ogni asserzione scientifica *debba essere stata di fatto controllata.* Esigo soltanto che ciascuna asserzione di questo tipo sia *passibile* di essere controllata; o, in altre parole, mi rifiuto di accettare l'opinione secondo cui nella scienza ci sono asserzioni che dobbiamo rassegnarci ad accettare come vere, unicamente perché, per ragioni logiche, non sembra possibile controllarle.

Capitolo secondo
Il problema di una teoria del metodo scientifico

D'accordo con la proposta avanzata nel capitolo precedente, l'epistemologia, o dottrina della scoperta scientifica, dev'essere identificata con la teoria del metodo scientifico. La teoria del metodo, nella misura in cui va oltre l'analisi puramente logica delle relazioni sussistenti tra le asserzioni scientifiche, tratta *della scelta dei metodi* cioè delle decisioni sul modo in cui si devono trattare le asserzioni scientifiche. Naturalmente queste decisioni dipenderanno a loro volta dallo *scopo*, che scegliamo tra un certo numero di scopi possibili. La decisione che propongo qui, per stabilire regole appropriate per ciò che chiamo «metodo empirico», è strettamente connessa con il mio criterio di demarcazione: propongo di adottare regole tali che assicurino la controllabilità delle asserzioni scientifiche; in altre parole, regole tali da assicurare la loro falsificabilità.

9. *Perché le decisioni metodologiche sono indispensabili.*

Che cosa sono le regole del metodo scientifico, e perché ne abbiamo bisogno? Può esistere una teoria di tali regole, una metodologia?

Il modo in cui si risponde a queste questioni dipenderà in larga misura dal nostro atteggiamento nei confronti della scienza. Chi, come i positivisti, vede nella scienza empirica un sistema di asserzioni che soddisfano certi *criteri logici*, come la significanza o la verificabilità, darà un certo tipo di risposta. Una risposta molto differente sarà data da coloro che, come me, tendono a considerare come caratteristica differenziale delle asserzioni empiriche il fatto che esse sono suscettibili di revisione: il fatto, cioè, che possono essere criticate e soppiantate da altre migliori; e da coloro che ritengono sia loro compito analizzare la capacità, caratteristica della scienza, di progredire e la maniera caratteristica in cui, nei casi cruciali, si fa una scelta tra sistemi di teorie in conflitto fra loro.

Sono prontissimo ad ammettere la necessità di un'analisi puramente logica delle teorie, di un'analisi cioè che non tenga conto del modo in cui le teorie cambiano e si sviluppano. Ma questo genere di analisi non mette in chiaro quegli aspetti delle scienze empiriche che io, per parte mia, tengo in cosí alto conto. Un sistema come la meccanica classica può essere «scientifico» a qualsivoglia livello; ma coloro che lo sostengono in modo dogmatico, – e credono, magari, che sia loro dovere difendere dalle critiche un sistema cosí ben riuscito finché *la sua falsità non sia stata provata in maniera conclusiva* – adottano esattamente l'opposto di quell'atteggiamento critico che secondo me è l'unico veramente adatto a uno scienziato. Di fatto non si potrà mai produrre nessuna prova conclusiva della falsità di una teoria; infatti è sempre possibile dire che non ci si può fidare dei risultati sperimentali, o che le discrepanze che si afferma esistano tra i risultati sperimentali e le teorie sono soltanto apparenti e svaniranno col progredire della nostra comprensione. (Nella polemica contro Einstein entrambi questi argomenti furono spesso usati a sostegno della meccanica newtoniana, e argomenti simili abbondano nel campo delle scienze sociali). Se si insiste sulla prova rigorosa (o sulla rigorosa confutazione [*disproof*] [*1]) nelle scienze empiriche, non si trarranno mai benefici dall'esperienza e non si imparerà mai quanto si sia in torto.

Pertanto, se caratterizziamo la scienza empirica unicamente facendo ricorso alla struttura logica o formale delle sue asserzioni, non saremo in grado di escludere da essa quella forma predominante di metafisica che risulta dall'elevare al gra-

[*1] In questa edizione ho aggiunto al testo le parole tra parentesi «o rigorosa confutazione»: *a*) perché è chiaro che esse sono implicite in ciò che è detto immediatamente prima («non potrà mai essere prodotta nessuna prova conclusiva della falsità di una teoria») e, *b*), perché sono stato costantemente frainteso, come se sostenessi un criterio (e per di piú un criterio di *significato*, piuttosto che di *demarcazione*) basato sulla dottrina della falsificabilità «completa» o «conclusiva».

do di verità incontrovertibile una teoria scientifica sorpassata.

Queste sono le ragioni sulle quali si fonda la mia proposta secondo cui la scienza dovrebbe essere caratterizzata dai suoi metodi: dalla maniera con cui trattiamo i sistemi scientifici, da ciò che facciamo con essi e da ciò che facciamo ad essi. Pertanto tenterò di stabilire le regole, o, se si preferisce, le norme, che guidano lo scienziato impegnato nella ricerca o nella scoperta, nel senso inteso qui.

10. *L'approccio naturalistico alla teoria del metodo.*

L'accenno che ho fatto nel paragrafo precedente alla profonda differenza tra la mia posizione e quella dei positivisti dev'essere sviluppato.

Al positivista non va a genio l'idea che debbano esistere problemi significanti fuori dal campo della scienza empirica «positiva»: problemi che devono essere trattati mediante una vera e propria teoria filosofica. Non gli va a genio l'idea che debba esistere una vera e propria teoria della conoscenza, un'epistemologia o una metodologia [*1]. Vuol vedere, nei supposti problemi filosofici, meri «pseudo-problemi» o «enigmi». Ora questo suo desiderio – che tra l'altro il positivista non esprime come un desiderio o una proposta, ma piuttosto come la costatazione di uno stato di fatto [*2] – può sempre essere soddisfatto. Nulla infatti è piú facile che smascherare un problema come «insignificante» o come «pseudo». Basta stabilire un significato opportunamente ristretto di «significato»: di ogni questione scomoda si sarà presto costretti a dire che non si è in grado di trovare in essa un signi-

[*1] Nei due anni che precedettero la prima edizione di questo libro, la critica costantemente mossa alle mie idee dai membri del Circolo di Vienna era che una teoria del metodo che non sia né scienza empirica né logica pura è impossibile, perché ciò che sta fuori da questi due dominî è di necessità puro e semplice nonsenso. (Lo stesso punto di vista era ancora sostenuto da Wittgenstein nel 1948; cfr. il mio articolo *The Nature of Philosophical Problems*, in «The British Journal for the Philosophy of Science» 3, 1952, nota a p. 128). Piú tardi questa critica costante si ancorò nella leggenda secondo cui io avrei proposto di sostituire il criterio di verificabilità con un criterio di *significato*. Cfr. il *Postscript* cit., specialmente i §§ *19-*22.

[*2] Da allora alcuni positivisti hanno mutato il loro atteggiamento. Cfr. nota 6, piú sotto.

ficato. Inoltre se non si ammette come significante nulla che non rientri tra i problemi della scienza naturale[1], qualsiasi discussione intorno al concetto di «significato» si rivelerà a sua volta insignificante[2]. Una volta che sia stato insediato, il dogma del significato viene posto per sempre al di sopra della mischia. Non può piú essere attaccato. È diventato (secondo le parole dello stesso Wittgenstein) «inattaccabile e definitivo»[3].

La controversa questione se la filosofia esista, o se abbia un qualunque diritto ad esistere, è vecchia quasi quanto la filosofia stessa. Di tanto in tanto sorge un movimento filosofico interamente nuovo che smaschera definitivamente i vecchi problemi filosofici mostrando che sono pseudo-problemi, e contrappone il malvagio non-senso della filosofia al senso buono della scienza significante, positiva, empirica. E di tanto in tanto i disprezzati sostenitori della «filosofia tradizionale» tentano di spiegare ai condottieri dell'ultimo assalto positivistico che il problema principale della filosofia è l'analisi critica dell'appello all'autorità dell'«esperienza»[4], e precisamente di quell'esperienza che tutti i piú recenti scopritori del positivismo prendono ingenuamente come definitiva. A tali obiezioni, comunque, il positivista risponde limitandosi a scrollare le spalle: per lui non significano nulla, perché non appartengono alla scienza empirica, la quale, soltanto, è significante. Per lui l'«esperienza» è un programma, non un problema (a meno che non sia studiata dalla psicologia empirica).

Ritengo improbabile che i positivisti rispondano in modo diverso ai miei tentativi di analizzare l'«esperienza», che io interpreto come il metodo della scienza empirica. Infatti per loro esistono soltanto due tipi di asserzioni: le tautologie lo-

[1] WITTGENSTEIN, *Tractatus* cit., prop. 6.53.

[2] Al termine del *Tractatus* (dove spiega il concetto di significato), Wittgenstein scrive: «Le mie proposizioni illustrano cosí: colui che mi comprende, infine le riconosce insensate...», prop. 6.54. Cfr. SESTO EMPIRICO, *Adv. Log.*, ed. Loeb., II, 488.

[3] WITTGENSTEIN, *Tractatus* cit., alla fine della prefazione [p. 4].

[4] H. GOMPERZ, *Weltanschauungslehre* [La dottrina della visione del mondo], I, 1905, p. 35, scrive: «Se consideriamo quanto infinitamente problematico sia il concetto di *esperienza*... saremo costretti a credere che..., per quanto lo riguarda, le affermazioni entusiastiche sono meno appropriate... che non un atteggiamento critico estremamente accurato e guardingo...»

giche e le asserzioni empiriche. Se la metodologia non è logica, allora, concluderanno, dev'essere una branca di qualche scienza empirica, ad esempio della scienza del comportamento dello scienziato al lavoro.

Questo punto di vista, secondo il quale la metodologia è a sua volta una scienza empirica – lo studio del comportamento effettivo dello scienziato, o degli effettivi procedimenti della «scienza» – può essere descritto come un punto di vista «*naturalistico*». Senza dubbio una metodologia naturalistica (chiamata talvolta anche «teoria induttivistica della scienza»[5]) non è priva di valore. Uno studioso di logica della scienza può benissimo trarne motivi d'interesse e imparare qualcosa da essa. Tuttavia, quella che io chiamo «metodologia» non dev'essere scambiata per una scienza empirica. Io non credo che, usando i metodi della scienza, sia possibile decidere questioni controverse come quella se la scienza usi davvero un principio d'induzione o non lo usi. E i miei dubbi aumentano quando rammento che rimarrà sempre materia di convenzione o di decisione che cosa si debba chiamare «scienza» e chi si debba chiamare «scienziato».

Io credo che le questioni di questo genere dovrebbero essere trattate in un modo diverso. Per esempio, possiamo prendere in considerazione e paragonare tra loro due differenti sistemi di regole metodologiche: l'uno fornito e l'altro sfornito di un principio d'induzione. E possiamo poi esaminare se tale principio, una volta introdotto, possa essere applicato senza dare origine a contraddizioni; se ci sia di qualche aiuto, e se ne abbiamo realmente bisogno. Proprio questo genere di ricerca mi persuade a fare a meno del principio di induzione; non perché di fatto tale principio non venga mai usato nella scienza, ma perché penso che non sia indispensabile; che non ci sia d'aiuto, e, addirittura, che dia origine a contraddizioni.

Respingo pertanto il punto di vista naturalistico. È un punto di vista acritico. I suoi sostenitori non riescono ad accorgersi che, ogni qualvolta credono di aver scoperto un fat-

[5] H. DINGLER, *Physik und Hypothesis. Versuch einer induktiven Wissenschaftslehre* [Fisica e ipotesi. Tentativo di una dottrina induttivistica della scienza], 1921. Analogamente: KRAFT, *Die Grundformen der wissenschaftlichen Methoden* cit.

to, si sono limitati a proporre una convenzione[6]. Nulla di piú facile che la convenzione si trasformi in un dogma. Questa critica del punto di vista naturalistico vale non soltanto per il criterio di significato che esso usa, ma anche per la sua idea di scienza, e, di conseguenza, per la sua idea di metodo empirico.

11. *Le regole metodologiche come convenzioni.*

In questo libro le regole metodologiche sono considerate *convenzioni*. Potrebbero essere descritte come le regole del giuoco della scienza empirica. Differiscono dalle regole della logica pura quasi quanto ne differiscono le regole degli scacchi, che pochi considererebbero come facenti parte della logica *pura*: considerando che le regole della logica pura governano le trasformazioni delle formule linguistiche, il risultato di un'indagine sulle regole degli scacchi potrebbe forse essere intitolato «La logica degli scacchi», ma ben difficilmente «Logica», puramente e semplicemente. (Analogamente, il risultato di un'indagine che abbia per oggetto il giuoco della scienza – o meglio, della scoperta scientifica – può essere intitolato «La logica della scoperta scientifica»).

Si possono dare due semplici esempi di regole metodologiche. Essi saranno sufficienti a mostrare che ben difficilmente sarebbe corretto porre un'indagine sul metodo sullo stesso livello di una ricerca puramente logica.

1) Il giuoco della scienza è, in linea di principio, senza fine. Chi, un bel giorno, decide che le asserzioni scienti-

[6] (Aggiunta fatta nel 1934, mentre questo libro era in bozze:) Ho sostenuto per anni il punto di vista, qui delineato schematicamente, secondo cui è materia di decisione che cosa si debba chiamare «asserzione genuina» e che cosa si debba chiamare «asserzione significante». (E ho anche sostenuto per anni il punto di vista che l'esclusione della metafisica è egualmente materia di decisione). In ogni modo la mia attuale critica al positivismo (e al punto di vista naturalistico) non si applica piú, per quanto posso vedere, alla *Logische Syntax der Sprache* di Carnap (1934), in cui egli pure adotta il punto di vista secondo cui tutte le questioni di questo tipo riposano su decisioni (il «principio di tolleranza»). Stando alla prefazione di Carnap, Wittgenstein ha proposto per anni un punto di vista simile a questo nelle sue opere inedite. (* Si veda, comunque, la nota *1, piú sopra). La *Logische Syntax* di Carnap fu pubblicata mentre questo libro era in bozze. Mi dispiace di non essere riuscito a discuterla nel testo.

fiche non hanno piú bisogno di nessun controllo, e si possono ritenere verificate definitivamente, si ritira dal giuoco.

2) Una volta che un'ipotesi sia stata proposta e controllata, e abbia provato il suo valore [*1], non dovrebbe piú, senza una «buona ragione», poter scomparire dal posto che occupa. Una «buona ragione» può essere, per esempio, la sostituzione all'ipotesi di un'altra ipotesi meglio controllabile, o la falsificazione di una delle conseguenze dell'ipotesi. (Il concetto «meglio controllabile» sarà analizzato piú ampiamente in seguito).

Questi due esempi mostrano qual è l'aspetto delle regole metodologiche. È chiaro che sono molto diverse dalle regole che di solito vengono chiamate «logiche». Sebbene la logica possa, forse, stabilire i criteri per decidere se un'asserzione è controllabile, essa certamente non si occupa della questione se un qualsiasi scienziato si sforzi di controllarla.

Nel § 6 tentai di definire la scienza empirica con l'aiuto del criterio di falsificabilità, ma, essendo stato costretto ad ammettere la giustezza di certe obiezioni, promisi di dare alla mia definizione un supplemento metodologico. Proprio come il giuoco degli scacchi può essere definito mediante il ricorso alle regole che gli sono proprie, cosí la scienza empirica può essere definita per mezzo delle sue regole metodologiche. Nello stabilire queste regole possiamo procedere sistematicamente. In primo luogo si formula una regola suprema che serve come una specie di norma per decidere sulle regole rimanenti, e che è dunque una regola di tipo superiore. È la regola che le altre regole del procedimento scientifico devono essere progettate in modo tale da non proteggere dalla falsificazione nessuna asserzione della scienza.

Le regole metodologiche sono dunque strettamente connesse sia con altre regole metodologiche sia con il nostro criterio di demarcazione. Ma la connessione non è una connessione strettamente deduttiva o logica [1]. Essa risulta, piuttosto, dal fatto che le regole sono costruite allo scopo di assicu-

[*1] Per quanto riguarda la traduzione «provare il proprio valore» per *sich bewähren* si veda la nota all'inizio del capitolo X.

[1] K. MENGER, *Moral, Wille und Weltgestaltung* [Morale, volontà e struttura del mondo], 1934, pp. 58 sgg.

rare l'applicabilità del nostro criterio di demarcazione; pertanto la loro formulazione e la loro accettazione procedono in conformità con una regola pratica di tipo superiore. Un esempio di ciò è stato dato a pagina 37 (cfr. la regola 1): le teorie che decidiamo di non sottoporre a nessun controllo ulteriore non saranno piú falsificabili. Proprio questa connessione sistematica tra le regole rende appropriato il parlare di una *teoria* del metodo. Dobbiamo ammettere che la maggior parte delle dichiarazioni di questa teoria sono, come mostra il nostro esempio, convenzioni di un genere piuttosto ovvio. Dalla metodologia non ci si devono aspettare verità profonde [*2]. Nondimeno in molti casi essa può aiutarci a chiarificare la situazione logica, ed anche a risolvere alcuni problemi di ampia portata che finora non si sono rivelati suscettibili di essere trattati. Uno di questi, per esempio, è il problema di decidere quando un'asserzione probabilistica debba essere accettata o rigettata. (Cfr. § 68).

Spesso si è messo in dubbio se i vari problemi della teoria della conoscenza stiano in qualche relazione sistematica l'uno con l'altro, e anche se possano essere trattati sistematicamente. In questo libro spero di mostrare che tali dubbi sono ingiustificati. Questo punto non è privo di importanza. La sola ragione che ho per proporre il mio criterio di demarcazione è che esso è fruttuoso, e che col suo aiuto è possibile chiarificare e spiegare una gran quantità di punti controversi. «Le definizioni sono dogmi; soltanto le conclusioni che se ne traggono possono fornirci visioni nuove e penetranti», dice Menger [2]. Questo è certamente vero della definizione del concetto di «scienza». Soltanto dalle conseguenze della mia definizione di scienza empirica, e dalle decisioni metodologiche che dipendono da questa definizione, lo scienziato sarà in grado di vedere fino a qual punto essa si conformi alla sua idea intuitiva della meta verso la quale tendono i suoi sforzi [*3].

[*2] Sono ancora propenso a sostenere qualcosa di simile anche se teoremi quali «*grado di corroborazione* ≠ *probabilità*» o il mio «teorema sul contenuto di verità» (si veda il *Festschrift* in onore di Feigl: *Mind, Matter, and Method* [Spirito, materia e metodo], a cura di P. K. Feyerabend e G. Maxwell, 1966, pp. 343-53) sono forse inaspettati e non del tutto in superficie.

[2] K. MENGER, *Dimensionstheorie* [Teoria della dimensione], 1928, p. 76.

[*3] Cfr. anche il § *15, intitolato: «Lo scopo della scienza» del mio *Postscript* cit.

Anche il filosofo accetterà la mia definizione come utile soltanto se potrà accettarne le conseguenze. Dobbiamo convincerlo che queste conseguenze ci mettono in grado di captare, nelle piú antiche teorie della conoscenza, incoerenze e inadeguatezze e di ricondurle alle assunzioni fondamentali e alle convenzioni dalle quali traggono la loro origine. Ma dobbiamo anche convincerlo che le nostre proposte non sono minacciate dallo stesso genere di difficoltà. Questo metodo per scoprire e risolvere le contraddizioni viene applicato anche all'interno della scienza stessa, ma riveste un'importanza particolare per la teoria della conoscenza. È grazie a questo metodo, ammesso che ci sia un metodo, che le convenzioni metodologiche possono essere giustificate e possono provare il loro valore[3].

È estremamente dubbio, temo, che i filosofi vogliano considerare queste indagini metodologiche come appartenenti alla filosofia, ma, per la verità, la cosa non ha troppa importanza. Tuttavia può valer la pena menzionare, a questo proposito, che non poche dottrine metafisiche, e dunque senza dubbio filosofiche, potrebbero essere interpretate come ipostatizzazioni di regole metodologiche. Un esempio di questo fatto sarà discusso nel paragrafo successivo, sotto forma di quello che si chiama «principio di causalità». Un altro esempio, che abbiamo già incontrato, è il problema dell'oggettività. Infatti la richiesta di oggettività scientifica può anche essere interpretata come una regola metodologica: la regola secondo cui nella scienza possono essere introdotte soltanto asserzioni tali da poter essere controllate intersoggettivamente (vedi i §§ 8, 20, 27 e altrove). In realtà si potrebbe dire che la maggior parte dei problemi di filosofia teoretica, e i piú interessanti fra questi problemi, possono essere reinterpretati, in questo modo, come problemi di metodo.

[3] In quest'opera ho relegato in un posto di secondo piano il metodo critico – o, se si vuole, «dialettico» – per risolvere le contraddizioni, poiché mi sono occupato del tentativo di sviluppare gli aspetti metodologici pratici dei miei punti di vista. In un'opera non ancora pubblicata ho tentato di seguire la strada critica; e ho tentato di dimostrare che i problemi della teoria della conoscenza classica e moderna (da Hume, attraverso Kant, fino a Russell e a Whitehead) si possono far risalire al problema della demarcazione, cioè al problema di trovare il criterio del carattere empirico della scienza.

Parte seconda

Alcune componenti strutturali di una teoria dell'esperienza

Capitolo terzo

Le teorie

Le scienze empiriche sono sistemi di teorie. La logica della conoscenza scientifica può pertanto essere descritta come una teoria delle teorie.

Le teorie scientifiche sono asserzioni universali. Come tutte le rappresentazioni linguistiche, sono sistemi di segni o simboli. Non credo, dunque, che sia utile esprimere la differenza fra teorie universali e asserzioni singolari dicendo che queste ultime sono «concrete», mentre le teorie sono *semplicemente* formule simboliche o schemi simbolici; perché anche delle asserzioni piú «concrete» possiamo dire esattamente la medesima cosa [*1].

Le teorie sono reti gettate per catturare quello che noi chiamiamo «il mondo»: per razionalizzarlo, per spiegarlo, per dominarlo. Ci sforziamo di rendere la trama sempre piú sottile.

[*1] Questa è un'allusione critica a una concezione che dovevo in seguito descrivere come «strumentalismo» e che fu rappresentata, a Vienna, da Mach, Wittgenstein e Schlick (cfr. § 4, note *4 e 7 e § 27, nota 5). Si tratta della concezione secondo cui una teoria non è *null'altro che* uno strumento per far predizioni. Ho analizzato e criticato questa teoria nei miei scritti *A Note on Berkeley as a Precursor of Mach* cit., pp. 26 sgg.; *Three Views Concerning Human Knowledge* cit., pp. 355 sgg.; e piú ampiamente nel mio *Postscript*, §§ *11-*15 e *19-*26. In breve, il mio punto di vista è che il nostro linguaggio ordinario è pieno di teorie; che l'osservazione è sempre *osservazione alla luce delle teorie* e che soltanto il pregiudizio induttivistico può farci pensare che possa esistere un linguaggio dei fenomeni, privo di teorie e distinguibile da un «linguaggio teorico»; e, infine, che il teorico è interessato alla spiegazione come tale, cioè a dire alle teorie esplicative che possono essere controllate: le applicazioni e le predizioni lo interessano soltanto per ragioni teoriche; lo interessano perché possono essere usate come *controlli* delle teorie. Si veda anche la nuova appendice *x.

12. *Causalità, spiegazione e deduzione di predizioni.*

Dare una *spiegazione causale* di un evento significa dedurre un'asserzione che lo descrive, usando come premesse della deduzione una o piú *leggi universali*, insieme con alcune asserzioni singolari dette *condizioni iniziali*. Per esempio, possiamo dire di aver dato una spiegazione causale della rottura di un certo pezzo di filo se abbiamo trovato che il filo ha una resistenza alla trazione di ½ kg, ed è stato caricato con un peso di 1 kg. Se analizziamo questa spiegazione causale, troveremo che consta di diverse parti costituenti. Da una parte abbiamo l'ipotesi: «Un filo si rompe tutte le volte che viene caricato con un peso che supera il peso che definisce la resistenza alla trazione di quel filo», e questa è un'asserzione che ha il carattere di una legge universale di natura. Dall'altra parte abbiamo certe asserzioni singolari (in questo caso due) che sono vere soltanto per l'evento specifico in questione: «Il carico di rottura di questo filo è ½ kg», e: «Il peso con cui è stato caricato questo filo è 1 kg» [*1].

Abbiamo cosí due differenti tipi di asserzioni che sono entrambe ingredienti necessari di una spiegazione causale completa. Esse sono: 1) *asserzioni universali*: cioè ipotesi che hanno il carattere di leggi di natura e 2) *asserzioni singolari*, che valgono per l'evento specifico in questione e che chiamerò «condizioni iniziali». Dalle asserzioni universali, insieme con le condizioni iniziali, *deduciamo* l'asserzione singolare: «Questo filo si romperà». Diciamo che quest'asserzione è una *predizione* specifica, o singolare [*2].

Le condizioni iniziali descrivono quella che di solito si

[*1] Un'analisi piú chiara di quest'esempio, che fa distinzione tanto fra *due* leggi quanto fra due condizioni iniziali, sarebbe la seguente: «Per ogni filo di una data struttura S (determinata dal materiale di cui è costituito, dallo spessore, ecc.) esiste un peso caratteristico w, tale che il filo si spezzerà per ogni peso superiore a w che venga sospeso ad esso». «Per ogni filo di struttura S_1 il peso caratteristico w_1 è eguale a ½ kg». Queste sono le due leggi universali. Le due condizioni iniziali sono: «Questo è un filo di struttura S_1» e «Il peso da mettere su questo filo è eguale a 1 kg».

[*2] Il termine «predizione», come viene usato qui, comprende asserzioni intorno al passato («retrodizioni») o anche asserzioni «date» che desideriamo spiegare («*explicanda*»). Si veda il mio *Poverty of Historicism* cit., p. 133 dell'edizione del 1957, e il *Postscript* cit., § *15.

chiama la «*causa*» dell'evento in questione. (Il fatto che un filo, che ha una resistenza alla trazione di ½ kg, sia stato caricato con un peso di 1 kg è la «causa» della rottura del filo). E la predizione descrive quello che di solito viene chiamato l'«*effetto*». Eviterò questi due termini. In fisica l'uso dell'espressione «*spiegazione causale*» è limitato, di regola, al caso speciale in cui le leggi di natura hanno la forma di leggi di «azione a contatto», o, piú precisamente, di *azione a distanza che tende a zero*, espresse da equazioni differenziali. Qui non assumeremo questa limitazione. Inoltre, non farò nessun'asserzione generale riguardante l'applicabilità universale di questo metodo deduttivo di spiegazione teorica. Pertanto non asserirò nessun «*principio di causalità*» (o «principio di causazione universale»).

Il «principio di causalità» è l'asserzione che un qualsiasi evento *può* essere spiegato causalmente: *può* essere predetto sulla base di una deduzione. L'asserzione sarà tautologica (analitica) o verterà sulla realtà (sarà sintetica), secondo il modo in cui, in quest'asserzione, si interpreterà la parola «può». Infatti, se «può» significa che è sempre logicamente possibile costruire una spiegazione causale, allora l'asserzione è tautologica, perché, data una qualsiasi predizione, possiamo sempre trovare asserzioni e condizioni iniziali dalle quali è possibile derivare la predizione. (Se queste asserzioni universali siano state controllate e corroborate in altri casi è naturalmente tutt'altra questione). Se però si intende che «può» significhi che il mondo è governato da leggi rigorose, ed è costruito in modo che ogni evento specifico rappresenti il caso particolare di una regolarità, o di una legge universale, allora l'asserzione è chiaramente sintetica. Ma in questo caso, come vedremo nel § 78, *non* è *falsificabile*. Pertanto non adotterò né respingerò il «principio di causalità», accontentandomi semplicemente di escluderlo dalla sfera della scienza come «metafisico».

In ogni modo, proporrò una regola metodologica che corrisponde cosí strettamente al «principio di causalità» che quest'ultimo potrebbe essere considerato come la versione metafisica di detta regola. Si tratta della semplice regola secondo la quale non dobbiamo abbandonare la ricerca di leggi universali e di sistemi coerenti di teorie, né dobbiamo rinunciare ai nostri tentativi di spiegare causalmente qualunque tipo di evento che siamo in grado di descrivere[1]. Questa regola guida il lavoro del ricercatore scientifico. In questo libro non accettiamo il punto di vista secondo cui i piú recenti sviluppi della fisica esigono la rinuncia a questa regola, o secondo cui la fisica ha oggi stabilito che almeno all'interno di un singolo campo non ha alcuna importanza l'andare ancora alla ricerca di leggi[2]. Quest'argomento sarà discusso nel § 78[*3].

13. *Universalità stretta e universalità numerica.*

Possiamo distinguere tra due tipi di asserzioni universali sintetiche: le asserzioni «strettamente universali» e le asserzioni «numericamente universali». Fin qui, parlando di asserzioni universali – di teorie o di leggi di natura – ho avuto

[1] L'idea di considerare il principio di causalità come espressione di una regola o di una decisione è dovuta a H. GOMPERZ, *Das Problem der Willensfreiheit* [Il problema del libero arbitrio], 1907. Cfr. SCHLICK, *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik* [La causalità nella fisica moderna], in «Naturwissenschaften», 19 (1931), p. 154.

* Penso di dover dire qui, piú esplicitamente, che la decisione di andare alla ricerca di una spiegazione causale è ciò per cui lo scienziato teorico si propone il proprio scopo: lo scopo della scienza teorica. Il suo scopo è trovare *teorie esplicative* (e, se è possibile, teorie esplicative *vere*), cioè a dire teorie che descrivano certe proprietà strutturali del mondo e che ci permettano di dedurre, con l'aiuto delle condizioni iniziali, gli effetti da spiegare. Scopo di questo paragrafo era spiegare, anche se soltanto molto brevemente, ciò che intendiamo parlando di spiegazione causale. Una formulazione un po' piú completa si troverà nell'appendice *X e nel *Postscript* cit., § *15. La mia spiegazione della spiegazione è stata adottata da certi positivisti, o «strumentalisti», che videro in essa un tentativo di liquidarla, spiegandola come l'asserzione che le teorie esplicative *non sono altro che* premesse per dedurre predizioni. Desidero perciò che sia ben chiaro che io considero l'interesse del teorico per la *spiegazione*, cioè, per la scoperta di teorie esplicative, come irriducibile all'interesse di ordine pratico-tecnologico per la deduzione di predizioni. L'interesse del teorico per le *predizioni*, d'altro canto, si può spiegare dicendo che è dovuto al suo interesse per il problema se le teorie che ha formulato siano vere; o, in altre parole, che è dovuto all'interesse per il controllo delle proprie teorie, per il tentar di scoprire se non si possa mostrare che esse sono false. Cfr. anche appendice *X, nota 4, e il testo relativo.

[2] Il punto di vista a cui mi oppongo qui è sostenuto, tra gli altri, da Schlick; egli scrive (*Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik* cit., p. 155): «... questa impossibilità» (sta parlando dell'impossibilità di predizioni esatte, sostenuta da Heisenberg) «... significa che è impossibile *andare alla ricerca di* quella formula». (Cfr. anche § 78, nota 1).

[*3] Ma ora vedi anche i capp. *IV-*VI del mio *Postscript* cit.

in mente le *asserzioni strettamente universali*. Le asserzioni appartenenti all'altro tipo, quelle cioè numericamente universali, sono, in realtà, equivalenti a certe asserzioni singolari o a congiunzioni di asserzioni singolari e saranno qui classificate tra le asserzioni singolari.

Si confrontino, per esempio, le due asserzioni seguenti: *a*) Per tutti gli oscillatori armonici è vero che la loro energia non cade mai al disotto di una certa quantità (cioè: $h\nu/2$); e *b*) Per tutti gli esseri umani ora viventi sulla terra è vero che la loro altezza non supera mai una certa misura (poniamo 2,40 m). La logica formale (compresa la logica simbolica) che si occupa soltanto della teoria della deduzione, tratta queste due asserzioni nel medesimo modo, come asserzioni universali (implicazioni «formali» o «generali»)[1]. Io penso invece che sia necessario accentuare la differenza fra di esse. L'asserzione *a*) pretende di essere vera in ogni luogo e in ogni tempo. L'asserzione *b*) si riferisce soltanto a una classe finita di elementi specifici, limitata a una regione spazio-temporale individuale (o particolare). Asserzioni di quest'ultimo tipo possono, in linea di principio, essere sostituite da una congiunzione di asserzioni singolari; infatti, dato un tempo sufficientemente lungo, si possono *enumerare* tutti gli elementi della classe finita presa in considerazione. È questa la ragione per cui, in casi come questo, parliamo di «universalità numerica». Per contro, l'asserzione *a*) sugli oscillatori non può essere sostituita dalla congiunzione di un numero finito di asserzioni singolari su una regione spazio-temporale definita; o, piuttosto, potrebbe essere sostituita da questa congiunzione soltanto se si assumesse che il mondo è limitato nel tempo e nello spazio e che in esso esiste soltanto un numero finito di oscillatori. Ma noi non facciamo nessun'as-

[1] La logica classica (e similmente la logica simbolica o «logistica») fa distinzione tra asserzioni universali, particolari e singolari. Un'asserzione universale è un'asserzione che si riferisce a tutti gli elementi di qualche classe; un'asserzione particolare si riferisce a qualcuno dei suoi elementi; un'asserzione singolare è un'asserzione che si riferisce a un elemento dato, a un individuo. Questa classificazione non è basata su ragioni connesse con la logica della conoscenza. Essa fu sviluppata avendo di mira la tecnica dell'inferenza. Non possiamo perciò identificare le nostre «asserzioni universali» né con le asserzioni universali della logica classica né con le implicazioni «generali» o «formali» della logistica (cfr. § 14, nota 6). * Cfr. ora anche l'appendice *x e il *Postscript* cit., specialmente il § *15.

sunzione di questo genere; in particolare, non ne facciamo quando definiamo i concetti della fisica. Piuttosto, consideriamo un'asserzione del genere di *a)* come un'*asserzione-tutti*, cioè come un'asserzione universale intorno a un numero illimitato di individui. È chiaro che, interpretata in questo modo, non può essere sostituita dalla congiunzione di un numero finito di asserzioni singolari.

L'uso che io faccio del concetto di asserzione strettamente universale (o «asserzione-tutti»), si contrappone al punto di vista secondo cui ogni asserzione sintetica universale deve essere in linea di principio traducibile in una congiunzione di un numero finito di asserzioni singolari. Coloro che adottano questo punto di vista [2] insistono nel dire che quelle che io chiamo «asserzioni strettamente universali» non possono mai essere verificate, e pertanto le respingono facendo riferimento al criterio di significato, che esige la verificabilità, o a qualche altra considerazione del genere.

È chiaro che se si parte da una siffatta concezione delle leggi di natura, che oblitera la distinzione tra asserzioni singolari e asserzioni universali, il problema dell'induzione può sembrare risolto; è infatti ovvio che le inferenze da asserzioni singolari ad asserzioni che sono universali soltanto numericamente può essere perfettamente ammissibile. Ma è altrettanto chiaro che il problema metodologico dell'induzione non risulta modificato da questa soluzione. Infatti la verificazione di una legge di natura può essere fatta soltanto empiricamente, accertando ogni singolo evento al quale la legge può applicarsi, e trovando che ogni evento siffatto si conforma effettivamente alla legge; ed è chiaro che si tratta di un compito impossibile.

In ogni caso, la questione se le leggi della scienza siano strettamente o numericamente universali non può essere risolta in base al semplice ragionamento. Si tratta di una di quelle questioni che possono essere risolte soltanto sulla base di un accordo o di una convenzione. E dal punto di vista della situazione metodologica alla quale abbiamo fatto riferimento or ora, io ritengo utile e fruttuoso il considerare le

[2] Cfr. per esempio F. KAUFMANN, *Bemerkungen zum Grundlagenstreit in Logik und Mathematik* [Osservazioni a proposito della disputa sui fondamenti in logica e in matematica], in «Erkenntnis», 2 (1931), p. 274.

leggi naturali come asserzioni sintetiche e strettamente universali («asserzioni-tutti»). Ciò equivale a considerarle come asserzioni non-verificabili che possono essere messe nella forma «Di tutti i punti nello spazio e nel tempo (o in tutte le regioni dello spazio e del tempo) è vero che...» Per contro, chiamo «specifiche» o «singolari» quelle asserzioni che si riferiscono soltanto a certe regioni finite dello spazio e del tempo.

La distinzione tra asserzioni strettamente universali e asserzioni universali soltanto numericamente (che, in realtà, sono solo un genere di asserzioni singolari) sarà applicata soltanto alle asserzioni sintetiche. Posso comunque menzionare la possibilità di applicare questa distinzione anche alle asserzioni analitiche (per esempio, a certe asserzioni matematiche)[3].

14. *Concetti universali e concetti individuali.*

La distinzione tra *asserzioni* universali e asserzioni singolari è strettamente connessa con quella tra *concetti universali e concetti individuali, o nomi.*

Si è soliti illustrare questa distinzione con l'aiuto di esempi del tipo seguente: «dittatore», «pianeta», «H_2O» sono concetti, o nomi, universali. «Napoleone», «la Terra», «l'Atlantico» sono concetti, o nomi, singolari o individuali. In questi esempi sembra che i concetti o nomi individuali siano caratterizzati dall'essere nomi propri o dal dover essere definiti per mezzo di nomi propri, mentre i nomi o concetti universali possono essere definiti senza l'uso dei nomi propri.

Considero di importanza fondamentale la distinzione tra concetti o nomi universali e concetti o nomi individuali. Ogni applicazione della scienza è basata su un'inferenza da ipotesi scientifiche (che sono universali) a casi singolari; cioè su una deduzione di predizioni singolari. Ma in ogni asserzione singolare devono comparire nomi o concetti individuali.

[3] Esempi: *a*) Ogni numero naturale ha un successore. *b*) Se si eccettuano i numeri 11, 13, 17 e 19, tutti i numeri tra 10 e 20 ammettono un divisore.

I nomi individuali che si trovano nelle asserzioni singolari della scienza compaiono spesso sotto forma di coordinate spazio-temporali. Ciò si comprende facilmente se si considera che l'*applicazione* di un sistema spazio-temporale di coordinate implica sempre il riferimento a nomi individuali. Infatti dobbiamo fissare un punto d'origine, e questo si può fare soltanto facendo uso di nomi propri (o dei loro equivalenti). L'uso dei nomi «Greenwich» e «L'anno della nascita di Cristo» illustra quello che intendo. Grazie a questo metodo è possibile ridurre un numero grande quanto si voglia di nomi individuali a un numero molto piccolo [1].

Espressioni vaghe e generiche, come «questa cosa qui», «quella cosa là», e via discorrendo, si possono usare, qualche volta, come nomi individuali, magari accompagnandole con gesti ostensivi di qualche specie; in breve, possiamo usare segni che non sono nomi propri ma che sono, entro certi limiti, interscambiabili con nomi propri o con coordinate individuali. Ma anche i concetti universali possono essere indicati, sia pure in modo vago, per mezzo di gesti ostensivi. Cosí, possiamo indicare certe cose individuali (o eventi individuali) e poi esprimere per mezzo di una frase come «e altre cose simili» (o «e cosí via») la nostra intenzione di considerare questi individui soltanto come i rappresentanti di qualche classe alla quale si dovrebbe, propriamente, dare un nome universale. Non può esserci alcun dubbio che *impariamo l'uso di parole universali*, cioè la loro *applicazione* agli individui, grazie a gesti ostensivi e a mezzi di questo tipo. La base logica delle applicazioni di questo genere è che i concetti individuali possono essere concetti non soltanto di elementi, ma anche di classi, e che pertanto possono stare con i concetti universali non soltanto in una relazione corrispondente a quella di elemento a classe, ma anche in una relazione corrispondente a quella di sottoclasse a classe. Per esempio, il mio cane Lux non è soltanto un elemento della classe dei cani viennesi, che è un concetto individuale, ma anche un ele-

[1] Ma le unità di misura del sistema di coordinate che in un primo tempo furono anche definite mediante nomi individuali (la rotazione della Terra, il metro campione di Parigi) possono essere definite, in linea di principio, mediante nomi universali: per esempio, mediante la lunghezza d'onda o la frequenza della luce monocromatica emessa da un certo tipo di atomi trattati in un certo modo.

mento della classe (universale) dei mammiferi, che è un concetto universale. E a loro volta i cani viennesi non sono soltanto una sottoclasse della classe (individuale) dei cani austriaci, ma anche una sottoclasse della classe (universale) dei mammiferi.

L'uso della parola «mammiferi» come esempio di nome universale può forse causare fraintendimenti. Infatti, nel loro uso ordinario, parole come «mammifero», «cane», ecc., non sono esenti da ambiguità. Se queste parole debbano essere considerate come nomi individuali di classe o come nomi universali di classe, dipende dalle nostre intenzioni: da esse dipende se desideriamo parlare di una razza di animali viventi sul nostro pianeta (di un concetto individuale) o di un genere di corpi fisici dotati di proprietà che possono essere descritte in termini universali. Ambiguità simili sorgono in connessione con l'uso di concetti come «pastorizzato», «sistema di Linneo», e «latinismo», nella misura in cui è possibile eliminare i nomi propri a cui essi alludono (o, altrimenti, definirli con l'aiuto di questi nomi propri) *[1].

Gli esempi forniti piú sopra, e le relative spiegazioni, dovrebbero chiarire che cosa si intenderà, qui, con «concetti universali» e «concetti individuali». Se mi chiedessero di definirli, dovrei dire, con ogni probabilità, come ho detto sopra: «Un concetto individuale è un concetto alla cui definizione sono indispensabili nomi propri (o segni equivalenti). Se è possibile eliminare completamente qualsiasi riferimento a nomi propri, allora il concetto è un concetto universale». Tuttavia qualsiasi definizione del genere avrebbe ben poco valore, poiché essa non fa altro che ridurre l'idea di concetto, o nome, individuale a quella di nome proprio (nel senso di un oggetto fisico individuale).

Credo che il mio uso corrisponda piuttosto da vicino all'uso ordinario delle espressioni «universale» e «individuale». Ma sia o non sia questo il caso, è certo che considero la distinzione fatta qui indispensabile quando non si voglia obliterare la distinzione corrispondente, tra asserzioni universali

*[1] «Pastorizzato» può essere definito, o come «trattato secondo le indicazioni di Luigi Pasteur» (o qualcosa di simile), o anche come «riscaldato alla temperatura di 80 gradi centigradi e mantenuto a questa temperatura per dieci minuti». La prima definizione fa di «pastorizzato» un concetto individuale; la seconda ne fa un concetto universale. Ma cfr. anche la nota 4.

e asserzioni singolari. (Esiste una perfetta analogia tra il problema degli universali e il problema dell'induzione). Il tentativo di identificare un oggetto individuale *unicamente* per mezzo delle sue proprietà e delle sue relazioni universali che sembrano appartenere soltanto ad esso e a nient'altro, è destinato al fallimento. Un procedimento di questo genere non descriverebbe un oggetto individuale singolo, ma la classe universale di tutti quegli individui a cui appartengono queste proprietà e relazioni. Anche l'uso di un sistema universale spazio-temporale di coordinate, non cambierebbe nulla [2]. Infatti, rimarrà sempre aperta la questione se esistano cose individuali che corrispondano a una descrizione fatta per mezzo di nomi universali e, posto che esistano, quante siano.

Allo stesso modo, qualsiasi tentativo di definire i nomi universali con l'aiuto di nomi individuali è destinato a fallire. Questo fatto è stato spesso trascurato ed è largamente diffusa la credenza che sia possibile, mediante un processo chiamato «astrazione», sollevarsi da concetti individuali a concetti universali. Questo punto di vista è parente stretto della logica induttiva, col suo passaggio da asserzioni singolari ad asserzioni universali. Questi due procedimenti sono egualmente impraticabili dalla logica [3]. È vero che in questo modo è possibile ottenere classi di individui, ma queste classi saranno ancora concetti individuali, concetti definiti con l'aiuto di nomi propri. (Esempi di tali concetti-classe individuali sono «i generali di Napoleone» e «gli abitanti di Parigi»). Vediamo cosí che la mia distinzione tra nomi e concetti universali, e nomi e concetti individuali, non ha nulla da spartire con la distinzione tra classi ed elementi delle classi. Sia i nomi universali, sia i nomi individuali, possono presentarsi come nomi di qualche classe, e anche come i nomi degli elementi di qualche classe.

È dunque impossibile abolire la distinzione tra concetti individuali e concetti universali con ragionamenti simili a questo di Carnap: «... questa distinzione non è giustificata»,

[2] Non «spazio e tempo» in generale, ma determinazioni individuali (spaziali, temporali, o di altro genere) basate su nomi propri, sono «princípî d'individuazione».

[3] Analogamente, il «metodo dell'astrazione» usato in logica simbolica non è in grado di compiere il passaggio dai nomi individuali ai nomi universali. Se la classe definita per astrazione è definita estensionalmente con l'aiuto di nomi individuali, allora è, a sua volta, un concetto individuale.

egli dice, perché «... ogni concetto può essere considerato come un concetto individuale o universale, secondo il punto di vista adottato». Carnap tenta di sostenere la sua argomentazione asserendo «... che (quasi) *tutti i cosiddetti concetti individuali sono* (nomi di) *classi*, proprio come i concetti universali» [4]. Quest'ultima asserzione è perfettamente corretta, come ho mostrato, ma non ha nulla da fare con la distinzione in questione.

Analogamente, altri ricercatori impegnati nel campo della logica simbolica (anche detta «logistica») hanno confuso la distinzione tra nomi universali e nomi individuali con la distinzione tra classi ed elementi di classi [5]. È certamente possibile consentire l'uso del termine «nome universale» come sinonimo di «nome di una classe», e quello del termine «nome individuale» come sinonimo di «nome di elemento»; ma ben poco si può dire in favore di quest'uso. In questo modo i problemi non possono essere risolti mentre, d'altra parte, quest'uso può benissimo impedire di scorgerli. La situazione, qui, è piuttosto simile a quella che abbiamo affrontato di-

[4] CARNAP, *Der logische Aufbau der Welt* [La costruzione logica del mondo], p. 213. (Aggiunta fatta nel 1934, mentre il libro era in bozze:) Nella *Logical Syntax of Language* di Carnap la distinzione tra nomi individuali e nomi universali non sembra sia stata presa in considerazione, né questa distinzione sembra esprimibile nel «linguaggio-coordinate» che egli costruisce. Si potrebbe forse pensare che le «coordinate», essendo segni del tipo piú basso (cfr. pp. 12 sg.) debbano essere interpretate come nomi *individuali* (e che Carnap usi un sistema di coordinate definito con l'aiuto di individui). Ma questa interpretazione non va, poiché Carnap scrive (p. 97, § 4) che nel linguaggio che egli usa «... tutte le espressioni di tipo piú basso sono espressioni numeriche» nel senso che denotano ciò che cadrebbe sotto il segno primitivo indefinito di Peano «numero» (cfr. pp. 31, 33). Ciò rende chiaro che non si deve pensare ai segni numerici, che compaiono come coordinate, come a nomi propri o a coordinate individuali, ma come a universali. (Essi sono «individuali» soltanto in senso pickwickiano. Cfr. § 13, nota 3b).

[5] Neanche la distinzione tracciata da Russell e Whitehead tra individuali (o particolari) e universali, ha nulla da spartire con la distinzione, qui introdotta, tra nomi individuali e nomi universali. Secondo la terminologia di Russell, nell'enunciato «Napoleone è un generale francese», «Napoleone» è, come nel mio schema, un individuale, mentre «generale francese» è un universale, inversamente, nell'enunciato «L'azoto è un non-metallo», «non-metallo» è, come nel mio schema, un universale, ma «azoto» è un individuale. Inoltre, ciò che Russell chiama «descrizione» non corrisponde ai miei «nomi individuali», perché, per esempio, la «classe dei punti geometrici che cadono nel mio corpo» è per me un concetto individuale, ma non può essere rappresentata per mezzo di una «descrizione». Cfr. WHITEHEAD e RUSSELL, *Principia Mathematica*, vol. I, 1925², introduzione alla 2ª ed., II, 1, pp. XIX sg.

scutendo la distinzione tra asserzioni universali e asserzioni singolari. Gli strumenti della logica simbolica non sono piú adeguati al trattamento del problema degli universali di quanto non lo siano al trattamento del problema dell'induzione[6].

15. *Asserzioni strettamente universali e asserzioni strettamente esistenziali.*

Naturalmente non basta caratterizzare le asserzioni universali come asserzioni in cui non compare nessun nome individuale. Se si usa la parola «corvo» come nome universale, allora è chiaro che l'asserzione «Tutti i corvi sono neri» è un'asserzione strettamente universale. Ma anche in molte altre asserzioni quali «Molti corvi sono neri», o anche, «Alcuni corvi sono neri», o «Ci sono corvi neri», ecc., compaiono soltanto nomi universali; ma certo non descriveremo queste asserzioni come asserzioni universali.

Le asserzioni in cui compaiono soltanto nomi universali e nessun nome individuale, saranno chiamate, qui, «strette» o «pure». Le piú importanti, tra esse, sono le asserzioni *strettamente universali*, che ho già preso in esame. Oltre che su queste, il mio interesse verte in modo particolare su quelle asserzioni della forma «Ci sono corvi neri», che possono essere considerate come aventi lo stesso significato di «Esi-

[6] Neppure la differenza tra asserzioni universali e asserzioni singolari può essere espressa nel sistema di Whitehead e Russell. Non è corretto dire che le implicazioni cosiddette «formali» o «generali» devono essere asserzioni universali. Infatti ogni asserzione singolare può essere messa nella forma di un'implicazione generale. Per esempio, l'asserzione «Napoleone nacque in Corsica» può essere espressa sotto la forma, $(x)(x = N \rightarrow \varphi x)$; in parole: «per tutti i valori di x è vero che, se x è identico con Napoleone, allora x è nato in Corsica».

Un'*implicazione generale* si scrive «$(x)(\varphi x \rightarrow fx)$», dove l'«operatore universale», «(x)», si può leggere: «È vero per tutti i valori di x»; «φx» e «fx» sono «*funzioni proposizionali*»; (per esempio: «x è nato in Corsica», dove non si dice chi sia x; una funzione proposizionale non può essere né vera né falsa). «$\rightarrow$» sta per: «se è vero che... allora è vero che...» La funzione proposizionale φx che precede «$\rightarrow$» può essere chiamata l'*antecedente*, o la *funzione proposizionale condizionante* e fx la «*funzione proposizionale conseguente*» o la «*predicazione*»; e l'*implicazione generale*, $(x)(\varphi x \rightarrow fx)$ asserisce che tutti i valori di x che soddisfano φ soddisfano anche f.

ste almeno un corvo nero». Le asserzioni di questo genere saranno chiamate *asserzioni strettamente o puramente esistenziali* (o *asserzioni «c'è»*).

La negazione di un'asserzione strettamente universale è sempre equivalente a un'asserzione strettamente esistenziale, e viceversa. Per esempio, «Non tutti i corvi sono neri» dice la stessa cosa che: «Esiste un corvo che non è nero», o: «Esistono corvi non-neri».

Le teorie della scienza della natura, e specialmente le cosiddette leggi di natura, hanno la forma di asserzioni strettamente universali; dunque possono venire espresse sotto forma di negazioni di asserzioni strettamente esistenziali, o, come possiamo anche dire, sotto forma di *asserzioni di non-esistenza* (o asserzioni «non c'è»). Per esempio, la legge della conservazione dell'energia può essere espressa sotto la forma: «Non esiste nessuna macchina del moto perpetuo», o l'ipotesi della carica elettrica elementare sotto la forma «Non esiste nessuna carica elettrica che non sia un multiplo della carica elettrica elementare».

In questa formulazione vediamo che le leggi di natura possono essere paragonate a «divieti» o «proibizioni». Non asseriscono che qualcosa esiste, o accade: lo negano. Insistono sulla non-esistenza di certe cose, o di certi stati di cose proscrivendo, o proibendo, per cosí dire, queste cose o questi stati di cose: li escludono. E proprio perché lo fanno sono *falsificabili*. Se accettiamo come vera una sola asserzione singolare che, per cosí dire, infrange la proibizione asserendo l'esistenza di una cosa (o l'accadere di un evento) esclusa dalla legge, la legge risulta confutata. (Un esempio di ciò potrebbe essere fornito dall'asserzione «Nel tale luogo c'è un apparecchio che è una macchina del moto perpetuo»).

Per contro, le asserzioni strettamente esistenziali non possono essere falsificate. Nessun'asserzione singolare (cioè, nessun'«asserzione-base», nessun'asserzione su un evento osservato) può contraddire l'asserzione esistenziale «Ci sono corvi bianchi». Soltanto un'asserzione universale può farlo. In base al criterio di demarcazione adottato qui, dovrò pertanto trattare le asserzioni strettamente esistenziali come «non-empiriche», o «metafisiche». A prima vista questa caratterizzazione potrà forse apparire dubbia e non perfettamente d'accordo con la pratica della scienza empirica. Si può asserire in via d'obiezione (ed è giusto asserirlo) che anche in fisica ci sono teorie che hanno la forma di asserzioni strettamente esistenziali. Un esempio di ciò sarebbe un'asserzione, deducibile dal sistema periodico degli elementi chimici, che asserisse l'esistenza di elementi che hanno un certo numero atomico. Ma perché l'ipotesi che esiste un elemento con un certo numero atomico debba essere formulata in modo che diventi controllabile, si richiede molto di piú che non un'asserzione puramente esistenziale. Per esempio, l'elemento con numero atomico 72 (Hafnio) non fu scoperto unicamente sulla base di asserzioni puramente esistenziali isolate. Al contrario, tutti i tentativi di trovarlo risultarono vani, finché Bohr non riuscí a predire parecchie delle sue proprietà, deducendole dalla propria teoria. Ma la teoria di Bohr, e quelle conclusioni di tale teoria che sono rilevanti per questo elemento, e che aiutarono la sua scoperta, sono ben lontane dall'essere asserzioni puramente esistenziali isolate [*1]. Sono asserzioni strettamente universali. Che la mia decisione di considerare le asserzioni strettamente esistenziali come asserzioni non-empiriche – perché non sono falsificabili – sia utile, e quindi vada d'accordo con l'uso ordinario, si vedrà dalla sua applicazione alle asserzioni di probabilità, e al problema del controllarle empiricamente. (Si vedano i §§ 66-68).

Le asserzioni strette, o pure, sia universali, sia esistenziali, non sono limitate dallo spazio e dal tempo. Non fanno riferimento a una ristretta regione spazio-temporale individuale. È questa la ragione per cui le asserzioni strettamente esistenziali non sono falsificabili. Non possiamo andare a cercare per tutto il mondo per stabilire che qualcosa non esiste, non è mai esistito e non esisterà mai. Ed è esattamente per la stessa ragione che le asserzioni strettamente universali non sono verificabili. Ancora, non possiamo andare a cercare

[*1] La parola «isolato» è stata inserita per evitare interpretazioni errate del passo, anche se penso che fosse abbastanza chiaro dove esso vuole arrivare: un'asserzione esistenziale *isolata* non è mai falsificabile; ma, se presa in un contesto con altre asserzioni, un'asserzione esistenziale *può*, *in alcuni casi*, aggiungere qualcosa al contenuto empirico dell'intero contesto; essa può arricchire la teoria alla quale appartiene e può aggiungere qualcosa al suo grado di falsificabilità o di controllabilità. In questo caso il sistema di teorie che contiene l'asserzione esistenziale in questione dev'essere descritto come scientifico, e non come metafisico.

per tutto il mondo per assicurarci che non esiste qualcosa che la legge vieta. Nondimeno, entrambi i tipi di asserzioni strette, strettamente universali o strettamente esistenziali, sono in linea di principio empiricamente decidibili: tuttavia, ciascuna lo è *in un solo modo*; sono *decidibili unilateralmente*. Tutte le volte che si trova che qualcosa esiste, o è esistito, si può verificare, su questa base, un'asserzione strettamente esistenziale, oppure falsificarne una universale.

L'asimmetria che abbiamo descritto qui, con la sua conseguenza, la falsificabilità unilaterale delle asserzioni universali della scienza empirica, può forse apparire, ora, meno dubbia di quanto non apparisse all'inizio (nel § 6). Ora vediamo che in essa non è implicita nessuna asimmetria, di nessuna relazione puramente *logica*. Al contrario, le relazioni logiche esibiscono simmetria. Le asserzioni universali e le asserzioni esistenziali sono costruite simmetricamente. Soltanto [*2] la linea tracciata dal nostro criterio di demarcazione produce un'asimmetria.

16. *Sistemi di teorie.*

Le teorie scientifiche cambiano continuamente. Ciò non è dovuto al puro caso, ma, secondo la nostra caratterizzazione della scienza empirica, possiamo aspettarcelo.

È forse questa la ragione per cui, di regola, soltanto certe *branche* della scienza – e soltanto temporaneamente – acquistano la forma di un sistema di teorie elaborato e logicamente ben costruito. Nonostante ciò, di solito un sistema elaborato in via di tentativo può benissimo essere preso in considerazione nella sua totalità, insieme con tutte le sue conseguenze importanti. Ciò è estremamente necessario; infatti il controllo severo di un sistema presuppone che questo sia, nello stesso tempo, sufficientemente definito e abbia una forma definitiva, che renda impossibile che in esso vengano con-

[*2] Qui la parola «soltanto» non dovrebbe esser presa troppo sul serio. La situazione è piuttosto semplice. Se è caratteristico della scienza empirica il considerare le asserzioni *singolari* come asserzioni di controllo, allora l'asimmetria sorge dal fatto che, *rispetto alle asserzioni singolari*, le asserzioni universali sono soltanto falsificabili e quelle esistenziali sono soltanto verificabili. Cfr. anche § *22 del *Postscript* cit.

trabbandate nuove assunzioni. In altre parole, il sistema dev'essere formulato in maniera sufficientemente chiara e definita, cosí da rendere ogni nuova assunzione facilmente riconoscibile per quello che è: una modificazione, e quindi una *revisione* del sistema.

Questa, io credo, è la ragione per cui si tende alla forma di un sistema rigoroso. È la forma di un cosiddetto «*sistema assiomatizzato*»: la forma che Hilbert, ad esempio, riuscí a dare a certe branche della fisica teorica. Si tenta di raccogliere tutte e sole le assunzioni di cui si ha bisogno per formare il vertice del sistema. Tali assunzioni vengono di solito chiamate gli «assiomi» (o «postulati» o «proposizioni primitive»: nel termine «assioma», come lo si usa qui, non è implicita nessuna pretesa alla verità). Gli assiomi si scelgono in modo tale che tutte le altre asserzioni appartenenti al sistema di teorie possano essere derivate dagli assiomi per mezzo di trasformazioni puramente logiche o matematiche.

Si può dire che un sistema di teorie è assiomatizzato se è stato formulato un insieme di asserzioni, gli assiomi, che soddisfino le quattro seguenti condizioni fondamentali. *a*) Il sistema di assiomi dev'essere *privo di contraddizioni* (cioè, non deve contenere né asserzioni auto-contraddittorie né asserzioni che si contraddicano vicendevolmente). Questa condizione è equivalente all'esigenza che dal sistema non debbono essere deducibili asserzioni qualsiasi, scelte ad arbitrio[1]. *b*) Il sistema dev'essere *indipendente*, cioè non deve contenere assiomi deducibili dagli altri assiomi. (In altre parole, un'asserzione si può chiamare assioma soltanto se non è deducibile all'interno del resto del sistema). Queste due condizioni riguardano il sistema come tale; per quanto riguarda, invece, la relazione del sistema d'assiomi con il grosso della teoria, gli assiomi devono essere, *c*), *sufficienti* per dedurre tutte le asserzioni che appartengono alla teoria da assiomatizzare, e, *d*), *necessari*, per lo stesso scopo. Ciò significa che non devono contenere assunzioni superflue[2].

In una teoria cosí assiomatizzata è possibile indagare la dipendenza reciproca di varie parti del sistema. Per esempio,

[1] Cfr. § 24.

[2] Per quanto riguarda queste quattro condizioni, e anche il paragrafo che segue, si veda, ad esempio, l'esposizione piuttosto differente che ne fa Carnap nell'*Abriss der Logistik* [Compendio di logistica], 1927, pp. 70 sgg.

possiamo investigare se una certa parte della teoria sia derivabile da una certa parte degli assiomi. Indagini di questo tipo (delle quali parleremo piú diffusamente nei §§ 63-64 e 75-77) hanno un peso non indifferente per la teoria della falsificabilità. Esse rendono chiaro perché la falsificazione di un'asserzione dedotta logicamente possa, talvolta, non modificare l'intiero sistema, ma soltanto alcune sue parti, che possono considerarsi falsificate. Ciò è possibile perché, anche se le teorie della fisica non sono, in generale, completamente assiomatizzate, le connessioni tra le varie parti di questa scienza possono tuttavia essere sufficientemente chiare, così da metterci in grado di decidere quali dei suoi sottosistemi siano modificati da qualche particolare osservazione falsificante [*1].

17. *Alcune possibilità d'interpretazione di un sistema di assiomi.*

Non staremo a discutere, qui, il punto di vista del razionalismo classico secondo cui gli «assiomi» di certi sistemi, per esempio gli assiomi della geometria euclidea, devono essere considerati come intuitivamente certi, o autoevidenti. Mi limiterò a dire che non condivido questo punto di vista. Ritengo che, dato un qualsiasi sistema di assiomi, siano ammissibili due interpretazioni diverse. Gli assiomi possono essere considerati, 1) o come *convenzioni* o, 2), come *ipotesi* empiriche o scientifiche.

1) Se gli assiomi sono considerati come *convenzioni*, allora queste trascinano con sé l'uso o significato delle idee fondamentali (dei termini o concetti primitivi) che gli assiomi introducono; determinano ciò che può e ciò che non può essere detto intorno a queste idee fondamentali. Qualche volta gli assiomi vengono descritti come «*definizioni implicite*» delle idee che introducono. Questo punto di vista può forse essere chiarito per mezzo dell'analogia tra sistema di assiomi e sistema di equazioni (coerente e risolubile).

[*1] Il problema è discusso piú ampiamente nel *Postscript* cit., specialmente nel § *22.

I valori ammissibili delle «incognite» (o variabili) che compaiono in un sistema di equazioni sono determinati, in un modo o nell'altro, dal sistema stesso. Anche se non è sufficiente a fornire una soluzione unica, il sistema di equazioni non permette che alle «incognite» (variabili) si sostituisca ogni combinazione concepibile di valori. Piuttosto, il sistema di equazioni caratterizza certe combinazioni di valori, o sistemi di valori, come ammissibili, mentre ne caratterizza altri come inammissibili; distingue la classe di sistemi di valori ammissibili dalla classe di sistemi di valori inammissibili. In modo analogo, i sistemi di concetti possono essere distinti in ammissibili e inammissibili mediante quella che si potrebbe chiamare un'«equazione assertoria». Un'equazione assertoria si ottiene da una funzione proposizionale, o funzione assertoria (cfr. la nota 6 al § 14), cioè, da un'asserzione incompleta in cui compaiono uno o piú «posti vuoti». Due esempi di tali funzioni proposizionali o funzioni assertorie, sono: «Un isotopo dell'elemento x ha peso atomico 65»; o «$x+y = 12$». Tutte queste funzioni assertorie si trasformano in un'asserzione sostituendo certi valori ai loro posti vuoti, x e y. L'asserzione che ne risulta sarà vera o falsa secondo i valori (o le combinazioni di valori) sostituiti. Cosí, nel primo esempio, sostituendo ad «x» le parole «rame» o «zinco» si ottiene un'asserzione vera, mentre altre sostituzioni dànno luogo ad asserzioni false. Ora, se decidiamo, rispetto a qualche funzione assertoria, di ammettere soltanto quei valori che in seguito a sostituzione trasformano questa funzione in un'*asserzione vera*, otteniamo ciò che chiamo una «equazione assertoria». Per mezzo di questa «equazione assertoria» si definisce una classe ben determinata di sistemi di valori ammissibili, e precisamente la classe di quei sistemi di valori che la soddisfano. L'analogia con un'equazione matematica è chiara. Interpretandolo non come una funzione assertoria, ma come un'equazione assertoria, il nostro secondo esempio diventa un'equazione nel senso ordinario (matematico) del termine.

Siccome le sue idee fondamentali indefinite, o termini primitivi, possono essere considerati come posti vuoti, un sistema d'assiomi può, tanto per cominciare, essere trattato come un sistema di funzioni assertorie. Ma se decidiamo che possano essere sostituiti soltanto quei sistemi, o combinazioni, di valori che lo soddisferanno, allora diventa un sistema di equazioni assertorie. Come tale definisce implicitamente una classe di sistemi (ammissibili) di concetti. Ogni sistema di concetti che soddisfi un sistema di assiomi può essere chiamato un *modello di quel sistema di assiomi* *1.

L'interpretazione di un sistema assiomatico come sistema di (convenzioni o di) definizioni implicite, si può anche esprimere dicendo che equivale alla decisione: come sostituti possiamo soltanto ammettere modelli *2. Ma se si sostituisce un modello, allora il risultato sarà un sistema di asserzioni analitiche (perché sarà vero per convenzione). Un sistema assiomatico interpretato in questo modo non può pertanto essere considerato come un sistema di ipotesi scientifiche o empiriche (nel senso da noi stabilito), perché non può essere confutato falsificandone le conseguenze; anche queste, infatti, devono essere analitiche.

2) Ma allora, si può chiedere, in che modo un sistema di assiomi può essere interpretato come un sistema di *ipotesi* empiriche o scientifiche? L'opinione corrente è che i termini primitivi che compaiono nei sistemi d'assiomi non debbano essere considerati come definiti implicitamente, ma come «costanti extra-logiche». Per esempio, concetti come «linea retta» e «punto», che compaiono in ogni sistema d'assiomi della geometria, possono essere interpretati come «raggio luminoso», e «intersezione di raggi luminosi». In questo modo, si pensa, le asserzioni del sistema d'assiomi diventano asserzioni intorno ad oggetti empirici, cioè a dire, asserzioni sintetiche.

A prima vista, questo modo di considerare la cosa può apparire perfettamente soddisfacente. Tuttavia esso conduce a difficoltà connesse con il problema della base empirica. Infatti, non è per nulla chiaro che cosa sia un *modo empirico di definire un concetto*. Si parla, di solito, di «definizioni ostensive»: ciò significa che si assegna un significato empirico definito a un concetto *facendolo corrispondere* a certi oggetti

*1 Cfr. nota *2.

*2 Oggi distinguerei nettamente tra il *sistema di oggetti* che soddisfa un sistema di assiomi e il *sistema dei nomi di questi oggetti* che possono essere sostituiti negli assiomi (rendendoli veri); e chiamerei «modello» soltanto il primo sistema. Di conseguenza, scriverei: «possono essere ammessi alla sostituzione soltanto nomi di oggetti che costituiscono un modello».

appartenenti al mondo reale. Il concetto viene allora considerato come un simbolo di quegli oggetti. Ma dovrebbe essere chiaro che facendo riferimento a «oggetti reali», cioè, indicando una certa cosa e pronunciando un nome, o attaccando a quella cosa un'etichetta con su scritto un nome, e cosí via, si possono fissare ostensivamente solo nomi o concetti individuali. Ma i concetti che si devono usare nel sistema d'assiomi devono essere nomi universali che non possono essere definiti per mezzo di indicazioni empiriche, additando, e cosí via. Essi possono venir definiti, ammesso che lo possano, soltanto esplicitamente, *con l'aiuto di altri nomi universali*; altrimenti non si può far altro che lasciarli indefiniti. Che alcuni nomi universali debbano rimanere indefiniti è perciò quasi inevitabile; e qui sta la difficoltà. Infatti questi concetti indefiniti possono sempre essere usati nel senso non-empirico 1), cioè, come se fossero concetti definiti implicitamente. Ma quest'uso distrugge, inevitabilmente, il carattere empirico del sistema. Credo che questa difficoltà possa essere superata soltanto per mezzo di una decisione metodologica. Di conseguenza, adotterò la regola che vieta di usare concetti indefiniti come se fossero definiti implicitamente. (Questo punto sarà trattato piú avanti, nel § 20).

Forse posso aggiungere, a questo punto, che di solito è possibile che i concetti primitivi di un sistema d'assiomi come la geometria siano correlati con, o interpretati per mezzo dei concetti di un altro sistema, per esempio della fisica. Questa possibilità si rivela particolarmente importante quando, nel corso dell'evoluzione di una scienza, si deve *spiegare* un sistema di asserzioni facendo ricorso ad un nuovo – piú generale – sistema di ipotesi che permette di dedurre non soltanto asserzioni appartenenti al primo sistema, ma anche asserzioni appartenenti ad altri sistemi. In questi casi può darsi che sia possibile definire i concetti fondamentali del nuovo sistema con l'aiuto di concetti che sono stati usati, originariamente, in qualcuno dei vecchi sistemi.

18 *Livelli di universalità. Il Modus tollens.*

All'interno di un sistema di teorie possiamo distinguere asserzioni appartenenti a vari livelli di universalità. Le asserzioni situate sul livello di universalità piú alto sono gli assiomi; da esse si possono dedurre asserzioni situate sui livelli piú bassi. Le asserzioni empiriche di livello piú alto hanno sempre il carattere di ipotesi relative alle asserzioni di livello piú basso deducibili da esse: possono essere falsificate falsificando queste asserzioni meno universali. Ma in ogni sistema ipotetico deduttivo queste asserzioni meno universali sono ancora, a loro volta, asserzioni strettamente universali, nel senso in cui, qui, intendiamo quest'espressione. Dunque, anch'esse devono avere il carattere di *ipotesi*, fatto questo che è stato spesso trascurato nel caso di asserzioni universali di livello piú basso. Per esempio, Mach chiama «teoria-modello della fisica» la teoria di Fourier della conduzione del calore, per la curiosa ragione che «questa teoria è fondata non su un'*ipotesi*, ma su un *fatto osservabile*»[1]. Tuttavia, il «fatto osservabile» al quale Mach fa riferimento viene da lui descritto mediante l'asserzione «... la velocità di livellamento di differenze di temperatura, purché queste differenze di temperatura siano piccole, è proporzionale a queste stesse differenze»: un'asserzione-tutti, il cui carattere ipotetico dovrebbe essere sufficientemente evidente.

Anche di alcune asserzioni singolari dirò che sono ipotetiche, visto che da esse si possono derivare (con l'aiuto di un sistema di teorie) conclusioni tali che la falsificazione di queste conclusioni può falsificare le asserzioni singolari in questione.

Il modo d'inferenza falsificante a cui facciamo riferimento qui – il modo in cui la falsificazione di una conclusione implica la falsificazione del sistema da cui è derivata – è il *modus tollens* della logica classica. Esso può venir descritto nel modo seguente [*1]:

[1] MACH, *Die Prinzipien der Wärmelehre* cit., p. 115.

[*1] In relazione a questo passo, e ai due successivi (cfr. § 35, nota *1 e § 36 nota *1) in cui uso il simbolo «→», voglio dire che mentre stavo scrivendo il libro avevo ancora le idee confuse circa la distinzione tra un'asserzione condizionale (asserzione se-allora, talvolta anche chiamata con un'espressione che può indurre in errore, «implicazione materiale») e un'asserzione sulla deducibilità (o asserzione che asserisce che qualche asserzione condizionale è logicamente vera, o analitica, o che il suo antecedente trascina con sé [*entails*] il suo conseguente). Fu Alfred Tarski a insegnarmi a comprendere questa distinzione, pochi mesi dopo la pubblicazione di questo libro. Il problema non è molto importante per il contesto di questo libro, ma ciò nonostante la confusione dev'essere fatta notare. (Questi problemi sono discussi piú ampia-

Poniamo che p sia una conclusione di un sistema t di asserzioni che può consistere di teorie e di condizioni iniziali (per amore di semplicità non starò a fare una distinzione tra di esse). Possiamo allora simbolizzare la relazione di derivabilità (implicazione analitica) di p da t, con «$t \rightarrow p$», che si può leggere: «p segue da t». Assumiamo che p sia falsa (possiamo esprimere questo fatto scrivendo «$\bar{p}$» – leggasi «non-p»). Data la relazione di deducibilità, $t \rightarrow p$, e l'assunzione $\bar{p}$, possiamo inferire $\bar{t}$ (si legga «non-t): ciò significa che consideriamo t falsificata. Se denotiamo la congiunzione (l'asserzione simultanea) di due asserzioni ponendo un punto tra i simboli che stanno per esse possiamo anche scrivere l'inferenza falsificante nel modo seguente: $((t \rightarrow p) \,.\, \bar{p}) \rightarrow \bar{t}$, o, in parole: «se p è derivabile da t e se p è falsa, allora anche t è falsa».

Mediante questo modo d'inferenza, falsifichiamo *l'intero sistema* (tanto la teoria quanto le condizioni iniziali) necessario per la deduzione dell'asserzione p, cioè, per la deduzione dell'asserzione falsificante. Non è dunque possibile, di ogni singola asserzione del sistema, asserire che è, o non è, specificamente sconvolta dalla falsificazione. Soltanto se p è *indipendente* da qualche parte del sistema possiamo dire che questa parte non è implicata nella falsificazione[2]. In relazione con questo fatto sta la seguente possibilità: in alcuni casi, per esempio nella considerazione dei *livelli di universalità*, possiamo attribuire la falsificazione a qualche ipotesi definita, per esempio a un'ipotesi introdotta *ex novo*. Ciò può accadere nel caso in cui una teoria ben corroborata, e che continua a essere ulteriormente corroborata, è stata spiegata dedutti-

mente per esempio nel mio articolo apparso in «Mind», 56, 1947, pp. 193 sgg.).

[2] Dunque, a prima vista non possiamo sapere a quale delle varie asserzioni del rimanente sotto-sistema t' (da cui p non è indipendente) sia da imputarsi la falsità di p; quale di queste asserzioni si debba alterare, e quale si debba lasciare tale e quale. (Non sto discutendo, qui, delle asserzioni che si possono sostituire reciprocamente). Spesso è soltanto l'istinto scientifico del ricercatore (influenzato, naturalmente, dai risultati del controllare e ricontrollare) che gli fa indovinare quali asserzioni di t' debbano essere considerate innocue e quali debbano essere considerate bisognose di modificazione. Tuttavia vale la pena ricordare che spesso è la modificazione di ciò che saremmo propensi a considerare chiaramente innocuo (a causa del suo completo accordo con i nostri normali abiti di pensiero) che può produrre un progresso decisivo. Un esempio notevole di ciò è la modificazione, apportata da Einstein, al concetto di simultaneità.

vamente con una nuova ipotesi di livello piú alto. Si dovrà tentare di controllare questa nuova ipotesi mediante alcune delle sue conseguenze non ancora controllate. Se una qualsiasi di queste conseguenze risulta falsificata, possiamo benissimo attribuire la falsificazione solo alla nuova ipotesi. Cercheremo allora, in suo luogo, altre generalizzazioni di alto livello, ma non ci sentiremo costretti a considerare falsificato il vecchio sistema, dotato di minore generalità. (Si vedano anche le osservazioni sulla «quasi-induzione» contenute nel § 85).

Capitolo quarto

La falsificabilità

La questione, se esista qualcosa come un'asserzione singolare falsificabile (o un'«asserzione-base») sarà presa in esame piú tardi. Qui assumerò che a questa questione venga data una risposta positiva ed esaminerò fino a qual punto il mio criterio di demarcazione sia applicabile, ammesso che lo sia, a sistemi di teorie. La discussione critica della posizione comunemente chiamata «convenzionalismo» farà sorgere, in primo luogo, alcuni problemi di metodo: tali problemi si dovranno affrontare prendendo certe *decisioni metodologiche*. In seguito tenterò di caratterizzare le proprietà logiche di quei sistemi di teorie che sono falsificabili; falsificabili, cioè, se si adottano le nostre decisioni metodologiche.

19. *Alcune obiezioni convenzionalistiche.*

Contro la mia proposta di adottare la falsificabilità come criterio per decidere se un sistema di teorie appartenga o no alla scienza empirica, verranno certamente sollevate alcune obiezioni. Esse saranno sollevate, per esempio, da coloro che subiscono l'influenza di quella scuola nota come «convenzionalismo» [1]. Alcune di queste obiezioni sono già state sfiorate nei §§ 6, 11 e 17; ora verranno prese in considerazione un po' piú da vicino.

[1] I principali rappresentanti della scuola sono Poincaré e Duhem (cfr. *La théorie physique, son objet et sa structure* cit.). Un recente seguace di questa teoria è H. Dingler (tra le sue numerose opere possiamo menzionare: *Das Experiment* [L'esperimento] e *Der Zusammenbruch der Wissenschaft*

La fonte della filosofia convenzionalistica sembra essere la meraviglia di fronte alla bella ed austera *semplicità del mondo*, quale è rivelata dalle leggi della fisica. E sembra che i convenzionalisti abbiano l'impressione che questa semplicità sarebbe incomprensibile, e addirittura miracolosa, se si fosse costretti a pensare, con i realisti, che le leggi della natura rivelano la semplicità interna, strutturale del mondo, al di sotto dell'apparenza esterna di diffusa varietà. L'idealismo kantiano cercava di spiegare questa semplicità dicendo che è il nostro intelletto ad imporre le sue leggi alla natura. In modo analogo, ma ancora piú ardito, il convenzionalista tratta questa semplicità come una nostra creazione. Tuttavia, essa non è, per lui, l'effetto delle leggi del nostro intelletto che s'impongono alla natura e la rendono semplice, perché non crede che la natura sia semplice. Soltanto le «*leggi della natura*» sono semplici, e queste, sostiene il convenzionalista, sono nostre libere creazioni, nostre invenzioni, nostre decisioni e convenzioni arbitrarie. Per il convenzionalista la scienza naturale teorica non è un'immagine della natura, ma una mera costruzione logica. Non sono le proprietà del mondo a determinare questa costruzione; al contrario, è questa costruzione a determinare le proprietà di un mondo artificiale: un mondo di concetti implicitamente definito dalle leggi naturali che noi abbiamo scelto. Soltanto di *questo* mondo parla la scienza.

Secondo il punto di vista convenzionalistico, le leggi di natura non sono falsificabili dall'osservazione: esse infatti sono necessarie per determinare che cosa sia un'osservazione e, piú in particolare, che cosa sia una misurazione scientifica. Sono queste leggi, enunciate da noi, a formare la base indispensabile per la regolazione dei nostri orologi e per la correzione dei nostri regoli cosiddetti «rigidi». Un orologio si dice «esatto», e un regolo «rigido», soltanto se i movimenti

und das Primat der Philosophie [Il crollo della scienza e il primato della filosofia], 1926. * Il tedesco Hugo Dingler non dev'essere confuso con l'inglese Herbert Dingle. Il principale rappresentante del convenzionalismo nei paesi di lingua anglosassone è Eddington. Qui possiamo ricordare che Duhem nega la possibilità di esperimenti cruciali, perché pensa ad essi come a verificazioni, mentre io asserisco la possibilità di esperimenti cruciali *falsificanti*. Cfr. anche il mio scritto *Three Views Concerning Human Knowledge* cit.

misurati con l'aiuto di questi strumenti soddisfano gli assiomi della meccanica che abbiamo deciso di adottare [2].

La filosofia del convenzionalismo dev'essere considerata altamente meritevole per il modo in cui ha contribuito a chiarificare le relazioni tra teoria ed esperimento. Essa ha riconosciuto l'importanza, a cui gli induttivisti avevano prestato cosí poca attenzione, della parte che le nostre azioni e le nostre operazioni, pianificate secondo convenzioni e ragionamento deduttivo, hanno nell'esecuzione e nell'interpretazione dei nostri esperimenti scientifici. Io ritengo che il convenzionalismo sia un sistema autosufficiente e difendibile. È improbabile che i tentativi di cogliere in esso qualche contraddizione abbiano successo. Però, nonostante tutto, lo trovo assolutamente inaccettabile. Sotto la sua superficie sta un'idea della scienza, dei suoi scopi e dei suoi propositi che trovo estremamente diversa dalla mia. Mentre io non esigo che la scienza possa fornire una certezza definitiva (e di conseguenza non la ottengo), il convenzionalista, per dirla con Dingler, cerca nella scienza «un sistema di conoscenze basato sopra fondamenti definitivi». Questa méta è raggiungibile, perché è possibile interpretare qualsiasi sistema scientifico dato come un sistema di definizioni implicite. E i periodi in cui la scienza si sviluppa lentamente forniranno ben poche occasioni al sorgere di conflitti tra scienziati che inclinano al convenzionalismo ed altri che possono essere favorevoli a un punto di vista simile a quello che io sostengo, a meno che

[2] Questo punto di vista può anche essere considerato come un tentativo di risolvere il problema dell'induzione: infatti il problema scomparirebbe se le leggi naturali fossero definizioni, e perciò tautologie. Cosí, stando alle vedute di Cornelius (cfr. *Zur Kritik der wissenschaftlichen Grundbegriffe* [Per la critica dei concetti scientifici fondamentali], in «Erkenntnis», 2, 1931, n. 4) l'asserzione: «Il punto di fusione del piombo è di circa 335° C» fa parte della definizione del concetto «piombo» (suggerito dall'esperienza induttiva) e pertanto non può essere confutata. Una sostanza che altrimenti somigliasse al piombo, ma avesse un punto di fusione differente, non sarebbe piombo. Ma, secondo il mio punto di vista, l'asserzione riguardante il piombo, in quanto asserzione scientifica, è sintetica. Essa asserisce, tra l'altro, che un elemento con una data struttura atomica (numero atomico 82) ha sempre questo punto di fusione, quale che sia il nome che possiamo dare a quest'elemento.

(Parte aggiunta al libro in bozze:) Stando all'annuncio dell'opera *Das Weltbild und die Begriffsapparatur* [L'immagine del mondo e l'apparato concettuale] (per il quale cfr. «Erkenntnis», 4, 1934, pp. 100 sg.) Ajdukiewicz sembra concordare con Cornelius; egli chiama il proprio punto di vista «convenzionalismo radicale».

non si tratti di conflitti puramente accademici. Ben altro accadrà in tempi di crisi. In tutti quei casi in cui il sistema «classico» in vigore è minacciato dai risultati di nuovi esperimenti che, secondo il mio punto di vista, possono essere interpretati come falsificazioni, il sistema apparirà ben saldo al convenzionalista. Egli liquiderà le contraddizioni che possono essere sorte, ricorrendo a una spiegazione e forse biasimando la nostra inadeguata padronanza del sistema. Oppure eliminerà le contraddizioni suggerendo l'adozione *ad hoc* di certe ipotesi ausiliarie o, forse, di certe correzioni ai nostri strumenti di misura.

In tempi di crisi tale conflitto sugli scopi della scienza diventerà particolarmente acuto. Noi, e quelli che condividono il nostro atteggiamento, nutriremo la speranza di fare nuove scoperte, e spereremo anche di essere aiutati, in questo, da un sistema scientifico eretto *ex novo*. Avremo perciò un grandissimo interesse per l'esperimento falsificante, e lo saluteremo come un successo, perché ha aperto nuove prospettive in un mondo di nuove esperienze. E lo saluteremo con gioia, anche se queste nuove esperienze ci fornissero nuovi argomenti contro le nostre teorie piú recenti. Ma la nuova struttura che sta sorgendo, di cui ammiriamo l'arditezza, è considerata dal convenzionalista come un monumento al «collasso totale della scienza», come la mette Dingler. Agli occhi del convenzionalista soltanto un principio può aiutarci a scegliere un sistema come l'unico eletto tra tutti gli altri sistemi possibili: il principio che prescrive di scegliere il sistema piú semplice – o il sistema piú semplice di definizioni implicite – e naturalmente questo significa, in pratica, il sistema «classico» in voga. (Per quanto riguarda il problema della semplicità vedi i §§ 41-45, e specialmente il § 46).

Pertanto il mio conflitto col convenzionalista non è tale da poter essere definitivamente appianato semplicemente da una distaccata discussione di carattere teorico. E tuttavia è possibile, credo, ricavare dal modo di pensare convenzionalistico certi interessanti argomenti contro il mio criterio di demarcazione, come, ad esempio, il seguente. Ammetto, potrebbe dire un convenzionalista, che i sistemi di teorie delle scienze naturali non siano verificabili; ma asserisco che non sono neppure falsificabili. Infatti, esiste sempre la possibilità di «... raggiungere, per qualsiasi sistema di assiomi, quella che viene chiamata la "corrispondenza con la realtà"»[3]; e ciò si può fare in un certo numero di modi (alcuni dei quali sono stati suggeriti nelle pagine precedenti). Cosí possiamo introdurre ipotesi *ad hoc*; oppure possiamo modificare le cosiddette «definizioni ostensive» (o le «definizioni esplicite», che possiamo sostituire nel modo indicato nel § 17). Oppure possiamo assumere un atteggiamento scettico nei confronti della fidatezza dello sperimentatore le cui osservazioni, che minacciano il nostro sistema, possiamo escludere dalla scienza per la ragione che sono sostenute in modo insufficiente, non scientifico o non oggettivo, o addirittura per la ragione che lo sperimentatore è un bugiardo. (Questo è il tipo di atteggiamento che il fisico può adottare qualche volta nei confronti dei supposti fenomeni occulti). Come estrema risorsa possiamo sempre mettere in dubbio l'acume teorico dello sperimentatore (per esempio, nel caso in cui non creda, come Dingler, che un giorno la teoria dell'elettricità sarà derivata dalle leggi di gravitazione di Newton).

Cosí, stando al punto di vista convenzionalistico, non è possibile dividere i sistemi di teorie in sistemi falsificabili e sistemi non falsificabili; o, meglio, una simile distinzione sarà ambigua. Di conseguenza il nostro criterio di falsificabilità si rivelerà inutilizzabile come criterio di demarcazione.

20. *Regole metodologiche.*

Queste obiezioni, mosse da un immaginario convenzionalista, mi sembrano incontestabili, proprio come la stessa filosofia convenzionalistica. Ammetto che il mio criterio di falsificazione non conduce a una classificazione priva di ambiguità. In realtà, è impossibile, analizzandone la forma logica, decidere se un sistema d'asserzioni sia un sistema convenzionale di definizioni implicite inconfutabili, o se invece sia un sistema empirico nel senso da me stabilito, cioè un sistema confutabile. Questo, tuttavia, riesce soltanto a mostrare che il mio criterio di demarcazione non può essere applicato

[3] CARNAP, *Über die Aufgabe der Physik* [Il compito della fisica], in «Kantstudien», 28 (1923), p. 100.

immediatamente a un *sistema di asserzioni* – fatto questo che ho già messo in evidenza nei §§ 9 e 11. La questione, se un dato *sistema* debba essere considerato, come tale, convenzionale o empirico, è perciò una questione mal formulata. *Soltanto facendo riferimento al metodo applicato* a un sistema di teorie è possibile chiedersi se si stia trattando con una teoria convenzionalistica o con una teoria empirica. L'unico modo per evitare il convenzionalismo consiste nel prendere una *decisione*: la decisione di non applicarne i metodi. Nel caso in cui il nostro sistema sia minacciato decidiamo di non ricorrere, per salvarlo, a nessun genere di *stratagemma convenzionalistico*. In tal modo ci assicureremo contro l'uso della possibilità ora menzionata, e sempre aperta, di «... raggiungere, per ogni sistema... scelto, quella che viene chiamata la sua "corrispondenza con la realtà"».

Un chiaro apprezzamento di ciò che può essere guadagnato (e perduto) dai metodi convenzionalistici fu espresso, un centinaio di anni prima di Poincaré, da Black, il quale scrisse: «Un adeguato adattamento delle condizioni farà sí che quasi tutte le ipotesi concordino con i fenomeni. Ciò forse compiace l'immaginazione, ma non fa progredire la nostra conoscenza»[1].

Allo scopo di formulare regole metodologiche che ci impediscano di adottare gli stratagemmi convenzionalistici, dovremmo familiarizzarci con le varie forme che questi stratagemmi possono assumere, in modo da affrontare ciascuno di essi con la contromossa anti-convenzionalistica appropriata. Inoltre, ogni qualvolta troviamo che un sistema è stato riscattato da uno stratagemma convenzionalistico, dovremmo decidere di sottoporlo nuovamente a controllo e di rifiutarlo, secondo quanto richiedono le circostanze.

I quattro principali stratagemmi convenzionalistici sono già stati enumerati alla fine del paragrafo precedente. La lista non pretende di essere completa: si deve lasciare all'investigatore, specialmente nei campi della sociologia e della psicologia (perché può darsi che il fisico non abbia bisogno di essere messo in guardia), il compito di guardarsi costantemente dalla tentazione di impiegare nuovi stratagemmi con-

[1] J. BLACK, *Lectures on the Elements of Chemistry* [Lezioni di chimica elementare], vol. I, Edinburgh 1803, p. 193.

venzionalistici: una tentazione alla quale spesso soccombe, ad esempio, lo psicanalista.

Per quanto riguarda le *ipotesi ausiliarie*, decidiamo di enunciare la regola secondo cui sono accettabili soltanto quelle la cui introduzione non diminuisce il grado di falsificabilità o di controllabilità del sistema in questione, ma, al contrario, l'accresce. (Il modo in cui si devono stimare i gradi di falsificabilità sarà esposto nei §§ 31-40). Se il grado di falsificabilità è aumentato, allora l'introduzione dell'ipotesi ha veramente rafforzato la teoria; ora il sistema esclude piú di quanto non facesse prima: vieta di piú. Possiamo anche mettere la cosa in questi termini. L'introduzione di un'ipotesi ausiliaria dovrebbe sempre essere considerata come un tentativo di costruire un nuovo sistema; e questo nuovo sistema dovrebbe sempre essere giudicato sulla base di ciò: se, una volta adottato, costituisca o no un reale progresso nella nostra conoscenza del mondo. Un esempio di ipotesi ausiliaria accettabile in grado eminente nel senso ora chiarito, è il principio di esclusione di Pauli (cfr. § 38). Un esempio di ipotesi ausiliaria insoddisfacente sarebbe l'ipotesi della contrazione di Fitzgerald e Lorentz, che non ebbe conseguenze falsificabili ma serví unicamente [*1] a ristabilire l'accordo tra teoria ed esperimento, in modo particolare con le scoperte di Michelson e Morley. In questo caso si è compiuto un progresso soltanto con la teoria della relatività, che predisse nuove conseguenze, nuovi effetti fisici, e aperse in tal modo nuove possibilità di controllare, e di falsificare, la teoria. La nostra regola metodologica può essere qualificata osservando che non abbiamo bisogno di rigettare come convenzionalistica ogni ipotesi ausiliaria che si riveli incapace di soddisfare questi modelli. In particolare, ci sono asserzioni *singolari* che in realtà non appartengono per nulla al sistema di teorie. Tali asserzioni sono talvolta chiamate «ipotesi ausiliarie», e, sebbene siano introdotte a sostegno della teoria, sono assolutamente innocue. (Un esempio è dato dall'assunzione che una certa osservazione o una certa misurazione non ripetibili possono essere dovute a errore. Cfr. la nota 6 al § 8 e i §§ 27 e 68).

[*1] Come ha messo in evidenza A. GRÜNBAUM, in «BJPS», 10 (1959), pp. 48 sgg., *questo è un errore*. Tuttavia, siccome quest'ipotesi è meno controllabile della relatività speciale, può illustrare *gradi dell'essere ad hoc*.

Nel § 17 ho menzionato le *definizioni esplicite* per mezzo delle quali ai concetti di un sistema di assiomi viene conferito un significato in termini di un sistema situato a un livello di universalità piú basso. I cambiamenti in queste definizioni possono essere ammessi se si rivelano utili; ma devono essere considerati come modificazioni del sistema, che in seguito a tali cambiamenti dovrà essere riesaminato come se fosse nuovo. Per quanto riguarda i nomi universali indefiniti dobbiamo distinguere tra due possibilità: 1) Ci sono alcuni concetti indefiniti che compaiono soltanto in asserzioni caratterizzate dal piú alto livello d'universalità, ed il cui uso è stabilito dal fatto che sappiamo in quale relazione logica stanno, nei loro confronti, gli altri concetti. Essi possono venire eliminati nel corso della deduzione (un esempio è dato da «energia»)[2]. 2) Ci sono altri concetti indefiniti che si presentano in asserzioni caratterizzate anche da livelli di universalità piú bassi e il cui significato è stabilito dall'uso (per esempio: «moto», «punto-massa», «posizione»). Per quanto ci concerne, vieteremo alterazioni surrettizie del loro uso; altrimenti procederemo in conformità con le nostre decisioni metodologiche, come nei casi precedenti.

Per quanto riguarda i due punti del nostro elenco che rimangono ancora da esaminare – e che sono connessi con la competenza dello sperimentatore o del teorico – adotteremo regole analoghe a quelle ora formulate. Gli esperimenti che possono essere sottoposti a controlli intersoggettivi saranno accettati o rigettati alla luce di contro-esperimenti. Il puro e semplice appello a derivazioni logiche da scoprirsi in futuro può essere tralasciato.

[2] Si confronti, per esempio, con H. HAHN, *Logik, Mathematik und Naturerkennen* [Logica, matematica e conoscenza della natura], in «Einheitswissenschaft», 2 (1933), pp. 22 sgg. Per quanto riguarda questo punto, desidero soltanto dire che nella mia teoria non esistono affatto termini «costituibili» (cioè empiricamente definibili). Al loro posto uso nomi universali indefinibili che sono definiti soltanto sulla base del loro uso nel linguaggio. Cfr. anche la fine del § 25.

21. *Indagine logica sulla falsificabilità.*

C'è bisogno di guardarsi dagli stratagemmi convenzionalistici soltanto nel caso di sistemi che sarebbero falsificabili se fossero trattati in accordo con le nostre regole del metodo empirico. Supponiamo di essere riusciti a bandire questi stratagemmi per mezzo delle nostre regole: ora possiamo richiedere una caratterizzazione *logica* di questi sistemi falsificabili. Tenteremo di caratterizzare la falsificabilità di una teoria facendo ricorso alle relazioni logiche sussistenti tra la teoria e la classe delle asserzioni-base.

Il carattere delle asserzioni singolari che chiamo «asserzioni-base» sarà discusso in modo piú esauriente nel capitolo successivo cosí come sarà discussa anche la questione se esse siano a loro volta falsificabili. Per ora assumeremo che asserzioni-base falsificabili esistano. Occorre ricordare che quando parlo di «asserzioni-base» non mi riferisco a un sistema di asserzioni *accettate*. Il sistema di asserzioni-base, nel senso in cui io uso questo termine, deve includere, piuttosto, *tutte le asserzioni singolari non autocontradditorie* che hanno una certa forma logica; per esempio tutte le asserzioni di fatto concepibili. Cosí il sistema di tutte le asserzioni-base conterrà molte asserzioni che sono fra loro incompatibili.

Di primo acchito si potrebbe forse tentar di chiamare «empirica» una teoria tutte le volte che da essa si possono dedurre asserzioni singolari. Tuttavia questo tentativo fallisce perché, per dedurre asserzioni singolari da una teoria, abbiamo sempre bisogno di altre asserzioni singolari – le condizioni iniziali – che ci dicano che cosa dobbiamo sostituire alle variabili della teoria. In seconda intenzione potremmo tentar di chiamare «empirica» una teoria se da essa sono derivabili asserzioni singolari con l'aiuto di altre asserzioni singolari che servono come condizioni iniziali. Ma neanche questo tentativo funziona, perché anche una teoria non empirica, per esempio una teoria tautologica, ci permetterebbe di derivare alcune asserzioni singolari da altre asserzioni singolari. (Secondo le regole della logica possiamo dire, ad esempio: dalla congiunzione di «Due volte due, quattro» e «Qui c'è un corvo nero», segue, tra le altre cose, «Qui c'è un corvo»). Non sarebbe neppure sufficiente esigere che dalla teoria, insieme con alcune condizioni iniziali, sia possibile dedurre *di piú* di quanto sarebbe possibile dedurre da quelle sole condizioni iniziali. È vero che questa richiesta porterebbe all'esclusione delle teorie tautologiche, ma non escluderebbe le asserzioni sintetiche della metafisica. (Per esempio: da «Ogni accadimento ha una causa» e «Qui sta accadendo una catastrofe» possiamo dedurre «Questa catastrofe ha una causa»).

In questo modo siamo indotti a richiedere che la teoria ci permetta di dedurre, parlando alla buona, piú asserzioni singolari *empiriche* di quante possiamo dedurne dalle sole condizioni iniziali [*1]. Ciò significa che dobbiamo basare la nostra definizione su una classe particolare di asserzioni singolari: e questo è lo scopo per il quale abbiamo bisogno delle asserzioni-base. Poiché mi rendo conto che non sarebbe molto

[*1] Dopo la pubblicazione di questo libro, sono state ripetutamente avanzate, come criteri della *significanza* degli *enunciati* (piú che come criteri di *demarcazione* applicabili a *sistemi* di teorie) formulazioni equivalenti a quella data qui, ed anche da critici che si facevano beffe del mio criterio di falsificabilità. Ma si vede facilmente che, se viene usata come criterio di *demarcazione*, la nostra formulazione è equivalente alla falsificabilità. Infatti, se l'asserzione-base b_2 non segue dalla sola b_1, ma da b_1 congiunta con la teoria t (questa è la formulazione che si trova nel mio libro), ciò significa che la congiunzione di b_1 con la negazione di b_2 contraddice la teoria t. Ma la congiunzione di b_1 con la negazione di b_2 è una asserzione-base (cfr. § 28). Dunque il nostro criterio richiede l'esistenza di un'asserzione-base falsificante, cioè richiede la falsificabilità, esattamente nel mio senso. (Cfr. anche § 82, nota *1).

Come criterio di *significato* (o di «verificabilità debole») esso però fallisce per varie ragioni. In primo luogo, perché la negazione di alcune asserzioni significanti diventerebbe, secondo questo criterio, insignificante. In secondo luogo, perché la congiunzione di un'asserzione significante e di uno «pseudo-enunciato insignificante» diventerebbe significante, e ciò è egualmente assurdo.

Se ora tentiamo di applicarle al nostro criterio di *demarcazione*, queste critiche si rivelano entrambe innocue. Per quanto riguarda la prima, cfr. § 15, specialmente la nota *2 (e § *22 del *Postscript* cit.). Per quanto riguarda la seconda, osservo che le teorie empiriche (come, ad esempio, quella di Newton) possono contenere elementi «metafisici». Tali elementi, però, non possono essere eliminati da una regola rigida e rapida; anche se riusciamo a presentare la teoria in modo che essa diventi una congiunzione di parti controllabili e di parti non-controllabili, sappiamo, naturalmente, che ora è possibile eliminare una delle sue componenti metafisiche.

Si può considerare il capoverso precedente di questa nota come l'illustrazione di un'altra *regola di metodo* (cfr. al § 80 la fine della nota *4) secondo cui, dopo aver avanzato alcune critiche a una teoria rivale dovremmo sempre fare un serio tentativo di applicare queste critiche, o altre simili, alla nostra teoria.

facile dire in dettaglio in qual modo un complicato sistema di teorie ci aiuti a dedurre le asserzioni-base, o singolari, propongo la definizione seguente. Una teoria si dice «empirica» o «falsificabile» quando divide in modo non ambiguo la classe di tutte le possibili asserzioni-base in due sottoclassi non vuote. Primo, la classe di tutte quelle asserzioni-base con le quali è contraddittoria (o che esclude, o vieta): chiamiamo questa classe la classe dei *falsificatori potenziali* della teoria; secondo, la classe delle asserzioni-base che essa non contraddice (o che «permette»). Possiamo formulare piú brevemente questa definizione dicendo: una teoria è falsificabile se la classe dei suoi falsificatori potenziali non è vuota.

Si può aggiungere che una teoria fa asserzioni soltanto intorno ai suoi falsificatori potenziali. (Asserisce la loro falsità). Intorno alle sue asserzioni-base «lecite», non dice nulla. In particolare, non dice che sono vere [*2].

22. *Falsificabilità e falsificazione.*

Dobbiamo fare una netta distinzione tra falsificabilità e falsificazione. Abbiamo introdotto la falsificabilità soltanto come criterio per stabilire il carattere empirico di un sistema di asserzioni. Per quanto riguarda la falsificazione, dobbiamo introdurre regole speciali che determinano in quali condizioni un sistema si debba considerare falsificato.

Diciamo che una teoria è falsificata soltanto se abbiamo accettato asserzioni-base che la contraddicano (cfr. § 11, regola 2). Questa condizione è necessaria ma non sufficiente; abbiamo visto, infatti, che gli accadimenti singoli, non riproducibili, non hanno alcun significato per la scienza. È dunque difficile che poche asserzioni-base, prive di relazioni tra loro, che contraddicono una teoria, ci inducano a rifiutarla come falsificata. La considereremo falsificata soltanto se sco-

[*2] In realtà, molte delle asserzioni-base «permesse» si contraddiranno reciprocamente in presenza della teoria (cfr. § 38). Per esempio, la legge universale «Tutti i pianeti descrivono orbite circolari» (cioè: «Ogni insieme di posizioni di un qualsiasi pianeta sta sulla stessa circonferenza») è banalmente «esemplificata» da un insieme qualsiasi di non piú di tre posizioni di un pianeta; ma nella maggior parte dei casi due «esempi» simili, presi insieme, contraddiranno la legge.

priamo un *effetto riproducibile* che confuta la teoria. In altre parole accettiamo la falsificazione soltanto quando sia proposta, e risulti corroborata, un'ipotesi empirica di basso livello che descriva un simile effetto. Un'ipotesi di questo genere può essere chiamata un'*ipotesi falsificante*[1]. La condizione che l'ipotesi falsificante debba essere empirica, e perciò falsificabile, significa soltanto che essa deve stare in una certa relazione logica con possibili asserzioni-base; quest'esigenza riguarda dunque soltanto la forma logica dell'ipotesi. La clausola che l'ipotesi debba essere corroborata si riferisce ai controlli che essa dovrebbe aver superato: ai controlli che la mettono a confronto con asserzioni-base accettate[*1].

[1] L'ipotesi falsificante può avere un livello di universalità molto basso (ottenuto, per cosí dire, generalizzando le coordinate di un singolo risultato d'osservazione; come esempio potrei citare il cosiddetto «fatto» di Mach citato nel § 18). Anche se deve poter essere sottoposta a controlli intersoggettivi, in realtà non è necessario che l'ipotesi sia un'asserzione strettamente universale. Cosí, per falsificare l'asserzione «Tutti i corvi sono neri» sarebbe sufficiente l'asserzione, che può essere sottoposta a controlli intersoggettivi, che allo zoo di New York c'è una famiglia di corvi bianchi. * Tutto ciò mostra quanto sia urgente sostituire a un'ipotesi falsificata un'ipotesi migliore. Nella maggior parte dei casi prima di falsificare un'ipotesi ne abbiamo già un'altra in serbo: infatti l'esperimento falsificante è di solito un *esperimento cruciale* destinato a decidere tra le due. Cioè a dire: è suggerito dal fatto che le due ipotesi differiscono già per qualche aspetto, e l'esperimento dispone di questa differenza rifiutandone (almeno) una.

[*1] Può sembrare che questo riferimento alle asserzioni-base accettate contenga i germi di un regresso infinito. Qui, infatti, il nostro problema è questo. Poiché un'ipotesi si falsifica *accettando* un'asserzione-base, abbiamo bisogno di *regole metodologiche per accettare le asserzioni-base.* Ora, se a loro volta queste regole si riferiscono ad asserzioni-base accettate, possiamo trovarci impigliati in un regresso all'infinito. A ciò rispondo che le regole di cui abbiamo bisogno sono unicamente regole per accettare asserzioni-base che falsifichino un'ipotesi ben controllata e finora accettata; e le asserzioni-base alle quali la regola fa ricorso non devono necessariamente avere questo carattere. Inoltre, la regola formulata nel testo è ben lontana dall'esaurire tutti i casi possibili; essa si limita a menzionare un aspetto importante dell'accettazione di asserzioni-base che falsificano un'ipotesi altrimenti feconda, e sarà sviluppata nel capitolo v (in special modo nel § 29).

In una comunicazione personale il professor J. H. Woodger ha sollevato la questione: quante volte un effetto deve poter essere riprodotto, per essere un «*effetto riproducibile*» (o una «*scoperta*»)? La risposta è: in certi casi *neppure una volta.* Se asserisco che c'è una famiglia di corvi bianchi allo zoo di New York, asserisco qualcosa che può essere messo alla prova *in linea di principio.* Se qualcuno desidera controllare la mia asserzione e viene informato, come arriva allo zoo, che la famiglia è morta, o che nessuno ne ha mai sentito parlare, è libero di accettare o di rifiutare la mia asserzione-base falsificante. Di regola egli sarà in possesso dei metodi per formarsi un'opinione esaminando testimonianze, documentazioni ecc.; cioè a dire, facendo appello ad altri fatti controllabili intersoggettivamente e riproducibili (cfr. §§ 27-30).

Dunque le asserzioni-base assolvono a due funzioni differenti. Da un lato, abbiamo usato il sistema di tutte le asserzioni-base *logicamente possibili* allo scopo di ottenere, col suo aiuto, la caratterizzazione logica che stavamo cercando: quella della forma delle asserzioni empiriche. D'altro lato, le asserzioni-base *accettate* costituiscono il punto di partenza per la corroborazione delle ipotesi. Se certe asserzioni-base accettate contraddicono una teoria, riteniamo che offrano sufficienti ragioni per la sua falsificazione soltanto nel caso in cui corroborino, nel medesimo tempo, un'ipotesi falsificante.

23. *Accadimenti ed eventi.*

L'esigenza della falsificabilità, che in partenza era un po' vaga, è stata ora spaccata in due parti. La prima, cioè il postulato metodologico (cfr. § 20), non potrebbe essere resa piú precisa. La seconda, il criterio logico, diventerà perfettamente definita non appena sarà chiaro quali asserzioni dobbiamo chiamare «asserzioni-base» (cfr. § 28). Questo criterio logico è stato finora presentato, in una maniera che possiamo chiamare formale, come una relazione logica tra asserzioni: la teoria e le asserzioni-base. Forse renderò la faccenda piú chiara e intuitiva se esprimerò il mio criterio in un linguaggio piú «realistico», che, sebbene equivalente al modo formale di discorso, è probabilmente un po' piú vicino all'uso ordinario.

In questo modo di discorso «realistico» possiamo dire che un'asserzione singolare (un'asserzione-base) descrive un *accadimento*. Invece di parlare di asserzioni-base che sono escluse o vietate da una teoria, possiamo allora dire che la teoria esclude certi accadimenti possibili, e che sarà falsificata se questi accadimenti possibili hanno realmente luogo.

L'uso di quest'espressione vaga – «accadimento» – è forse esposto a critiche. Qualche volta si è detto[1] che espres-

[1] Specialmente da parte di alcuni autori che si occupano di calcolo delle probabilità. Cfr. KEYNES, *A Treatise on Probability* cit., p. 5. Keynes si riferisce ad Ancillon come al primo che abbia proposto il «modo formale d'espressione», ed anche a Boole, Czuber e Stumpf. * Pur continuando a pensare che le mie definizioni («sintattiche») di «*accadimento*» e di «*evento*»,

sioni come «accadimento» o «evento» dovrebbero essere definitivamente bandite dalla discussione epistemologica, e che non dovremmo parlare di «accadimenti» o di «non-accadimenti», o dell'«avvenire» di «eventi», ma, piuttosto, della verità o della falsità delle asserzioni. Tuttavia preferisco conservare l'espressione «accadimento». È abbastanza facile definire il suo uso in modo da renderlo inattaccabile dalle critiche. Infatti possiamo usare questo termine in modo tale da essere in grado, tutte le volte che parliamo di un accadimento, di parlare invece di qualcuna delle asserzioni singolari che gli corrispondono.

Quando definiamo «accadimento» dobbiamo ricordare che sarebbe del tutto naturale il dire che due asserzioni singolari *logicamente equivalenti* (cioè deducibili l'una dall'altra) descrivono il medesimo accadimento. Ciò suggerisce la seguente definizione. Sia p_k un'asserzione singolare. (L'indice «k» fa riferimento ai nomi individuali o alle coordinate che entrano in p_k). Chiameremo allora accadimento P_k la classe di tutte le asserzioni equivalenti a p_k. Diremo dunque che è un accadimento, per esempio, *che ora stia tuonando in questo posto*. E possiamo considerare questo accadimento come la classe delle asserzioni: «Ora sta tuonando qui», «Sta tuonando sul 13° distretto di Vienna il 10 giugno 1933 alle ore 17,15», e di tutte le altre asserzioni equivalenti a questa. Si può dunque ritenere che la formulazione realistica: «L'asserzione p_k rappresenta l'accadimento P_k» significhi lo stesso che l'asserzione piuttosto ovvia «L'asserzione p_k è un elemento della clase P_k di tutte le asserzioni ad essa equivalenti». Analogamente, consideriamo l'asserzione «L'accadimento P_k è accaduto» (o «sta accadendo») come significante la stessa cosa che «p_k e tutte le asserzioni ad essa equivalenti sono vere».

Lo scopo di queste regole di traduzione non è quello di asserire che chiunque usi la parola «accadimento» secondo il modo di discorso realistico sta pensando a una classe di asserzioni; il loro scopo è semplicemente quello di dare un'in-

date in questo paragrafo, siano adeguate *per il mio scopo*, tuttavia non credo piú che esse siano intuitivamente adeguate. Cioè, non credo che rappresentino in modo adeguato il nostro uso, o le nostre intenzioni. Fu Alfred Tarski che a Parigi, nel 1935, mi fece notare che invece di una definizione «sintattica» ci vorrebbe una definizione «semantica».

terpretazione del modo realistico di discorso che renda intelligibile ciò che si intende dicendo, per esempio, che un accadimento P_k contraddice una teoria t. Ora quest'asserzione non significherà nient'altro che: ogni asserzione equivalente a p_k contraddice la teoria t ed è pertanto un falsificatore potenziale di questa teoria.

Introdurremo ora un altro termine, «evento», per denotare ciò che vi è di *tipico, o di universale*, in un accadimento, o ciò che, in un accadimento, può essere descritto con l'aiuto di nomi universali. (Dunque, per evento non intendiamo un accadimento complesso, o addirittura protratto nel tempo, come può suggerire l'uso ordinario di questo termine). Definiamo: Siano P_k, P_l, ..., elementi di una classe di accadimenti che differiscono *soltanto* relativamente agli individui (alle posizioni, o regioni, spazio-temporali) contenuti in essi; chiamiamo questa classe «l'evento (P)». Conformemente a questa definizione diremo, per esempio dell'asserzione «Qui è stato appena rovesciato un bicchiere d'acqua», che la classe delle asserzioni equivalenti ad essa è un elemento dell'evento «rovesciare un bicchier d'acqua».

Nel parlare dell'asserzione singolare p_k, che rappresenta un accadimento P_k, si può dire, usando il modo di discorso realistico, che quest'asserzione asserisce l'accadimento dell'evento (P) nella posizione spazio-temporale k. E assumiamo che ciò significhi lo stesso che «La classe P_k delle asserzioni singolari equivalenti a p_k, è un elemento dell'evento (P)».

Applicheremo ora al nostro problema la terminologia che abbiamo coniato[2]. Di una teoria, purché sia falsificabile, possiamo dire che esclude, o vieta, non soltanto un accadimento, ma *almeno un evento*. Pertanto la classe delle asserzioni-base vietate, cioè la classe dei falsificatori potenziali della teoria, conterrà sempre, se non è vuota, un numero illimitato di as-

[2] Occorre notare che, sebbene le asserzioni singolari *rappresentino* accadimenti, le asserzioni universali non rappresentano eventi: anzi, li *escludono*. Analogamente al concetto di «accadimento», una «uniformità» o «regolarità» può essere definita dicendo che le asserzioni universali *rappresentano* uniformità. Ma qui non abbiamo bisogno di nessun concetto di questo genere, visto che ci interessa soltanto ciò che le asserzioni universali *escludono*. Per questa ragione, questioni come quella se esistano uniformità («stati di cose» universali, ecc.) non ci riguardano. * Ma tali questioni sono state discusse nel § 79, e ora anche nell'appendice *x e nel § *15 del *Postscript* cit.

serzioni-base; una teoria, infatti, non si riferisce a un individuo come tale. Possiamo chiamare «omotipiche» le asserzioni-base singolari che si riferiscono a *un* evento, al fine di mettere in evidenza l'analogia sussistente tra asserzioni *equivalenti* che descrivono *un* accadimento e asserzioni *omotipiche* che descrivono un evento (tipico). Possiamo allora dire che ogni classe non-vuota di falsificatori potenziali di una teoria contiene almeno una classe non-vuota di asserzioni-base omotipiche.

Immaginiamo ora che la classe di tutte le possibili asserzioni-base sia rappresentata dall'area di un cerchio. L'area del cerchio può essere considerata come rappresentante qualcosa di simile alla totalità di *tutti i possibili mondi d'esperienza*, o di tutti i possibili mondi empirici. Immaginiamo, inoltre, che ciascun evento sia rappresentato da uno dei raggi (o, piú precisamente, da una area molto stretta – o da un settore molto stretto – lungo uno dei raggi) e che due accadimenti qualsiasi che implicano le stesse coordinate (o individui) siano collocati alla stessa distanza dal centro, e quindi sullo stesso cerchio concentrico al primo. Possiamo allora illustrare il postulato della falsificabilità richiedendo che per ogni teoria empirica debba esserci, nel nostro diagramma, almeno *un* raggio (o settore molto stretto) che la teoria vieta.

Quest'illustrazione può dimostrarsi utile nella discussione dei nostri vari problemi [*1], come quello del carattere metafisico delle asserzioni puramente esistenziali (a cui abbiamo fatto un breve cenno nel § 15). È chiaro che a ciascuna di queste asserzioni apparterrà un solo evento (un solo raggio), tale che ciascuna delle varie asserzioni-base appartenenti a quest'evento verificherà l'asserzione puramente esistenziale. Nondimeno, la classe dei suoi falsificatori potenziali è vuota; dunque, dall'asserzione esistenziale *non segue nulla* intorno ai possibili mondi d'esperienza. (Essa non esclude, o vieta, nessuno dei raggi). Il fatto che, per converso, da ogni asserzione-base segua un'asserzione puramente esistenziale, non può essere usato come argomento a sostegno del carattere empirico di quest'ultima. Infatti dalle asserzioni-base

[*1] Quest'illustrazione verrà impiegata, piú particolareggiatamente, nei §§ 31 sgg.

segue anche ogni tautologia, perché una tautologia segue da qualsiasi asserzione.

A questo punto sarebbe forse bene dire una parola riguardo le asserzioni autocontraddittorie.

Mentre le tautologie, le asserzioni puramente esistenziali e le altre asserzioni non-falsificabili asseriscono, per cosí dire, *troppo poco* intorno alla classe di asserzioni-base possibili, le asserzioni autocontraddittorie asseriscono *troppo*. Da un'asserzione autocontraddittoria può essere validamente dedotta qualsiasi asserzione [*2]. Di conseguenza, la classe dei suoi falsificatori potenziali è identica con quella di tutte le possibili asserzioni-base: è falsificata da qualsiasi asserzione. (Si potrebbe forse dire che questo fatto illustra un vantaggio del nostro metodo, cioè del nostro modo di prendere in considerazione possibili falsificatori invece di possibili verificatori. Infatti, se si potesse verificare un'asserzione verificando le sue conseguenze logiche, o renderla, in questo modo, semplicemente probabile, ci si potrebbe poi aspettare che, mediante l'accettazione di una qualsiasi asserzione-base,

[*2] Questo fatto non era generalmente molto capito neppure dopo dieci anni dalla pubblicazione di questo libro. La situazione si può riassumere nel modo seguente: un'asserzione fattualmente falsa «implica materialmente» ogni asserzione (ma non ogni asserzione segue logicamente da essa). Un'asserzione logicamente falsa implica logicamente – o è seguita da – ogni asserzione. Pertanto è essenziale distinguere chiaramente tra un'asserzione *falsa fattualmente* (cioè, sintetica) e un'asserzione *logicamente falsa*, o *incoerente*, o *autocontraddittoria*; cioè a dire un'asserzione da cui può essere dedotta un'asserzione della forma $p.\bar{p}$.

Che un'asserzione contraddittoria implichi logicamente ogni asserzione si può mostrare nel modo che segue.

Dalle «proposizioni primitive» di Russell otteniamo immediatamente:

1) $$p \rightarrow (p \vee q)$$

da cui, sostituendo; prima, «$\bar{p}$» a «p», e poi «$p \rightarrow q$» a «$\bar{p} \vee q$», otteniamo:

2) $$\bar{p} \rightarrow (p \rightarrow q)$$

da cui, per «importazione»,

3) $$\bar{p}.p \rightarrow q.$$

Ma la 3) ci permette di dedurre, usando il *modus ponens, qualsiasi* asserzione q da qualsiasi asserzione della forma «$\bar{p}.p$» o «$p.\bar{p}$». (Si veda anche la mia nota in «Mind», 52 (1943), pp. 47 sgg.). Il fatto che da un insieme contraddittorio di premesse sia possibile dedurre qualsiasi cosa è giustamente dato come noto da P. P. Wiener (*The Philosophy of Bertrand Russell* [La filosofia di Bertrand Russell], a cura di P. A. Schilpp, 1944, p. 264); ma è abbastanza sorprendente che Russell abbia messo in dubbio questo fatto nella sua risposta a Wiener (*ibid.*, pp. 695 sg.) parlando di «proposizioni *false*» dove Wiener parla di «premesse *contraddittorie*». Cfr. il mio *Conjectures and Refutations* cit., pp. 317 sgg.

risulti confermata, o verificata, o almeno resa probabile, qualsiasi asserzione autocontraddittoria).

24. *Falsificabilità e non-contraddittorietà.*

L'esigenza della non-contraddittorietà svolge una funzione particolare fra le varie esigenze che un sistema di teorie o un sistema assiomatico devono soddisfare. Tale esigenza può essere considerata come la prima che dev'essere soddisfatta da *ogni* sistema di teorie, sia empirico sia non-empirico.

Allo scopo di mostrare l'importanza fondamentale di questa esigenza non è sufficiente menzionare il fatto, di per sé ovvio, che un sistema autocontraddittorio dev'essere rigettato perché è «falso». Lavoriamo molto spesso con asserzioni che, sebbene siano di fatto false, conducono a risultati che sono adeguati per certi scopi [*1]. (Un esempio di ciò è fornito dall'approssimazione di Nernst per l'equazione di equilibrio dei gas). Ma l'importanza dell'esigenza della non-contraddittorietà si potrà apprezzare soltanto rendendosi conto che un sistema autocontraddittorio non ci fornisce nessuna informazione. E ciò perché, da esso, può essere derivata qualsiasi conclusione, a nostro piacimento. Pertanto non è possibile enucleare da esso nessun'asserzione, né in quanto incompatibile né in quanto inderivabile, perché tutte le asserzioni sono derivabili da esso. D'altra parte, un sistema non-contraddittorio divide l'insieme di tutte le asserzioni possibili in due sottoinsiemi: quelle che esso contraddice e quelle con le quali è compatibile. (Tra queste ultime ci sono le conclusioni che possono essere derivate dal sistema). Ecco perché la non-contraddittorietà è l'esigenza piú generale a cui deve soddisfare un sistema, empirico o non empirico, che debba avere una qualche utilità.

Oltre all'esigenza della non-contraddittorietà, un sistema deve soddisfare un'ulteriore condizione: dev'essere *falsificabile*. Le due condizioni sono in larga misura analoghe [1]. Le

[*1] Cfr. *Postscript* cit., § *3 (la mia risposta alla «seconda proposta»); e § *12, punto 2).

[1] Cfr. la mia nota in «Erkenntnis», 3 (1933), p. 426. * Tale nota è ora ristampata nell'appendice *I di questo libro.

asserzioni che non soddisfano la condizione della non-contraddittorietà non riescono a differenziare due asserzioni qualsiasi nella totalità di tutte le asserzioni possibili. Le asserzioni che non soddisfano la condizione della falsificabilità non riescono a differenziare due asserzioni qualsiasi nella totalità di tutte le possibili asserzioni-base empiriche.

Capitolo quinto

Il problema della base empirica

Abbiamo ora ridotto la questione della falsificabilità delle teorie a quella della falsificabilità di quelle asserzioni singolari che ho chiamato asserzioni-base. Ma che genere di asserzioni singolari sono le asserzioni-base? In qual modo possono essere falsificate? Allo scienziato che lavora nel campo della ricerca sperimentale queste questioni possono sembrare di poco interesse. Ma le oscurità e i fraintendimenti che circondano il problema rendono consigliabile il discuterle, qui, nei particolari.

25. *L'esperienza percettiva come base empirica: lo psicologismo.*

La dottrina secondo cui le scienze empiriche sono riducibili a percezioni sensibili, e quindi a nostre esperienze, è accettata da molti come una dottrina ovvia e fuori di ogni discussione. Tuttavia questa dottrina sta in piedi, o cade, insieme con la logica induttiva, e qui viene rigettata con essa. Non voglio negare che ci sia una particella di verità nell'opinione secondo cui la matematica e la logica sono basate sul pensiero, e le scienze fattuali sulle percezioni sensibili. Ma ciò che c'è di vero in questo punto di vista ha poca importanza per il problema epistemologico. E in realtà non c'è un problema epistemologico che piú del problema della base delle asserzioni d'esperienza abbia sofferto della confusione tra psicologia e logica.

Il problema della base dell'esperienza ha assillato pochi pensatori cosí profondamente come ha assillato Fries[1]. Egli ha insegnato che, se le asserzioni della scienza non devono essere accettate *dogmaticamente*, dobbiamo essere in grado di *giustificarle*. Se richiediamo una giustificazione per mezzo di argomentazioni basate sul ragionamento nel senso logico, allora ci impegnamo ad accettare il punto di vista secondo cui *le asserzioni possono essere giustificate solo da altre asserzioni*. L'esigenza che *tutte* le asserzioni debbano essere giustificate logicamente (descritta da Fries come una «predilezione per le prove») è pertanto destinata a condurre a un *regresso all'infinito*. Ora, se vogliamo evitare il pericolo del dogmatismo cosí come vogliamo evitare quello di un regresso all'infinito, sembra che l'unica via aperta sia quella del ricorso allo *psicologismo*, cioè alla dottrina secondo cui le asserzioni possono essere giustificate non soltanto da altre asserzioni, ma anche dall'esperienza percettiva. Dovendo affrontare questo *trilemma*, – dogmatismo, regresso all'infinito, o psicologismo – Fries, e con lui quasi tutti gli epistemologi che volevano render conto della nostra conoscenza empirica, optarono per lo psicologismo. Nell'esperienza sensibile, insegnò Fries, abbiamo «conoscenza immediata»[2]; grazie a questa conoscenza immediata possiamo giustificare la nostra «conoscenza mediata», cioè la conoscenza espressa nel simbolismo di qualche linguaggio. E, naturalmente, questa conoscenza mediata include le asserzioni della scienza.

Di solito il problema non viene esplorato fino a questo punto. Nell'epistemologia del sensismo e del positivismo si assume come incontestabile che le asserzioni empiriche della scienza «parlino delle nostre esperienze»[3]. Infatti, come, se non attraverso la percezione sensibile, potremmo mai ottenere una qualsiasi conoscenza dei fatti? Se si limita al pensiero, un uomo non può aggiungere un iota alla sua conoscenza del mondo dei fatti. Pertanto l'esperienza percettiva dev'essere la sola «fonte di conoscenza» di tutte le scienze empiriche. Tutto quello che sappiamo intorno al mondo dei

[1] J. F. FRIES, *Neue oder anthropologische Kritik der Vernunft* [Nuova critica – antropologica – della ragione], 1828-31.

[2] Cfr., ad esempio, J. KRAFT, *Von Husserl zu Heidegger* [Da Husserl a Heidegger], 1932, pp. 102 sg. (*1957², pp. 108 sg.).

[3] Seguo quasi letteralmente l'esposizione di P. Frank (cfr. § 27, nota 4) e di H. Hahn (cfr. § 27, nota 1).

fatti deve perciò essere esprimibile sotto forma di asserzioni *intorno alle nostre esperienze*. Si può scoprire se questo tavolo sia rosso o azzurro soltanto consultando la nostra esperienza sensibile. Grazie al sentimento immediato di convinzione che essa induce in noi, possiamo distinguere l'asserzione vera, i cui termini concordano con l'esperienza, dall'asserzione falsa, i cui termini non concordano con l'esperienza. La scienza non è altro che un tentativo di classificare e descrivere questa conoscenza percettiva, queste esperienze immediate, la cui verità non possiamo mettere in dubbio; *è la presentazione sistematica delle nostre convinzioni immediate.*

Secondo me questa dottrina trova le sue basi nei problemi dell'induzione e degli universali. Infatti non possiamo enunciare nessun'asserzione scientifica che non vada molto oltre quello che conosciamo con certezza «sulla base dell'esperienza immediata». (Possiamo riferirci a questo fatto come alla «trascendenza inerente ad ogni descrizione»). Ogni descrizione fa uso di nomi (o di simboli, o di idee) *universali*; ogni asserzione ha il carattere di una teoria, di un'ipotesi. L'asserzione: «Questo è un bicchier d'acqua» non può essere verificata da nessun'esperienza basata sull'osservazione. La ragione è che gli universali che compaiono in essa non possono essere messi in relazione con nessun'esperienza sensibile specifica. (Un'«esperienza immediata» è «immediatamente data» *soltanto una volta*: è unica). Con la parola «bicchiere», per esempio, denotiamo corpi chimici che esibiscono un certo *comportamento regolare*, e lo stesso vale per la parola «acqua». Gli universali non possono essere ridotti a classi d'esperienza; essi non possono essere «costituiti»[4].

26. *Sui cosiddetti «enunciati protocollari».*

Il punto di vista che chiamo «psicologismo», e che ho discusso nel paragrafo precedente, sta ancora alla base, cosí mi sembra, di una moderna teoria della base empirica, anche se i suoi sostenitori non parlano di esperienze o di percezioni

[4] Cfr. § 20, nota 2 e il testo. * «Costituito» è il termine usato da Carnap.

ma, piuttosto, di «enunciati»: enunciati che rappresentano esperienze. Neurath[1] e Carnap[2] li chiamano *enunciati protocollari*.

Una teoria analoga è stata sostenuta, in tempi ancor precedenti, da Reininger. Il suo punto di partenza era la questione: dove è situata la corrispondenza, o la concordanza, tra un'asserzione e lo stato di cose che essa descrive? Egli arrivò alla conclusione che le asserzioni possono essere confrontate soltanto con asserzioni. Secondo il suo punto di vista, la corrispondenza di un'asserzione con un fatto non è nient'altro che una corrispondenza logica tra asserzioni che appartengono a differenti livelli di universalità: è «... la corrispondenza di asserzioni di livello superiore con asserzioni che hanno un contenuto simile e in definitiva con asserzioni che registrano esperienze»[3]. (Queste sono talvolta chiamate da Reininger «asserzioni elementari»)[4].

Carnap parte da una domanda un po' diversa. La sua tesi è che tutte le indagini filosofiche parlino «delle forme del discorso»[5]. La logica della scienza deve investigare «le forme del linguaggio scientifico»[6]. Essa non parla di «oggetti» fisici, ma di parole; non di fatti, ma di enunciati. A questo modo corretto del discorso, il «*modo formale del discorso*», Carnap contrappone il modo del discorso ordinario, o, come lo chiama lui, il «modo materiale del discorso». Per evitare le confusioni si dovrebbe usare il modo materiale del discorso soltanto dove sia possibile tradurlo nel corretto «modo formale del discorso».

Ora questo punto di vista – col quale posso anche essere d'accordo – conduce Carnap, come Reininger, ad asserire che nella logica della scienza non dobbiamo dire che gli enunciati si controllano paragonandoli con stati di cose o con esperienze: possiamo soltanto dire che possono essere controllati paragonandoli con altri *enunciati*. Ciononostante Carnap con-

[1] Il termine è dovuto a O. Neurath: cfr., per esempio, *Soziologie* [Sociologia], in «Erkenntnis», 2 (1932), p. 393.

[2] CARNAP, in «Erkenntnis», 2 (1932), pp. 432 sgg.; 3 (1932), pp. 107 sgg.

[3] R. REININGER, *Metaphysik der Wirklichkeit* [Metafisica della realtà], 1931, p. 134.

[4] *Ibid.*, p. 132.

[5] CARNAP, *These der Metalogik* [Tesi della metalogica], in «Erkenntnis», 2 (1932), p. 435.

[6] ID., in «Erkenntnis», 3 (1933), p. 228.

serva sostanzialmente le idee fondamentali dell'approccio psicologistico al problema; non fa altro che tradurle in «modi formali del discorso». Dice che gli enunciati della scienza si controllano «con l'aiuto di enunciati protocollari»[7]; ma, poiché questi si definiscono come asserzioni o enunciati «che non hanno bisogno di conferma, ma servono come base per tutti gli altri enunciati della scienza» ciò equivale a dire – secondo il modo ordinario, «materiale», del discorso – che gli enunciati protocollari si riferiscono al «dato»: ai «dati dei sensi». Come la mette lo stesso Carnap, tali enunciati descrivono «i contenuti dell'esperienza immediata, o i fenomeni, e quindi i piú semplici fatti conoscibili»[8]. Ciò mostra abbastanza chiaramente che la teoria degli enunciati protocollari non è altro che psicologismo tradotto nel mondo formale del discorso. Quasi esattamente lo stesso si può dire del punto di vista di Neurath[9]: egli vorrebbe che negli enunciati protocollari le parole come «percepire», «vedere», ecc., ricorressero insieme col nome e cognome dell'autore dell'enunciato protocollare. Come il termine stesso indica, gli enunciati protocollari dovrebbero essere *registrazioni o protocolli di osservazioni o percezioni immediate.*

Come Reininger[10], Neurath sostiene che le asserzioni di percezione che registrano esperienze – cioè gli «enunciati protocollari» – non sono irrevocabili, ma che talvolta possono essere rigettate. Neurath si oppone[11] al punto di vista di Carnap (in seguito corretto dall'autore[12]) che gli enunciati protocollari sono definitivi e *non hanno bisogno di conferma.* Ma mentre Reininger descrive un metodo per controllare, in caso di dubbio, le sue asserzioni «elementari» per mezzo di altre asserzioni – è il metodo che consiste nel dedurre, e nel controllare le conclusioni – Neurath non fornisce nessun metodo di questo genere. Egli si limita ad osservare che possia-

[7] CARNAP, in «Erkenntnis», 2 (1932), p. 437.
[8] *Ibid.*, p. 438.
[9] O. NEURATH, in «Erkenntnis», 3 (1933), pp. 205 sgg. Neurath dà il seguente esempio: «Un enunciato protocollare completo potrebbe suonare così: {Protocollo di Otto alle ore 3 e 17 minuti [il discorso-pensiero di Otto ha avuto luogo alle ore 3 e 16 minuti (nella stanza, alle ore 3 e 15 minuti, c'era un tavolo osservato da Otto)]}».
[10] REININGER, *Metaphysik der Wirklichkeit* cit., p. 133.
[11] NEURATH, in «Erkenntnis», 3 (1933), pp. 209 sg.
[12] CARNAP, in «Erkenntnis», 3 (1933), pp. 215 sgg.; cfr. § 29, nota 1.

mo «cancellare» un enunciato protocollare che contraddica a un sistema «... o altrimenti accettarlo e modificare il sistema in modo tale che, con l'aggiunta di questo enunciato, esso rimanga coerente».

Il punto di vista di Neurath, secondo cui gli enunciati protocollari non sono inviolabili, rappresenta, secondo me, un notevole progresso. Ma lasciando da parte la sostituzione, alle percezioni, delle asserzioni di percezione – che è una mera traduzione nel modo formale del discorso – la dottrina secondo cui gli enunciati protocollari possono essere sottoposti a revisione costituisce il suo unico passo avanti nei confronti della teoria (dovuta a Fries) dell'immediatezza della conoscenza percettiva. È un passo nella direzione giusta; ma non porta in nessun luogo se non è seguito immediatamente da un altro passo: abbiamo bisogno di un insieme di regole che limitino la possibilità di «cancellare» (o se no di «accettare») arbitrariamente un enunciato protocollare. Neurath non è in grado di fornirci nessuna regola di questo genere, e cosí, senza accorgersene, butta l'empirismo dalla finestra. Infatti, senza tali regole, le asserzioni empiriche non si distinguono piú da qualsiasi altro genere di asserzioni. Se è permesso (come, secondo il punto di vista di Neurath, a ciascuno è permesso) semplicemente di «cancellare» un enunciato protocollare che non sia conveniente, ogni sistema diventa difendibile. In questo modo non soltanto è possibile riscattare qualsiasi sistema, come fa il convenzionalismo, ma, data una buona quantità di enunciati protocollari, possiamo addirittura confermarli grazie alla testimonianza di testimoni che hanno testimoniato e registrato ciò che hanno visto e udito. Neurath evita una forma di dogmatismo, tuttavia apre la strada per la quale un qualsiasi sistema arbitrario può autoproclamarsi «scienza empirica».

Non è dunque troppo facile vedere quale parte abbiano, nello schema di Neurath, gli enunciati protocollari. Secondo il primo punto di vista di Carnap il sistema degli enunciati protocollari era la pietra di paragone con la quale si doveva giudicare ogni asserzione di una scienza empirica. Ecco perché tali enunciati dovevano essere «inconfutabili». Infatti essi soli potrebbero scalzare enunciati – enunciati diversi dagli enunciati protocollari, naturalmente. Ma a che cosa servirebbero se fossero privati di questa funzione, e non potessero a loro volta essere scalzati da teorie? Poiché Neurath non tenta di risolvere il problema della demarcazione, sembra che la sua idea di enunciati protocollari non sia altro che una reliquia – il monumento alla memoria del punto di vista tradizionale secondo cui la scienza empirica prende le mosse dalla percezione.

27. *L'oggettività della base empirica.*

Propongo di guardare alla scienza in un modo che è di poco differente da quello sostenuto dalle varie scuole psicologistiche: desidero *distinguere nettamente tra la scienza oggettiva da un lato e la «nostra conoscenza» dall'altro.*

Sono pronto ad ammettere che soltanto l'osservazione può fornirci la «conoscenza dei fatti» e che (come dice Hahn) possiamo «diventare consapevoli dei fatti soltanto sulla base dell'osservazione»[1]. Ma questa consapevolezza, questa nostra conoscenza, non giustifica, né consolida, la verità di nessun'asserzione. Non credo perciò che la domanda che l'epistemologia deve porsi sia «... su che cosa riposa la nostra *conoscenza?...*, o, piú esattamente, come posso, dopo aver avuto l'*esperienza S*, giustificare la mia descrizione di tale esperienza, e difenderla contro il dubbio?»[2]. La cosa non funzionerebbe neppure se cambiassimo il termine «esperienza» in «enunciato protocollare». Secondo me ciò che l'epistemologia deve chiedersi è, piuttosto: in qual modo controlliamo le asserzioni scientifiche per mezzo delle loro conseguenze deduttive? [*1]. E *quale genere* di conseguenze possiamo scegliere per questo scopo se, a loro volta, tali conseguenze devono poter essere controllate intersoggettivamente?

Finora questo tipo di approccio oggettivistico e non psicologistico è stato accettato quasi da tutti per quanto riguarda

[1] H. HAHN, *Logik, Mathematik und Naturerkennen* cit., pp. 19 e 24.

[2] Si veda per esempio CARNAP, *Scheinprobleme in der Philosophie* [Pseudoproblemi nella filosofia], 1928, p. 15. Il corsivo è nostro.

[*1] Attualmente formulerei la questione cosí: come è possibile *sottoporre a critica* le nostre teorie (o le nostre ipotesi, o le nostre congetture) nel modo migliore, invece di difenderle contro il dubbio? Naturalmente, secondo il mio punto di vista, il *controllare* è sempre stato parte del *criticare* (cfr. *Postscript* cit., § *7, la parte di testo compresa fra le note 5 e 6 e la fine del § *52).

le asserzioni logiche o tautologiche. Tuttavia, non molto tempo fa si è sostenuto che la logica è una scienza che tratta dei processi mentali e delle loro leggi; le leggi del nostro pensiero. Da questo punto di vista, per la logica non si poteva trovare altra giustificazione che non fosse il supposto fatto che non potremmo pensare in nessun altro modo. Sembrava che un'inferenza logica dovesse essere giustificata perché la si esperisce come una necessità del nostro pensiero, come un sentimento dell'essere costretti a pensare lungo certe linee. Nel campo della logica questo tipo di psicologismo appartiene, forse, al passato. Nessuno mai sognerebbe di giustificare la validità di un'inferenza logica o di difenderla contro i dubbi, scrivendo a fianco di essa, sul margine del foglio, il seguente enunciato protocollare: «Protocollo: oggi, nell'esaminare questa catena di inferenze, ho provato un acuto senso di convinzione».

Quando si arriva alle *asserzioni empiriche della scienza* la posizione è molto differente. Qui tutti credono che esse siano fondate su esperienze, quali le percezioni; o, secondo, il modo formale del discorso, su enunciati protocollari. Quasi tutti possono vedere che ogni tentativo di basare le asserzioni logiche sugli enunciati protocollari è un caso di psicologismo; ma, abbastanza curiosamente, quando si arriva alle asserzioni empiriche, lo stesso genere di cose passa oggi sotto il nome di «fisicalismo». Tuttavia, sia che si mettano in questione asserzioni della logica, sia che si mettano in questione asserzioni della scienza empirica, io penso che la risposta sia la stessa: la nostra *conoscenza*, che può essere descritta, vagamente, come un sistema di *disposizioni*, e che può interessare la psicologia, può essere collegata in entrambi i casi con sentimenti di credenza o di convinzione: nell'un caso, forse, con la sensazione di essere costretti a pensare in un certo modo; nell'altro con quella di «assicurazione percettiva». Ma tutto ciò interessa soltanto lo psicologo, e non sfiora neppure problemi come quelli delle connessioni logiche tra le asserzioni scientifiche, che sono le sole ad interessare l'epistemologo

(C'è una diffusa credenza secondo cui, dal punto di vista dell'epistemologia, l'asserzione «Io vedo che questo tavolo qui è bianco» possiede qualche profondo vantaggio sull'asserzione «Questo tavolo qui è bianco». Ma dal punto di vista della valutazione dei suoi possibili controlli oggettivi, la prima asserzione, che parla di me, non sembra piú sicura della seconda, che parla del tavolo che c'è qui).

C'è soltanto un modo per assicurarci della validità di una catena di ragionamenti logici; ed è quello che consiste nel mettere questi ragionamenti sotto la forma in cui è piú facile controllarli: la spezziamo in molti piccoli passi, ciascuno facile da ispezionare da parte di chiunque abbia imparato la tecnica, matematica o logica, della trasformazione degli enunciati. Se, dopo di ciò, una qualsiasi persona solleva ancora dubbi, non possiamo far altro che chiedere a questa persona di indicare un errore nei passi della prova, o di ripensarci su. Nel caso delle scienze empiriche la situazione è esattamente la stessa. Una qualsiasi asserzione empirica della scienza può essere presentata (descrivendo disposizioni sperimentali, ecc.) in modo tale che chiunque abbia imparato la tecnica relativa possa controllarla. Se il risultato del controllo è che questa persona rigetta l'asserzione, allora non saremmo soddisfatti se costui ci dicesse tutto dei suoi sentimenti di dubbio o di convinzione riguardanti le sue percezioni. Ciò che deve fare è formulare un'asserzione che contraddica alla nostra e darci le istruzioni per controllarla. Se il nostro oppositore non è in grado di farlo, non possiamo far altro che chiedergli di dare un altro sguardo, forse piú accurato, al nostro esperimento e di ripensarci su.

Un'asserzione che, a causa della sua forma logica, non possa essere controllata può nel migliore dei casi operare nella scienza come uno stimolo: può suggerire un problema. Nel campo della logica e della matematica, questo può essere esemplificato dal problema di Fermat, e, nel campo, diciamo, della storia naturale, dai resoconti sui serpenti di mare. In questi casi la scienza non dice che i rapporti siano infondati: che Fermat fosse in errore, o che tutti i rapporti riguardanti l'osservazione di serpenti di mare siano menzogne. Al contrario, sospende il giudizio [3].

La scienza può essere considerata da vari punti di vista, non soltanto da quello dell'epistemologia; per esempio, possiamo considerarla come un fenomeno biologico o sociologi-

[3] Cfr. l'osservazione sugli «effetti occulti» nel § 8.

co. In questo senso potrebbe essere descritta come uno strumento paragonabile, forse, a qualcuna delle nostre macchine industriali. La scienza può essere considerata come un mezzo di produzione – come l'ultima parola in fatto di «produzione indiretta» [4]. Anche da questo punto di vista la scienza non è connessa con «la nostra esperienza» piú strettamente di quanto non lo siano gli altri strumenti o mezzi di produzione. E anche se la consideriamo come qualcosa che soddisfa i nostri bisogni intellettuali, la sua connessione con le nostre esperienze non differisce, in linea di principio, da quella di qualsiasi altra struttura oggettiva. Sono pronto ad ammettere che non sia scorretto il dire che la scienza è «... uno strumento» che ha per scopo il «... predire, dalle esperienze immediate, o date, esperienze successive, e anche di controllarle fin dove ciò sia possibile» [5]; ma non penso che questo discorso intorno alle esperienze contribuisca alla chiarezza. La sua importanza non è molto maggiore di quella, ad esempio, di una caratterizzazione non scorretta di una trivella petrolifera, mediante l'asserzione che il suo scopo è quello di darci certe esperienze; non il petrolio, ma la vista e l'odore del petrolio; non il denaro, ma la sensazione di possedere denaro.

28. *Asserzioni-base.*

Ho già accennato brevemente alla parte che le asserzioni-base hanno all'interno della teoria epistemologica che sostengo. Abbiamo bisogno di tali asserzioni per decidere se una teoria debba essere chiamata falsificabile, cioè empirica (cfr. § 21), e ne abbiamo bisogno per corroborare le ipotesi falsificanti, e dunque per falsificare le teorie (cfr. § 22).

Pertanto le asserzioni-base debbono soddisfare le seguenti condizioni. *a*) Da un'asserzione universale senza condizioni iniziali non può essere dedotta nessun'asserzione-base [*1].

[4] L'espressione («*Produktionsumweg*») è di Böhm-Bawerk.

[5] P. FRANK, *Das Kausalgesetz und seine Grenzen* [La legge della causalità e i suoi limiti], 1932, p. 1. * Per ciò che concerne lo strumentalismo si veda la nota *1, che precede il § 12, e il mio *Postscript* cit., specialmente i §§ *12-*15.

[*1] Quando stavo scrivendo questo libro, pensavo che fosse abbastanza ovvio che dalla sola teoria di Newton, senza condizioni iniziali, non fosse de-

D'altra parte, *b*), un'asserzione universale e un'asserzione-base possono contraddirsi reciprocamente. La condizione *b*) può essere soddisfatta soltanto se è possibile derivare la negazione di un'asserzione-base dalla teoria che essa contraddice. Da questa e dalla condizione *a*) segue che un'asserzione-base deve avere una forma logica tale che la sua negazione non possa essere a sua volta un'asserzione-base.

Abbiamo già incontrato asserzioni la cui forma logica è differente da quella delle loro negazioni. Si tratta delle asser-

ducibile nulla che avesse la natura di un'asserzione di osservazione (e pertanto non fossero certamente deducibili asserzioni-base). Sfortunatamente risultò che questo fatto, e le sue conseguenze per il problema delle asserzioni di osservazione, o «asserzioni-base», non fu apprezzato da alcuni critici del mio libro. Mi sia pertanto concesso aggiungere qui alcune osservazioni.

In primo luogo, da pure asserzioni universali – per es., «Tutti i cigni sono bianchi» – non segue nulla di osservabile. Questo si vede facilmente se prendiamo in considerazione il fatto che «Tutti i cigni sono bianchi» e «Tutti i cigni sono neri» non si contraddicono l'una coll'altra, ma, prese insieme, implicano semplicemente che non esistono cigni; ed è chiaro che questa non è un'asserzione d'osservazione, e neanche un'asserzione che possa essere «verificata». (Un'asserzione falsificabile in modo unilaterale, come «Tutti i cigni sono bianchi», ha comunque la stessa forma logica di «Non esistono cigni», essendo equivalente a «Non esistono cigni non-bianchi»).

Ora, se si ammette ciò, si vedrà subito che le asserzioni singolari che *possono* essere dedotte da asserzioni puramente universali non possono essere asserzioni-base. Ho in mente asserzioni della forma: «Se c'è un cigno nel posto *k*, allora c'è un cigno bianco nel posto *k*». (O: «Al posto *k* non c'è nessun cigno o c'è un cigno bianco»). Vediamo subito, ora, perché queste «asserzioni esemplificative» (come possiamo chiamarle) non sono asserzioni-base. La ragione è che tali asserzioni esemplificative *non possono adempiere all'ufficio di asserzioni di controllo* (o falsificatori potenziali), che è esattamente l'ufficio a cui dovrebbero adempiere le asserzioni-base. Se dovessimo accettare le asserzioni esemplificative come asserzioni di controllo, ne otterremmo, per ogni teoria (e perciò *sia* per «Tutti i cigni sono bianchi», *sia* per «Tutti i cigni sono neri»), un numero esorbitante, e addirittura infinito di verificazioni, una volta che si accetti come un fatto che la parte preponderante del mondo è vuota di cigni.

Poiché le «asserzioni esemplificative» sono derivabili da asserzioni universali, le loro negazioni devono essere falsificatori potenziali, e *possono* pertanto essere asserzioni-base (quando siano soddisfatte le condizioni che stabiliremo in seguito, nel testo). Viceversa, le asserzioni esemplificative avranno la forma di asserzioni-base negate (cfr. anche § 80, nota *4). È interessante notare che le asserzioni-base (che sono troppo forti per essere derivabili da sole leggi universali) avranno un contenuto informativo maggiore di quello delle loro negazioni esemplificative; questo significa che *il contenuto delle asserzioni-base eccede la loro probabilità logica* (perché deve essere maggiore di ½).

Queste sono alcune delle considerazioni che stavano alla base della mia teoria della forma logica delle asserzioni-base. Cfr. il mio *Conjectures and Refutations* cit., pp. 386 sg.

zioni universali e delle asserzioni esistenziali: esse sono negazioni le une delle altre e differiscono quanto alla loro forma logica. Le asserzioni *singolari* possono essere costruite in modo analogo. Si può dire che l'asserzione: «Nella regione spazio-temporale *k* c'è un corvo» sia differente, quanto alla sua forma logica (e non soltanto quanto alla sua forma linguistica), dall'asserzione «Nella regione spazio-temporale *k* non c'è nessun corvo». Un'asserzione della forma «Nella regione *k* c'è una cosa cosí e cosí», o «Un evento cosí e cosí sta accadendo nella regione *k*» (cfr. § 23) può essere chiamata un'«asserzione esistenziale singolare», o un'«asserzione *singolare* "c'è"». E l'asserzione che risulta dalla sua negazione, cioè «Nella regione *k* non c'è nessuna cosa cosí e cosí» o, «Nella regione *k* non sta accadendo nessun evento del tipo cosí e cosí», può essere chiamata un'«asserzione *singolare* di non-esistenza», o un'«asserzione singolare "non-c'è"».

Possiamo ora formulare la seguente regola che riguarda le asserzioni-base: *le asserzioni base hanno la forma di asserzioni singolari esistenziali.* Questa regola dice che le asserzioni-base soddisferanno la condizione *a*), perché un'asserzione singolare esistenziale non può mai essere dedotta da un'asserzione strettamente universale, cioè da un'asserzione stretta di non-esistenza. Esse soddisferanno anche la condizione *b*), come si può vedere dal fatto che da ogni asserzione singolare esistenziale si può derivare un'asserzione puramente esistenziale, semplicemente tralasciando ogni riferimento a una qualsiasi regione singola dello spazio e del tempo; e, come abbiamo visto, un'asserzione puramente esistenziale può davvero contraddire una teoria.

Si dovrebbe far osservare che la congiunzione di due asserzioni-base *d* e *r* che non si contraddicono l'una con l'altra è a sua volta un'asserzione-base. Qualche volta possiamo anche ottenere un'asserzione-base congiungendo un'asserzione-base a un'altra asserzione che non è un'asserzione-base. Per esempio, possiamo formare la congiunzione dell'asserzione-base *r*: «Nel luogo *k* c'è un indice», con l'asserzione singolare di non-esistenza $\bar{p}$: «Non c'è nessun indice in moto nel posto *k*». È chiaro infatti che la congiunzione $r.\bar{p}$ (*r* e *non-p*) delle due asserzioni, è equivalente all'asserzione singolare esistenziale «C'è un indice in riposo nel posto *k*». La conseguenza di ciò è che, se ci danno una teoria *t* e le condizioni iniziali *r*, dalle quali deduciamo la predizione p, allora l'asserzione $r.\bar{p}$ sarà un falsificatore della teoria, e dunque un'asserzione-base. (D'altra parte, l'asserzione condizionale «$r \rightarrow p$», cioè «Se r allora p», non è un'asserzione-base piú di quanto non lo sia la negazione $\bar{p}$, poiché è equivalente alla negazione di un'asserzione base, cioè alla negazione di $r.\bar{p}$).

Queste sono le esigenze formali a cui devono soddisfare le asserzioni-base: e tali condizioni sono soddisfatte da tutte le asserzioni singolari esistenziali. Oltre a queste, un'asserzione-base deve anche soddisfare una condizione materiale; una condizione che concerne l'evento che, come ci dice l'asserzione-base, sta accadendo nel luogo k. Questo evento dev'essere «*osservabile*»; cioè a dire, le asserzioni-base devono poter essere controllabili intersoggettivamente, mediante l'«osservazione». Poiché sono asserzioni singolari, quest'esigenza può riferirsi naturalmente soltanto a osservatori che siano opportunamente collocati nello spazio e nel tempo (non elaborerò questo punto).

Indubbiamente ora sembrerà che, dopo tutto, nel richiedere l'osservabilità io abbia permesso allo psicologismo di reinsinuarsi tranquillamente nella mia teoria. Ma le cose non stanno cosí. Ammetto che sia possibile interpretare in senso psicologistico il concetto di *evento osservabile*; ma uso questo concetto in un senso tale che esso potrebbe egualmente essere sostituito da: «evento che implica la posizione e il movimento dei corpi fisici macroscopici». Oppure potremmo stabilire, piú precisamente, che ogni asserzione-base dev'essere a sua volta un'asserzione intorno a posizioni relative di corpi fisici, o dev'essere equivalente a qualche asserzione-base di questo tipo «meccanicistico» o «materialistico». (Il fatto che questa stipulazione sia possibile è in relazione con il fatto che una teoria che può essere controllata intersoggettivamente potrà anche essere controllata intersensibilmente[1]. Cioè a dire, i controlli che implicano la percezione da parte di uno dei nostri sensi possono, in linea di principio, essere sostituiti da controlli che implicano altri sensi). Cosí, la critica secondo la quale nel fare appello all'osservabilità ho riammesso furtivamente lo psicologismo, non avrebbe maggior forza di quella secondo cui avrei ammesso il meccanicismo o

[1] CARNAP, in «Erkenntnis», 2 (1932), p. 445.

il materialismo. Ciò mostra che la mia teoria è, in realtà, perfettamente neutrale e che nessuna di queste etichette può esserle applicata. Dico questo soltanto per salvare il termine «osservabile», come lo uso io, dallo stigma dello psicologismo. (Le osservazioni e le percezioni possono essere psicologiche, ma l'osservabilità non lo è). Non ho alcuna intenzione di *definire* il termine «osservabile» o «evento osservabile», benché sia prontissimo a chiarirlo per mezzo di esempi di tipo psicologistico o meccanicistico. Penso che questa parola dovrebbe essere introdotta come un termine indefinito che diventa sufficientemente preciso con l'uso: come un concetto primitivo il cui uso l'epistemologo deve imparare, proprio come deve imparare l'uso del termine «simbolo», o come il fisico deve imparare l'uso del termine «punto-massa».

Pertanto le asserzioni-base – nel modo materiale del discorso – asseriscono che in una certa regione dello spazio e del tempo sta accadendo un evento osservabile. I vari termini usati in questa definizione, ad eccezione del termine primitivo «osservabile», sono stati spiegati con maggior precisione nel § 23; «osservabile» è indefinito ma, come abbiamo visto, può anche essere spiegato in modo piuttosto preciso.

29. *La relatività delle asserzioni-base. Risoluzione del trilemma di Fries.*

Tutti i controlli di una teoria, sia che mettano capo alla corroborazione, sia che abbiano come risultato la falsificazione della teoria stessa, devono arrestarsi a qualche asserzione-base o ad altre asserzioni che *decidiamo di accettare.* Se non perveniamo a nessuna decisione, e non accettiamo l'una o l'altra delle asserzioni-base, il controllo non ci avrà condotto da nessuna parte. Ma, considerata da un punto di vista logico, la situazione non è mai tale da costringerci ad arrestarci a questa particolare asserzione-base piuttosto che a quell'altra, o addirittura da costringerci a rinunciare al controllo. Infatti qualsiasi asserzione-base può a sua volta essere controllata usando come pietra di paragone qualunque asserzione-base che possa essere dedotta da essa, con l'aiuto di qualche teoria: sia di quella che si deve controllare sia di un'altra teoria.

Questa procedura non ha alcun termine naturale[1]. Cosí, se il controllo non ci porta in nessun luogo, non ci rimane che arrestarci ad un punto o all'altro, e dire, almeno per il momento, che siamo soddisfatti.

È abbastanza facile vedere che in questo modo arriviamo a un procedimento secondo il quale ci fermiamo soltanto a un genere di asserzione particolarmente facile da controllare. Ciò infatti significa che ci arrestiamo ad asserzioni sulla cui accettazione o sul cui rifiuto i vari ricercatori possono mettersi facilmente d'accordo. E se non si mettono d'accordo andranno avanti con i controlli o li ricominceranno da capo. Se neanche questo porta a un risultato possiamo dire che le asserzioni in questione non potevano essere controllate intersoggettivamente o che, dopo tutto, non stavamo trattando con eventi osservabili. Se un giorno gli osservatori scientifici non potessero piú mettersi d'accordo sulle asserzioni-base ciò significherebbe un fallimento del linguaggio come mezzo di comunicazione universale. Questo equivarrebbe a una nuova «Babele delle lingue»: la ricerca scientifica sarebbe ridotta all'assurdo. In questa nuova Babele il maestoso edificio della scienza sarebbe ben presto ridotto in rovina.

Proprio come una prova logica ha raggiunto una forma soddisfacente quando il lavoro difficoltoso è terminato e tutto può essere riscontrato facilmente, cosí, dopo che la scienza ha compiuto il suo lavoro di deduzione o di spiegazione, ci arrestiamo ad asserzioni-base che possono essere controllate facilmente. È chiaro che le asserzioni intorno alle esperienze personali – cioè gli enunciati protocollari – *non* sono di questo genere; perciò non saranno molto adatte a servire da asserzioni alle quali arrestarsi. Naturalmente facciamo uso di registrazioni o protocolli, quali i certificati di prove emessi

[1] Cfr. CARNAP, in «Erkenntnis», 3 (1933), p. 224. Posso accettare questa versione che Carnap dà della mia teoria, salvo che per alcuni dettagli, neanche troppo importanti. Tali sono: primo, il suggerimento che le asserzioni-base (che Carnap chiama «asserzioni protocollari») siano il punto di partenza dal quale la scienza viene costruita; secondo, l'osservazione (p. 225) che un'asserzione protocollare può essere confermata «con il grado di certezza cosí e cosí»; terzo, che le «asserzioni intorno alle percezioni» costituiscono «anelli egualmente validi della catena» e che proprio a queste asserzioni intorno alla percezione «facciamo appello nei casi critici». Cfr. la citazione nel testo, relativa alla nota che segue. Desidero cogliere l'occasione per ringraziare il professor Carnap per le sue amichevoli parole sulla mia opera, non ancora pubblicata, contenute nel luogo citato.

da un dipartimento di ricerca scientifica e industriale. Questi protocolli, se ce n'è bisogno, possono essere riesaminati. Cosí può rivelarsi necessario, per esempio, controllare i tempi di reazione degli esperti che compiono i controlli (cioè determinare le loro equazioni personali). Ma in generale, e specialmente «... nei casi critici» ci fermiamo ad asserzioni che possono essere controllate facilmente e *non*, come raccomanda Carnap, a enunciati protocollari o di percezione; cioè, *non* «... ci fermiamo proprio a questi... perché il controllo intersoggettivo delle asserzioni riguardanti le percezioni... è relativamente complicato e difficile» [2].

Ora, qual è la nostra posizione nei confronti del trilemma di Fries: la scelta tra dogmatismo, regresso all'infinito e psicologismo? (cfr. § 25). Le asserzioni-base a cui ci arrestiamo, che decidiamo di accettare come soddisfacenti e come sufficientemente controllate hanno sicuramente il carattere di *dogmi*, ma solo in quanto possiamo desistere dal giustificarle mediante ulteriori argomentazioni (o ulteriori controlli). Tuttavia questo genere di dogmatismo è innocuo perché, se ce ne fosse bisogno, sarebbe facile sottoporre queste asserzioni a ulteriori controlli. Ammetto che anche questo rende, in linea di principio, infinita la catena delle deduzioni. Ma questo genere di «*regresso all'infinito*» è anche innocuo, perché nella nostra teoria non si fa questione di tentar di provare, per suo mezzo, una qualsiasi asserzione. E, infine, per quanto riguarda lo *psicologismo*, ammetto di nuovo che la decisione di accettare un'asserzione-base e di dichiararsene soddisfatti è causalmente connessa con le nostre esperienze – specialmente con le nostre *esperienze percettive* – ma è altresí vero che non tentiamo di *giustificare* le asserzioni-base per mezzo di queste esperienze. Le esperienze possono *motivare una decisione*, e quindi l'accettazione o il rifiuto di un'asserzione, ma un'asserzione-base non può essere *giustificata* da esse, piú di quanto non possa essere giustificata battendo il pugno sul tavolo [3].

[2] Cfr. la nota precedente. * Quest'articolo di Carnap contiene la prima notizia pubblicata della mia teoria dei controlli: in questo lavoro le teorie citate qui furono attribuite erroneamente a me.

[3] Mi sembra che il punto di vista qui sostenuto sia piú vicino a quello della scuola filosofica «critica» (kantiana) – forse nella forma rappresentata da Fries – che non al positivismo. Nella sua teoria della «predilezione per le

30. *Teoria ed esperimento.*

Le asserzioni-base si accettano come risultato di una decisione o di un accordo; ed entro questi limiti sono convenzioni. Le decisioni si raggiungono in conformità con un procedimento governato da regole. Tra queste, riveste speciale importanza una regola che ci dice che non dobbiamo accettare *asserzioni-base a casaccio* – cioè, asserzioni-base logicamente sconnesse – ma che dobbiamo accettare le asserzioni-base che incontriamo mentre controlliamo *teorie*, mentre solleviamo, a proposito di queste teorie, questioni euristiche a cui si deve dare una risposta mediante l'accettazione di asserzioni-base.

Dunque la situazione effettiva è piuttosto differente da quella prospettata dall'empirista ingenuo, o da chi crede nella logica induttiva. Costui pensa che si incominci raccogliendo e ordinando le nostre esperienze, e che in questo modo si salga per la scala della scienza. O, per usare un modo di parlare piú formale, che quando desideriamo costruire una scienza dobbiamo raccogliere, prima di tutto, enunciati protocollari. Ma se qualcuno mi comanda: «Registra quello che stai esperendo ora», molto difficilmente saprò come obbedire a un comando cosí ambiguo. Devo registrare che sto scrivendo? Che sento un campanello suonare? Uno strillone gridare? Un altoparlante tuonare? O devo forse registrare che questi rumori mi irritano? E anche se potessi obbedire al comando, la collezione di asserzioni che posso mettere insieme, per quanto ricca, non potrà mai formare una *scienza*. Una scienza esige punti di vista, e problemi teorici.

Di regola, l'accordo circa l'accettazione o il rifiuto di asserzioni-base si raggiunge quando si ha occasione di *applicare* una teoria; di fatto l'accordo fa parte di un'applicazione che sottopone a controllo la teoria. Pervenire a un accordo

prove» Fries mette l'accento sul fatto che le relazioni (logiche) sussistenti tra asserzioni sono piuttosto differenti dalla relazione tra asserzioni e esperienze sensibili; dal canto suo, il positivismo tenta costantemente di abolire la distinzione: o tutta la scienza è resa parte del mio conoscere, della «mia» esperienza sensibile (monismo dei dati sensibili) o le esperienze sensibili sono rese parti della trama scientifica oggettiva dei ragionamenti, sotto forma di asserzioni protocollari (monismo delle asserzioni).

sulle asserzioni-base equivale, come altri tipi di applicazione, a compiere un'azione tendente a uno scopo, guidati da varie considerazioni teoriche.

Ora siamo, penso, nella posizione di risolvere problemi quali ad esempio il problema di Whitehead di come possa darsi che la colazione tattile debba sempre essere servita insieme con la colazione visibile, e il *Times* tattile sia sempre venduto insieme con il *Times* visibile e con quello che possiamo sentir frusciare tra le dita [*1]. Il logico induttivista, che crede che tutta la scienza prenda le mosse da percezioni elementari prive di connessioni reciproche, non può non provare imbarazzo di fronte a simili coincidenze regolari, che devono sembrargli interamente «accidentali». Ciò che gli impedisce di spiegare la regolarità ricorrendo alle teorie è il fatto di essere impegnato nel punto di vista secondo cui le teorie non sono altro che asserzioni di coincidenze regolari.

Ma, secondo la posizione che abbiamo raggiunto qui, le connessioni tra le nostre varie esperienze possono essere spiegate, e dedotte, in termini di *teorie*, che siamo impegnati a controllare. (Le nostre teorie non ci conducono ad aspettare che insieme con la luna visibile ci serviranno una luna tattile; né ci aspettiamo di essere assillati da un incubo uditivo). Rimane, certamente, una questione – una questione a cui ovviamente nessuna teoria falsificabile può dare una risposta, e che pertanto è «metafisica»: come mai abbiamo cosí spesso fortuna con le teorie che costruiamo; come mai ci sono «leggi naturali?» [*2].

Tutte queste considerazioni sono importanti per la *teoria* epistemologica *dell'esperimento*. Il teorico pone allo sperimentatore certe questioni definite, e quest'ultimo, con i suoi esperimenti, tenta di cavar fuori una risposta decisiva a queste questioni, e non ad altre. Anzi, tenta con tutte le sue forze di eliminare tutte le altre questioni. (Qui può rivelarsi importante l'indipendenza relativa dei sottosistemi di una teoria). In questo modo fa sí che, rispetto a questa sola questione, il suo controllo sia «... sensibile al massimo, ma in-

[*1] A. N. WHITEHEAD, *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge* (1919) [Ricerca sui principî della conoscenza naturale], 1925, p. 194.

[*2] Questa questione verrà discussa nel § 79 e nell'appendice *x; si veda anche il *Postscript* cit., specialmente i §§ *15 e *16.

sensibile al massimo rispetto a tutte le altre questioni ad esso associate... Parte del suo lavoro consiste nell'escludere ogni possibile fonte di errore»[1]. Ma è un errore supporre che lo sperimentatore proceda in questo modo «al fine di gettar luce sul compito del teorico»[2], o magari al fine di fornire al teorico una base per le generalizzazioni induttive. Al contrario, il teorico deve aver già compiuto da molto tempo il suo lavoro, o almeno la parte piú importante di esso: deve aver formulato le sue questioni quanto piú esattamente può. È dunque il teorico a mostrare la strada allo sperimentatore. Ma neppure lo sperimentatore è impegnato soprattutto a fare osservazioni esatte: anche il suo lavoro è in gran parte di tipo teorico. La teoria domina il lavoro sperimentale, dalla sua pianificazione iniziale ai tocchi finali che esso riceve in laboratorio[*3].

Ciò è bene illustrato da quei casi in cui il teorico è riuscito a predire un effetto osservabile che è stato prodotto sperimentalmente solo in seguito; forse l'esempio migliore è fornito dalla predizione, dovuta a de Broglie, del carattere ondulatorio della materia, che fu confermata sperimentalmente per la prima volta da Davisson e Germer[*4]. Ed è forse illustrato ancor meglio da quei casi in cui gli esperimenti esercitarono un'influenza cospicua sul progresso delle teorie. Ciò che in questi casi spinge il teorico a cercare una teoria migliore è quasi sempre la *falsificazione* sperimentale di una teoria fino a quel momento accettata e corroborata: è, ancora, la riuscita di controlli guidati dalla teoria. Esempi famosi

[1] H. WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* [Filosofia della matematica e della scienza della natura], 1927, p. 113.

[2] *Ibid.*

[*3] Oggi mi pare che a questo punto avrei dovuto dare maggior rilievo a una concezione che si può trovare espressa in altra parte di questo libro (si vedano per esempio il quarto e l'ultimo capoverso del § 19). Mi riferisco alla concezione secondo cui le osservazioni, e a maggior ragione le asserzioni d'osservazione e le asserzioni riguardanti i risultati sperimentali, sono sempre *interpretazioni* dei fatti osservati; sono *interpretazioni alla luce delle teorie*. È questa una delle principali ragioni per cui è sempre ingannevolmente facile trovare *verificazioni* di una teoria e per cui, se non vogliamo ragionare in circolo, dobbiamo assumere un atteggiamento *altamente critico* verso le nostre teorie. L'atteggiamento consistente nel cercare di *confutarle*.

[*4] La storia è narrata, brevemente e magistralmente, da Max Born in *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, a cura di P. A. Schilpp, 1949, p. 174. Ci sono illustrazioni migliori, come quella della scoperta di Nettuno da parte di Adams e Leverrier, o quella delle onde hertziane.

sono forniti dall'esperimento di Michelson e Morley che portò alla teoria della relatività, e dalla falsificazione, ad opera di Lummer e Pringsheim, della formula della radiazione di Rayleigh e Jeans, e di quella di Wien, che portò alla teoria quantistica. Naturalmente talvolta si fanno anche scoperte accidentali; ma tali scoperte sono relativamente rare. In questi casi, Mach[3] parla giustamente di «una correzione di opinioni scientifiche in seguito a circostanze accidentali» (riconoscendo cosí, a dispetto di se stesso, la significanza delle teorie).

Ora possiamo forse rispondere alla questione: come e perché accettiamo una teoria a preferenza di altre?

La preferenza non è certo dovuta a nulla che somigli a una giustificazione sperimentale delle asserzioni che compongono la teoria; non è dovuta a una riduzione logica della teoria all'esperienza. Scegliamo la teoria che regge meglio il confronto con altre teorie: quella che, per selezione naturale, si dimostra la piú adatta a sopravvivere. Non soltanto tale teoria sarà l'unica che fino a quel momento avrà superato i controlli piú severi: sarà anche l'unica che può essere controllata nel modo piú rigoroso. Una teoria è uno strumento che controlliamo applicandolo, e la cui idoneità giudichiamo in base ai risultati delle sue applicazioni [*5].

Da un punto di vista logico, il controllo di una teoria dipende da asserzioni-base la cui accettazione o il cui rifiuto dipendono, a loro volta, dalle nostre *decisioni*. Sono dunque queste *decisioni* a segnare il destino delle teorie. Entro questi limiti la risposta che io dò alla questione: «In che modo scegliamo una teoria?» somiglia a quella data dal convenzionalista; e, come il convenzionalista, io dico che questa scelta è determinata in parte da considerazioni di utilità. Nonostante ciò c'è una gran differenza tra la mia posizione e quella del convenzionalista. Infatti io sostengo che ciò che caratterizza il metodo empirico è proprio il fatto che la convenzione, o

[3] MACH, *Die Prinzipien der Wärmelehre* cit., p. 438.

[*5] Per una critica del punto di vista «strumentalistico» si vedano i riferimenti contenuti nella nota *1, che precede il § 12 (p. 43) e nell'aggiunta (preceduta dall'asterisco) alla nota 1, § 12.

decisione, non determina immediatamente la nostra accettazione delle asserzioni *universali* ma, al contrario, entra nella nostra accettazione delle asserzioni *singolari*, cioè delle asserzioni-base.

Per il convenzionalista l'accettazione delle asserzioni universali è governata dal suo principio di *semplicità*: egli sceglie il sistema piú semplice. Al contrario io propongo che la prima cosa da prendere in considerazione dev'essere la severità dei controlli. (C'è una stretta connessione tra ciò che io chiamo «semplicità» e la severità dei controlli; tuttavia la mia idea di semplicità differisce grandemente da quella del convenzionalista. Cfr. § 46). E io sostengo che ciò che in ultima istanza decide il destino di una teoria è il risultato di un controllo, cioè un accordo sulle asserzioni-base. Con il convenzionalista, io sostengo che la scelta di una qualunque teoria particolare è un atto, una faccenda pratica. Ma per me la scelta è influenzata in modo decisivo dall'applicazione della teoria e dall'accettazione delle asserzioni-base in relazione con questa applicazione; laddove, per il convenzionalista, sono decisivi i motivi di ordine estetico.

Dunque io mi differenzio dal convenzionalista in quanto sostengo che le asserzioni che si decidono mediante un accordo *non sono universali ma singolari*. E mi differenzio dal positivista perché sostengo che le asserzioni-base non sono giustificabili sulla base delle nostre esperienze immediate ma, dal punto di vista logico, vengono accettate mediante un atto di libera decisione. (Dal punto di vista psicologico questa può essere, forse, una reazione ordinata in vista di uno scopo, e ben adattata).

Quest'importante distinzione tra *giustificazione* e *decisione* – decisione raggiunta in conformità con una procedura governata da regole – può forse essere chiarita con l'aiuto di un'analogia: la vecchia procedura del processo con giuria.

Come quello dello sperimentatore, il *verdetto* della giuria (*vere dictum*: detto con verità), è la risposta a una questione di fatto (*quid facti?*) che dev'essere posta alla giuria nella forma piú esatta e definita. Ma quale questione si ponga, e in che modo la si ponga, dipenderà in massima parte dalla situazione giuridica, cioè dal sistema penale in vigore (che corrisponde a un sistema di teorie). La giuria decide concordemente di accettare un'asserzione su un accadimento fattuale, asserzione che è paragonabile a un'asserzione-base. Il significato di questa decisione sta nel fatto che da essa, insieme con le asserzioni universali del sistema (della legislazione penale) si possono dedurre certe conseguenze. In altre parole, la decisione forma la base per l'*applicazione* del sistema; il verdetto adempie all'ufficio di una «asserzione fattuale vera». Ma è chiaro che l'asserzione non deve necessariamente essere vera soltanto perché la giuria l'ha accettata. Questo fatto è riconosciuto dalla regola che permette che un verdetto venga impugnato o rivisto.

Il verdetto si raggiunge in conformità con una procedura governata da regole. Queste regole sono basate su certi principî fondamentali che sono principalmente, se non unicamente, destinati a metter capo alla scoperta della verità oggettiva. Talvolta lasciano aperta la strada, non soltanto alle convinzioni soggettive, ma anche al pregiudizio personale. Tuttavia, anche se non prendiamo in considerazione questi aspetti particolari della vecchia procedura, e immaginiamo una procedura basata unicamente sullo scopo di promuovere la scoperta della verità oggettiva, potrebbe ancora darsi il caso che il verdetto della giuria non giustificasse mai, o non desse mai ragioni per la verità di ciò che asserisce.

Né per giustificare la decisione presa si possono invocare le convinzioni dei giurati, anche se naturalmente tra queste e quella c'è una stretta connessione causale, determinabile in base a leggi psicologiche. Le convinzioni dei giurati possono pertanto essere chiamate i «motivi» della decisione. Il fatto che le convinzioni non sono giustificazioni è in relazione col fatto che la procedura seguita dalla giuria può essere governata da regole differenti (per esempio dalla regola della maggioranza semplice o della maggioranza qualificata). Ciò mostra che le relazioni tra le convinzioni dei giurati e il loro verdetto possono variare di molto.

Al contrario del verdetto della giuria, il *giudizio* del giudice è «ragionato»: esige, e contiene, una giustificazione. Il giudice tenta di giustificarlo in base a, o di dedurlo logicamente da altre asserzioni, cioè dalle asserzioni del sistema giuridico combinate con il verdetto, che adempie all'ufficio delle condizioni iniziali. Ecco perché il giudizio può essere contestato per ragioni logiche. Invece, la decisione della giuria può essere contestata solo chiedendo se sia stata raggiunta in conformità con le regole istituzionali della procedura; cioè, può essere messa in dubbio dal punto di vista formale, ma non dal punto di vista del suo contenuto. (È significativo il fatto che la giustificazione del contenuto di una decisione sia chiamata «rapporto motivato» e non «rapporto logicamente giustificato»).

L'analogia tra questa procedura e quella con cui decidiamo le asserzioni-base è chiara. Essa getta luce, per esempio, sulla loro relatività, e sul modo in cui le asserzioni-base dipendono da questioni sollevate dalla teoria. Nel caso del processo con giuria sarebbe chiaramente impossibile *applicare* la «teoria», a meno che non ci sia prima un verdetto a cui si è pervenuti in seguito a una decisione. Però il verdetto deve trovar posto in una procedura che si conforma a, e perciò applica, una parte del codice legale generale. Il caso è analogo a quello delle asserzioni-base. La loro accettazione fa parte dell'applicazione di un sistema di teorie; ed è soltanto quest'applicazione a rendere possibile le ulteriori applicazioni del sistema di teorie.

Dunque la base empirica delle scienze oggettive non ha in sé nulla di «assoluto»[4]. La scienza non posa su un solido strato di roccia. L'ardita struttura delle sue teorie si eleva, per

[4] Weyl (*Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* cit., p. 83), scrive: «... questa coppia di opposti, *soggettivo-assoluto* e *oggettivo-relativo* mi sembra contenere una delle piú profonde verità epistemologiche che si possano trarre dallo studio della natura. Chiunque voglia l'assoluto, deve far rientrare nel sacco anche la soggettività – l'egocentricità – e chiunque aspiri all'oggettività non può evitare il problema del relativismo». E prima di questo passo troviamo: «Ciò che è esperito immediatamente è *soggettivo e assoluto*...; dal canto suo, il mondo oggettivo, che la scienza naturale cerca di precipitare in pure forme cristalline... è relativo». Born si esprime in termini simili (*Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen* [La teoria della relatività di Einstein e i suoi fondamenti fisici], 1922[3], introduzione). Fondamentalmente si tratta della teoria kantiana dell'oggettività coerentemente sviluppata (cfr. § 8, nota 5). Anche Reininger fa riferimento a questa situazione. In *Das psycho-physische Problem* [Il problema psicofisico], 1916, p. 29, egli scrive: «La metafisica *come scienza* è impossibile... perché, anche se l'assoluto viene realmente esperito, e per questa ragione può essere sentito intuitivamente, tuttavia esso rifiuta di essere espresso in parole. Perché "*Spricht* die Seele, so spricht, ach! schon die *Seele* nicht mehr". (Quando l'anima *parla*, ahimè! *l'anima* non parla piú)».

cosí dire, sopra una palude. È come un edificio costruito su palafitte. Le palafitte vengono conficcate dall'alto, giú nella palude: ma non in una base naturale o «data»; e il fatto che desistiamo dai nostri tentativi di conficcare piú a fondo le palafitte non significa che abbiamo trovato un terreno solido. Semplicemente, ci fermiamo quando siamo soddisfatti e riteniamo che almeno per il momento i sostegni siano abbastanza stabili da sorreggere la struttura.

Capitolo sesto

Gradi di controllabilità

Le teorie possono essere controllabili piú o meno severamente; cioè a dire, possono essere falsificabili piú o meno facilmente. Ai fini della scelta delle teorie è importante il loro grado di controllabilità.

In questo capitolo istituirò un paragone tra i vari gradi di controllabilità, o falsificabilità, delle teorie mediante il confronto tra le classi dei loro falsificatori potenziali. Quest'indagine è del tutto indipendente dalla questione se sia o no possibile distinguere, in senso assoluto, fra teorie falsificabili e teorie non falsificabili. In effetti si potrebbe dire che questo capitolo «relativizza» l'esigenza della falsificabilità, mostrando che la falsificabilità è questione di grado.

31. *Programma e illustrazione.*

Come abbiamo visto nel § 23, una teoria è falsificabile se esiste almeno una classe non vuota di asserzioni-base omotipiche vietate dalla teoria; cioè, se la classe dei suoi falsificatori potenziali non è vuota. Se, come abbiamo fatto nel § 23, rappresentiamo la classe di tutte le possibili asserzioni-base con un'area circolare e i possibili eventi con i raggi del cerchio, possiamo dire: almeno *un* raggio – o forse, meglio, un ristretto settore la cui larghezza può rappresentare il fatto che l'evento è «osservabile» – dev'essere incompatibile con la teoria, e dev'essere eliminato in base alle sue regole. Si potrebbero perciò rappresentare i falsificatori potenziali delle diverse teorie mediante settori di varia larghezza. E secondo che la larghezza dei settori esclusi dalle teorie sia maggiore o minore, si potrebbe dire che le teorie hanno un numero maggiore o minore di falsificatori potenziali. (La questione se questi «maggiore» o «minore» possano essere precisati sarà, per il momento, lasciata aperta). Si potrebbe dunque dire, inoltre, che se la classe dei falsificatori potenziali di una teoria è «maggiore» di quella di un'altra, la prima teoria avrà piú opportunità di essere confutata dall'esperienza; si può dire cosí che la prima teoria, messa a confronto con la seconda, è «falsificabile a un grado piú alto». Ciò vuol anche dire che la prima teoria *dice di piú* intorno al mondo dell'esperienza di quanto non dica la seconda, perché esclude una classe piú ampia di asserzioni-base. Ciò non altera il nostro ragionamento, anche se in questo modo la classe delle asserzioni permesse diventa piú piccola; infatti abbiamo visto che la teoria non asserisce nulla intorno a questa classe. Si può dunque dire che l'ammontare di informazione empirica fornito da una teoria, ossia il *contenuto empirico* della teoria, cresce col crescere del suo grado di falsificabilità.

Immaginiamo ora che ci sia data una teoria, e che il settore che rappresenta le asserzioni-base vietate dalla teoria diventi sempre piú largo. Alla fine, le asserzioni-base *non* vietate dalla teoria saranno rappresentate da un settore residuo molto stretto. (Perché la teoria sia coerente, deve pur sempre rimanere un tale settore). Ovviamente, una teoria come questa sarà molto facile da falsificare, perché lascia soltanto uno stretto margine di possibilità al mondo dell'esperienza; essa infatti elimina quasi tutti gli eventi concepibili, cioè quasi tutti gli eventi logicamente possibili. Asserisce tanto intorno al mondo dell'esperienza, e il suo contenuto empirico è tanto grande, che le rimane, per cosí dire, soltanto una piccola possibilità di sfuggire alla falsificazione.

Ora, lo scopo della scienza teorica è precisamente quello di ottenere teorie che siano facilmente falsificabili in questo senso. Il suo scopo è quello di restringere al minimo il campo degli eventi permessi e, se è possibile, di ridurli a un grado tale che ogni restrizione ulteriore condurrebbe a un'effettiva falsificazione empirica della teoria. Se mai riuscissimo a ottenerla, una teoria come questa descriverebbe il «nostro mondo particolare» con tutta la precisione che ci si può attendere da una teoria; infatti enucleerebbe il mondo della «nostra esperienza» dalla classe di tutti i mondi d'esperienza logicamente possibili, con la massima precisione raggiungibile dalla scienza teorica. Caratterizzerebbe come «permessi» tutti gli eventi o tutte le classi di accadimenti che effettivamente incontriamo e osserviamo, e soltanto questi [*1]

32. *Come mettere a confronto classi di falsificatori potenziali?*

Le classi di falsificatori potenziali sono classi infinite. Il «maggiore» e «minore», che, presi in senso intuitivo, possono essere applicati alle classi finite senza speciali cautele, non possono essere applicati allo stesso modo alle classi infinite.

Non è facile aggirare questa difficoltà; neppure se, invece di prendere in considerazione le asserzioni-base o gli *accadimenti* vietati, consideriamo, per metterle a confronto, classi di *eventi* vietati, al fine di accertare quale di esse contenga «piú» *eventi* vietati. Infatti il numero di eventi vietati da una teoria empirica è anch'esso infinito, come si può vedere dal fatto che la congiunzione di un evento vietato con un altro evento qualsiasi (vietato o no) è ancora un evento vietato.

Prenderò in considerazione tre modi di assegnare un significato preciso, anche nel caso di classi infinite, ai termini intuitivi «piú» e «meno», e ciò al fine di scoprire se uno di essi può venire usato per mettere a confronto classi di eventi vietati.

1) Il concetto di *numero cardinale* (*o potenza*) *di una classe*. Questo concetto non può esserci di alcun aiuto per la risoluzione del nostro problema, perché si può facilmente mostrare che le classi dei falsificatori potenziali hanno il medesimo numero cardinale per tutte le teorie [1].

[*1] Per ulteriori osservazioni sugli scopi della scienza cfr. l'appendice *x, il § *15 del *Postscript* cit. e il mio articolo *The Aim of Science* [Lo scopo della scienza], in «Ratio», 1 (1957), pp. 24-35 [trad. it. in *Scienza e filosofia* cit., pp. 49-67].

[1] Tarski ha provato che, sotto certe assunzioni, ogni classe di asserzioni è numerabile (cfr. «Monatshefte f. Mathem. u. Physik», 40, 1933, p. 100, nota 10). * Il concetto di misura è inapplicabile per ragioni analoghe (cioè, perché l'insieme di tutte le asserzioni del linguaggio è numerabile).

2) *Il concetto di dimensione.* La vaga idea intuitiva che un cubo contenga, in qualche modo, un numero maggiore di punti di quanti ne contiene, ad esempio, una linea retta, può essere formulata con chiarezza in termini logicamente ineccepibili grazie al concetto di dimensione proprio della teoria degli insiemi. Questa teoria distingue classi o insiemi di punti, secondo la ricchezza delle «relazioni di intorno» che sussistono tra i loro elementi: insiemi dotati di dimensioni maggiori hanno relazioni di intorno piú abbondanti. Il concetto di dimensione, che ci permette di istituire un confronto tra classi di dimensioni «maggiori» e «minori», sarà qui usato per aggredire il problema del confronto tra gradi di controllabilità. Ciò è possibile perché le asserzioni-base, combinate per congiunzione con altre asserzioni-base, dànno ancora asserzioni-base che, in ogni caso, sono «piú altamente composite» dei loro componenti; e questo grado di composizione delle asserzioni-base può essere collegato col concetto di dimensione. In ogni caso, si dovrà usare, non già la composizione degli eventi vietati, ma quella degli eventi permessi. La ragione è che gli eventi vietati da una teoria possono avere qualsiasi grado di composizione; d'altra parte, alcune delle asserzioni permesse sono permesse soltanto per via della loro forma, o, piú precisamente, perché il loro grado di composizione è troppo basso per renderle capaci di contraddire la teoria in questione; e questo fatto può essere usato per mettere a confronto le dimensioni [*1].

3) La *relazione di sottoclasse.* Supponiamo che tutti gli elementi di una classe α siano anche elementi di una classe β, cosicché α sia una sottoclasse di β (in simboli: $\alpha \subset \beta$). Allora, o tutti gli elementi di β sono a loro volta elementi di α – e in questo caso si dice che le due classi hanno la stessa esten-

[*1] Qui, e nei passi analoghi, la parola tedesca «*komplex*» è stata tradotta con «*composite*» [in italiano: «composito»], invece che con «*complex*» [in italiano: «complesso»]. La ragione di ciò è che in tedesco tale termine non denota, come l'italiano «complesso», l'opposto di «semplice». L'opposto di «semplice» («*einfach*») è denotato, piuttosto dal tedesco «*kompliziert*» (cfr. il primo capoverso del § 41 dove «*kompliziert*» è stato tradotto con «complesso»). Dal momento che il *grado di semplicità* è uno dei soggetti piú importanti di questo libro, il parlare qui (e nel § 38) di *grado di complessità* [inglese: «*degree of complexity*»] avrebbe potuto indurre in errore. Ho perciò deciso di usare il termine «*grado di composizione*» [inglese: «*degree of composition*»] che sembra adattarsi molto bene al contesto.

sione, o che sono identiche – o ci sono elementi di β che non appartengono ad α. Nell'ultimo caso gli elementi di β che non appartengono ad α formano «la classe-differenza», o il *complemento* di α rispetto a β, e α è una *sottoclasse propria* di β. La relazione di sottoclasse corrisponde molto bene al «maggiore» e al «minore» presi in senso intuitivo, ma ha lo svantaggio di poter essere usata per mettere a confronto due classi soltanto se una di esse include l'altra. Pertanto, se due classi di falsificatori potenziali si intersecano senza che l'una sia inclusa nell'altra, o se non hanno nessun elemento in comune, il grado di falsificabilità delle teorie corrispondenti non può essere confrontato con l'aiuto della relazione di sottoclasse; le due classi sono inconfrontabili rispetto a questa relazione.

33. *I gradi di falsificabilità confrontati per mezzo della relazione di sottoclasse.*

Le seguenti definizioni sono introdotte provvisoriamente e dovranno essere perfezionate in seguito, nel corso della nostra discussione delle dimensioni delle teorie [*1].

1) Si dice che un'asserzione x è «falsificabile in piú alto grado» o «meglio controllabile» di un'asserzione y, o, in simboli, $Fsb(x) > Fsb(y)$, se e solo se la classe dei falsificatori potenziali di x include la classe dei falsificatori potenziali di y come *sottoclasse propria.*

2) Se le classi dei falsificatori potenziali delle due asserzioni x e y sono identiche, allora le due asserzioni hanno il medesimo grado di falsificabilità, cioè, $Fsb(x) = Fsb(y)$.

3) Se nessuna delle due classi di falsificatori potenziali delle due asserzioni include l'altra come sottoclasse propria, allora le due asserzioni hanno gradi di falsificabilità non confrontabili ($Fsb(x) \| Fsb(y)$).

Nel caso in cui valga la 1 ci sarà sempre una classe-complemento non-vuota. Nel caso delle asserzioni universali, questa classe-complemento dev'essere infinita. Non è perciò possibile che due teorie (strettamente universali) differiscano nel

[*1] Cfr. § 38, e appendici I, *VII e *VIII.

senso che una vieta un numero finito di accadimenti singoli che l'altra permette.

Le classi dei falsificatori potenziali di tutte le asserzioni tautologiche e metafisiche sono vuote. Secondo la 2 esse sono pertanto identiche. (Infatti le classi vuote sono sottoclassi di tutte le classi, e perciò anche delle classi vuote, e dunque tutte le classi vuote sono identiche; questa circostanza si può esprimere dicendo che esiste soltanto *una* classe vuota). Se denotiamo un'asserzione empirica con «e» e una tautologia, o un'asserzione metafisica (per esempio, un'asserzione puramente esistenziale) con «t» o «m» rispettivamente, allora possiamo assegnare alle asserzioni tautologiche e metafisiche il grado di falsificabilità zero, e possiamo scrivere: $Fsb(t) = Fsb(m) = 0$, e $Fsb(e) > 0$.

Si può dire che un'asserzione autocontraddittoria (che possiamo denotare con «c») ha come classe di falsificatori potenziali la classe di tutte le asserzioni-base logicamente possibili. Ciò significa che, relativamente al grado di falsificabilità, qualsiasi asserzione può essere confrontata con un'asserzione autocontraddittoria. Abbiamo $Fsb(c) > Fsb(e) > 0$ [*2]. Se poniamo arbitrariamente $Fsb(c) = 1$, cioè, assegnamo arbitrariamente il numero 1 al grado di falsificabilità di un'asserzione autocontraddittoria, possiamo anche definire un'asserzione empirica e mediante la condizione $1 > Fsb(e) > 0$. D'accordo con questa formula, $Fsb(e)$ cade sempre all'interno dell'intervallo compreso tra 0 e 1, limiti esclusi, vale a dire nell'«intervallo aperto» limitato da questi numeri. Escludendo contraddizione e tautologia (e cosí pure le asserzioni metafisiche) la formula esprime, nel medesimo tempo, *sia l'esigenza della coerenza, sia quella della falsificabilità.*

34. *La struttura della relazione di sottoclasse. Probabilità logica.*

Il confronto tra i gradi di falsificabilità di due asserzioni è stato definito con l'aiuto della relazione di sottoclasse; esso pertanto condivide con quest'ultima tutte le proprietà strut-

[*2] Ora, comunque, cfr. l'appendice *VII.

turali. La questione della confrontabilità può essere chiarita con l'aiuto di un diagramma (fig. 1), in cui certe relazioni di sottoclasse sono rappresentate sulla sinistra, mentre le corrispondenti relazioni di controllabilità sono rappresentate sulla destra. I numeri arabi, sulla destra, corrispondono ai nu-

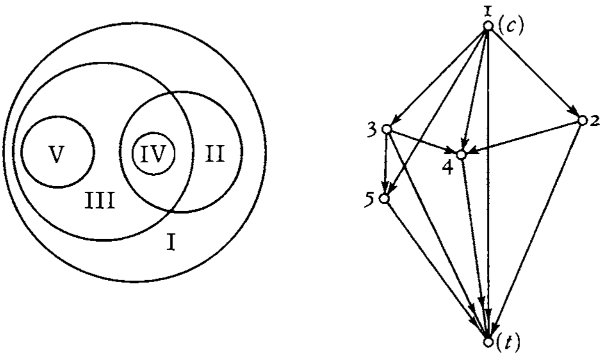


Figura 1.

meri romani sulla sinistra, in modo che un dato numero romano denota la classe dei falsificatori potenziali dell'asserzione denotata dal numero arabo corrispondente. Le frecce nel diagramma che rappresenta i gradi di falsificabilità vanno dalle asserzioni meglio controllabili o meglio falsificabili, a quelle che non possono essere controllate altrettanto bene. (Esse perciò corrispondono in modo abbastanza preciso alle frecce di derivabilità. Cfr. § 35).

Dal diagramma è possibile vedere che si possono distinguere e tracciare varie sequenze di sottoclassi – per esempio la sequenza I-II-IV o I-III-V – e che tali sequenze possono essere rese piú «dense» introducendo nuove classi intermedie. In questo caso particolare tutte le sequenze cominciano con I e finiscono con la classe vuota, perché quest'ultima è contenuta in ogni classe. (La classe vuota non può essere rappresentata nel nostro diagramma di sinistra, proprio perché è una sottoclasse di ogni classe e comparirebbe, per dir cosí, dovunque). Se scegliamo di identificare la classe I con la classe di tutte le possibili asserzioni-base, I diventa la contraddizione (c); e 0 (corrispondente alla classe vuota) può allora denotare la tautologia (t). È possibile passare dall'I alla classe vuota (o da (c) a (t)) seguendo varie strade: alcune di esse, come si può vedere dal diagramma che occupa la parte destra della figura, possono intersecarsi tra loro. Possiamo pertanto dire che la struttura della relazione è un reticolo (un «reticolo di sequenze» ordinate dalla freccia, o dalla relazione di sottoclasse). Ci sono punti nodali (per esempio le asserzioni 4 e 5) in cui il reticolo è parzialmente connesso. La relazione è totalmente connessa soltanto nella classe universale e nella classe vuota, corrispondenti, rispettivamente, alla contraddizione, c, e alla tautologia, t.

È possibile disporre in scala i gradi di falsificabilità di diverse asserzioni, cioè correlare, con le varie asserzioni, numeri che le ordinino secondo la loro falsificabilità? È chiaro che non è possibile ordinare tutte le asserzioni in questo modo [*1]; infatti, se lo facessimo, renderemmo arbitrariamente confrontabili le asserzioni non-confrontabili. In ogni modo nulla ci impedisce di prendere una delle sequenze del reticolo e di indicare, per mezzo di numeri, l'ordine delle sue asserzioni. Nel far ciò dovremo procedere in modo da assegnare sempre, a un'asserzione che giace piú vicino alla contraddizione c, un numero piú alto di quello che assegnamo a un'asserzione che giace vicino alla tautologia t. Poiché abbiamo già assegnato i numeri 0 e 1 alla tautologia e alla contraddizione, rispettivamente, alle asserzioni empiriche della sequenza che abbiamo scelto dovremo assegnare *frazioni proprie*.

Tuttavia non intendo realmente enucleare una delle sequenze. Inoltre, l'assegnare numeri alle asserzioni della sequenza sarebbe interamente arbitrario. Nondimeno, il fatto che sia possibile assegnare queste frazioni è molto interessante, specialmente perché getta luce sulla connessione tra il gra-

[*1] Continuo a credere che il tentativo di rendere confrontabili tutte le asserzioni introducendo una *metrica*, contenga di necessità un elemento arbitrario, extralogico. Ciò è perfettamente ovvio nel caso di asserzioni come «Tutti gli uomini adulti superano in altezza i sessantacinque centimetri» (o: «Tutti gli uomini adulti hanno un'altezza inferiore ai due metri e ottanta»); cioè a dire, nel caso di asserzioni i cui predicati asseriscono una proprietà misurabile. Si può infatti mostrare che la metrica del contenuto di falsificabilità dovrebbe essere una funzione della metrica del predicato; e quest'ultimo deve sempre contenere un elemento arbitrario, o, in ogni caso, extra-logico. Naturalmente è possibile costruire linguaggi artificiali per i quali si stabilisce una metrica. Ma la misura che ne risulta non sarà puramente logica, per quanto «ovvia» possa apparire la misura fintanto che si ammettono soltanto predicati discreti, qualitativi, che è possibile soltanto determinare al sí o al no (opposti ai predicati quantitativi, misurabili). Cfr. anche appendice *IX, Seconda e Terza nota.

do di falsificabilità e l'idea di *probabilità*. In tutti i casi in cui possiamo confrontare i gradi di falsificabilità di due asserzioni, possiamo dire che l'asserzione meno falsificabile è anche la piú probabile, in virtú della sua forma logica. Chiamo [*2] questa probabilità «*probabilità logica*» [1]; essa non deve essere confusa con quella probabilità numerica che si impiega nella teoria dei giuochi d'azzardo e in statistica. *La probabilità logica di un'asserzione è complementare al suo grado di falsificabilità*: cresce col decrescere del grado di falsificabilità. La probabilità logica 1 corrisponde al grado di falsificabilità 0, e viceversa. L'asserzione meglio controllabile, cioè, l'asserzione che ha il piú alto grado di falsificabilità, è logicamente meno probabile, mentre l'asserzione meno bene controllabile è logicamente piú probabile.

Come mostreremo nel § 72, la probabilità *numerica* può essere collegata con la probabilità logica, e perciò con il grado di falsificabilità. È possibile interpretare la probabilità numerica come applicantesi a una sottosequenza (scelta dalla relazione di probabilità logica) per la quale si può definire un *sistema di misura* in base a stime di frequenza.

Queste osservazioni sul confronto tra gradi di falsificabilità non valgono soltanto per asserzioni universali o per sistemi di teorie ma possono essere estese in modo che valgano per asserzioni singolari. Cosí valgono, ad esempio, per teorie in congiunzione con condizioni iniziali. In questo caso la classe dei falsificatori potenziali non dev'essere scambiata per una classe di eventi – per una classe di asserzioni-base omotipiche – perché è una classe di accadimenti. (Quest'osserva-

[*2] Ora (dal 1938; cfr. appendice *II) preferisco usare il termine «probabilità logica assoluta» invece di «probabilità logica», per distinguerla dalla «probabilità logica relativa» (o «probabilità logica condizionale»). Cfr. anche appendici *IV e da *VII a *IX.

[1] A questa idea della probabilità logica (della controllabilità inversa) corrisponde l'idea di validità di Bolzano; specialmente quando la applica al *confronto tra asserzioni*. Per esempio egli descrive le premesse maggiori in una relazione di derivabilità come le asserzioni dotate di validità minore, le conclusioni come quelle dotate di maggiore validità (*Wissenschaftslehre* [Teoria della scienza], 1837, vol. II, § 157, n. 1). La relazione in cui questo concetto di validità sta con quello di probabilità è spiegata da Bolzano nella *Wissenschaftslehre* cit., § 147. Cfr. anche KEYNES, *A Treatise on Probability* cit., p. 224. Gli esempi dati in questo libro mostrano che il mio confronto delle probabilità logiche è identico al confronto di Keynes «della probabilità che attribuiamo *a priori* a una generalizzazione». Cfr. §§ 36 e 83, nota 1.

zione è di una certa importanza per la connessione tra probabilità logica e probabilità numerica, che sarà analizzata nel § 72).

35. *Contenuto empirico, implicazione stretta [entailment] e gradi di falsificabilità.*

Nel § 31 si è detto che ciò che chiamo *contenuto empirico* di un'asserzione cresce col crescere del grado di falsificabilità dell'asserzione: quanto piú un'asserzione vieta, tanto piú dice intorno al mondo dell'esperienza (cfr. § 6). Quello che chiamo «contenuto empirico» sta in stretta relazione col (ma non è identico al) concetto di «contenuto», come è definito, ad esempio, da Carnap [1]. Per indicare quest'ultimo concetto userò il termine «contenuto logico», allo scopo di distinguerlo dal concetto di contenuto *empirico*.

Definisco il *contenuto empirico* di un'asserzione p come la classe dei suoi falsificatori potenziali (cfr. § 31). Il *contenuto logico* si definisce, con l'aiuto del concetto di derivabilità, come la classe di tutte le asserzioni non-tautologiche derivabili dall'asserzione in questione. (Può essere chiamato la sua «classe-conseguenza»). Cosí, il contenuto logico di p è *almeno eguale* (cioè, maggiore o eguale) a quello di un'asserzione q, se q è derivabile da p (o, in simboli, se «$p \rightarrow q$» [*1]). Se la derivabilità è reciproca (in simboli: «$p \longleftrightarrow q$» [*1]) allora si dice che p e q hanno eguale contenuto [2]. Se q è derivabile da p, ma p non è derivabile da q, allora la classe-conseguenza di q dev'essere un sottoinsieme proprio della classe-conseguenza di p; e in questo caso p possiede la classe-conseguenza piú

[1] CARNAP, in «Erkenntnis», 2 (1932), p. 458.

[*1] «$p \rightarrow q$» significa, secondo questa spiegazione, che l'asserzione condizionale che ha come antecedente p e come conseguente q è *tautologica*, o logicamente vera. (All'epoca in cui scrivevo questo libro non avevo le idee chiare su questo punto; né comprendevo il significato del fatto che un'asserzione sulla deducibilità è un'asserzione metalinguistica. Cfr. anche § 18, nota *1). Cosí, qui «$p \rightarrow q$» si può leggere: «*p implica logicamente q*».

[2] CARNAP, *op. cit.*, dice: «Il termine metalogico "di egual contenuto" si definisce come "mutualmente derivabile". La *Logische Syntax der Sprache* cit. e *Die Aufgabe der Wissenschaftslogik* [Il compito della logica della scienza] (1934) furono pubblicati troppo tardi perché io potessi prenderli in considerazione in questo libro.

grande, e perciò il contenuto logico (o la forza logica *[2]) maggiore.

Dalla mia definizione di *contenuto empirico* consegue che il confronto dei contenuti empirico e logico di due asserzioni *p* e *q* conduce allo stesso risultato se le asserzioni confrontate non contengono alcun elemento metafisico. Esigeremo pertanto che: *a*) due asserzioni che hanno contenuto logico eguale debbano anche avere contenuto empirico eguale; *b*) un'asserzione *p* il cui contenuto logico sia maggiore di quello di un'asserzione *q* dovrà anche avere contenuto empirico maggiore, o almeno eguale; infine, *c*) se il contenuto empirico di un'asserzione *p* è maggiore di quello di un'asserzione *q*, allora il contenuto logico dev'essere maggiore, oppure non confrontabile. La qualificazione che si trova in *b*): «o almeno contenuto empirico eguale», si è dovuta aggiungere perché *p* potrebbe, per esempio, essere una congiunzione di *q* con qualche asserzione puramente esistenziale, o con qualche altro genere di asserzione metafisica alla quale dobbiamo attribuire un certo contenuto logico; in questo caso, infatti, il contenuto empirico di *p* non sarà maggiore di quello di *q*. Considerazioni corrispondenti rendono necessario aggiungere a *c*) la qualificazione «o non-confrontabile» *[3].

Perciò nel confrontare gradi di controllabilità o di contenuto empirico giungeremo di regola – cioè nel caso di asserzioni puramente empiriche – agli stessi risultati a cui arriviamo nel confrontare il contenuto logico, o le relazioni di derivabilità. Sarà dunque possibile basare in larga misura il confronto tra gradi di falsificabilità su relazioni di derivabilità. Entrambe le relazioni hanno la forma di reticoli totalmente connessi nell'autocontraddizione e nella tautologia (cfr. § 34). Questo si può esprimere dicendo che un'autocontraddizione implica logicamente [*entails*] ogni asserzione, e che una tautologia è implicata logicamente da ogni asserzione. Inoltre come abbiamo visto, le asserzioni *empiriche* possono essere caratterizzate come quelle asserzioni il cui grado di falsificabilità cade nell'intervallo aperto limitato dai gradi di falsificabilità delle autocontraddizioni da un lato e delle tautologie dall'altro. Analogamente, le asserzioni *sintetiche* in generale

*[2] Se il contenuto logico di *p* supera quello di *q*, diremo anche che *p* è *logicamente piú forte* di *q*, o che la sua *forza logica* supera quella di *q*.
*[3] Cfr. ancora appendice *VII.

(comprese quelle non-empiriche) sono situate, per la relazione di implicazione stretta [*entailment*], nell'intervallo aperto, tra l'autocontraddizione e la tautologia.

Alla tesi positivistica che tutte le asserzioni non-empiriche (metafisiche) sono «prive di significato» corrisponderebbe cosí la tesi che la mia distinzione tra asserzioni *empiriche* e asserzioni *sintetiche*, o tra contenuto *empirico* e contenuto *logico*, è superflua; infatti tutte le asserzioni sintetiche – cioè tutte le asserzioni che sono autentiche e non mere pseudo-asserzioni – dovrebbero essere empiriche. Ma mi sembra piú probabile che questo modo di usare le parole, benché ammissibile, riesca a confondere il punto in discussione anziché chiarirlo.

Pertanto considero il confronto tra il contenuto empirico di due asserzioni equivalente al confronto tra i loro gradi di falsificabilità. Questo rende la nostra regola metodologica, secondo cui si deve dare la preferenza a quelle teorie che possono essere sottoposte ai controlli piú severi (cfr. la regola anticonvenzionalistica nel § 20) equivalente a una regola che favorisce le teorie dotate del piú alto contenuto empirico possibile.

36. *Livelli di universalità e gradi di precisione.*

Ci sono altre esigenze metodologiche che possono essere ridotte all'esigenza del piú alto contenuto empirico possibile. Due di queste sono particolarmente importanti: l'esigenza del piú alto livello (o grado) di *universalità* raggiungibile, e quella del piú alto grado di *precisione* raggiungibile.

Tenendo presente tutto questo, possiamo esaminare le seguenti leggi naturali concepibili:

- *p*: tutti i corpi celesti che si muovono secondo orbite chiuse si muovono in cerchio: o, piú brevemente; tutte le *orbite dei corpi celesti* sono *cerchi*;
- *q*: tutte *le orbite dei pianeti* sono *cerchi*;
- *r*: tutte *le orbite dei corpi celesti* sono *ellissi*;
- *s*: tutte *le orbite dei pianeti* sono *ellissi*.

$$\begin{tikzcd} & p \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ q \arrow[dr] & & r \arrow[dl] \\ & s & \end{tikzcd}$$

Le relazioni di deducibilità sussistenti tra queste quattro asserzioni sono indicate dalle frecce del nostro diagramma. Da *p* seguono tutte le altre asserzioni; da *q* segue *s*, che segue anche da *r*: cosí *s* segue da tutte le altre.

Movendo da *p* verso *q* il *grado di universalità* decresce; e *q* dice meno di *p*, perché le orbite dei pianeti costituiscono una sottoclasse propria delle orbite dei corpi celesti. Di conseguenza *p* è falsificata piú facilmente di *q*: se *q* è falsificata sarà falsificata anche *p*, ma non viceversa. Movendo da *p* a *r* il *grado di precisione* (del predicato) decresce: i cerchi sono una sottoclasse propria degli ellissi e se *r* è falsificata lo è anche *p*, ma non viceversa. Osservazioni corrispondenti valgono per gli altri movimenti: movendo da *p* a *s* decrescono sia il grado di universalità sia il grado di precisione; da *q* a *s* decresce la precisione, e da *r* a *s* decresce l'universalità. A un grado piú elevato di universalità *o* di precisione corrisponde un maggiore contenuto (logico o) empirico, e quindi un grado piú elevato di controllabilità.

Sia le asserzioni universali sia le asserzioni singolari possono essere scritte in forma di «asserzione universale condizionale» (o «implicazione generale», come la si chiama spesso). Mettendo le nostre leggi in questa forma possiamo forse vedere piú facilmente e piú accuratamente in qual modo si possano confrontare i gradi di universalità e i gradi di precisione delle due asserzioni.

Un'asserzione condizionale universale (cfr. § 14, nota 6) può essere scritta sotto la forma «$(x)\ (\varphi x \rightarrow fx)$», o, in parole: «Tutti i valori di *x* che soddisfano la funzione assertoria φx soddisfano anche la funzione assertoria fx». L'asserzione *s* del nostro diagramma ci offre il seguente esempio: «(x) (x è l'orbita di un pianeta $\rightarrow$ x è un ellisse)», che significa: «Per ogni *x*, se *x* è l'orbita di un pianeta allora *x* è un ellisse». Supponiamo che *p* e *q* siano due asserzioni scritte in questa forma «normale»: allora possiamo dire che *p* ha universalità maggiore di *q* se la funzione assertoria antecedente di *p* (che può essere denotata con «$\varphi_p x$») è implicata tautologicamente (o logicamente deducibile) dalla corrispondente funzione assertoria di *q* (che può essere denotata da «$\varphi_q x$»), ma non equivalente ad essa: o, in altre parole, se «$(x)(\varphi_q x \rightarrow \varphi_p x)$» è *tautologica* (o logicamente vera). Allo stesso modo diremo che *p* ha precisione maggiore di *q* se

«$(x)(f_p x \rightarrow f_q x)$» è tautologica, cioè se il predicato (o la funzione assertoria conseguente) di p è piú ristretto di quello di q; e ciò significa che il predicato di p implica logicamente [*entails*] quello di q [*1].

Questa definizione può essere estesa a funzioni assertorie con piú d'una variabile. Trasformazioni logiche elementari conducono da essa alle relazioni di derivabilità che abbiamo asserito e che possono essere espresse dalla regola seguente [1]: se di due asserzioni sono confrontabili *sia* l'universalità *sia* la precisione, allora l'asserzione meno universale o meno precisa è derivabile da quella piú universale o piú precisa; tranne, naturalmente, che l'una sia piú universale e l'altra piú precisa (come nel caso di q e di r nel mio diagramma) [2].

Potremmo ora dire che la nostra decisione metodologica – qualche volta interpretata metafisicamente come principio di causalità – consiste nel non lasciare nulla di inesplicato, cioè, nel tentare sempre di dedurre asserzioni da altre asserzioni di universalità piú alta. Questa decisione è derivata dall'esigenza del piú alto grado di universalità e precisione raggiungibile; essa può venir ridotta all'esigenza, o alla regola, che si deve dare la preferenza a quelle teorie che possono essere sottoposte ai controlli piú severi [*2].

[*1] Si vedrà che in questo paragrafo (contrariamente a quanto accade nei §§ 18 e 35) la freccia viene usata per esprimere un condizionale piuttosto che una relazione di implicazione stretta [*entailment*]. Cfr. anche § 18, nota *1.

[1] Possiamo scrivere:

$$((\varphi_q x \rightarrow \varphi_p x) . (f_p x \rightarrow f_q x)) \rightarrow ((\varphi_p x \rightarrow f_p x) \rightarrow (\varphi_q x \rightarrow f_q x))$$

o, per brevità $((\varphi_q \rightarrow \varphi_p).(f_p \rightarrow f_q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$. * Il carattere elementare di questa formula, asserito nel testo, diventa chiaro se scriviamo: «$((a \rightarrow b).$ $.(c \rightarrow d)) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow d))$». D'accordo col testo poniamo allora «p» per «$b \rightarrow c$» e «q» per «$a \rightarrow d$», ecc.

[2] Quella che chiamo universalità piú alta di un'asserzione corrisponde, piú o meno, a ciò che la logica classica avrebbe chiamato maggior «estensione del soggetto»; e ciò che io chiamo precisione maggiore corrisponde alla minore estensione, o alla «restrizione del predicato». La regola che riguarda la relazione di derivabilità, che abbiamo appena discusso, può essere considerata come una regola che chiarifica e combina il classico «*dictum de omni et nullo*» e il principio della «*nota notae*»: «il principio fondamentale della predicazione mediata». Cfr. BOLZANO, *Wissenschaftslehre* cit., vol. II, § 263, nn. 1 e 4. KÜLPE, *Vorlesungen über Logik* cit., §§ 34, 5 e 7.

[*2] Ora cfr. anche il § *15 e il capitolo *IV del mio *Postscript* cit.; specialmente § *76, testo relativo alla nota 5.

37. *Campi logici. Note sulla teoria della misurazione.*

Se un'asserzione p è piú facilmente falsificabile di un'asserzione q perché è di un livello di universalità o di precisione piú alto, allora la classe delle asserzioni-base permesse da p è una sottoclasse propria della classe di asserzioni-base permesse da q. La relazione di sottoclasse che regge tra due classi di asserzioni permesse è l'opposta di quella che regge tra due classi di asserzioni vietate (falsificatori potenziali): si può dire che le due relazioni sono inverse (o, forse, complementari). La classe di asserzioni-base permesse da un'asserzione può essere chiamata il suo «*campo*» [1]. Il «campo» che un'asserzione concede alla realtà è, per cosí dire, la quantità di «libero giuoco» (o grado di libertà) che l'asserzione concede alla realtà. Campo e contenuto empirico (cfr. § 35) sono concetti inversi (o complementari). Di conseguenza i campi di due asserzioni stanno l'uno con l'altro nella stessa relazione in cui stanno le loro probabilità logiche (cfr. §§ 34 e 72).

Ho introdotto il concetto di campo perché esso ci aiuta a trattare certe questioni connesse con il *grado di precisione nella misurazione*. Supponiamo che le conseguenze di due teorie differiscano cosí poco in tutti i campi d'applicazione che sia impossibile cogliere le piccolissime differenze tra gli eventi osservabili calcolati, per il fatto che il grado di precisione raggiungibile dalle nostre misurazioni non è sufficientemente alto. Sarà allora impossibile decidere tra le due teorie in base a un esperimento, se prima non si sarà affinata la nostra tecnica di misurazione [*1]. Ciò mostra che la tecnica di misurazione in uso determina un certo campo: una regione al cui interno la teoria consente discrepanze tra le osservazioni.

Dunque la regola secondo la quale le teorie dovrebbero

[1] Il concetto di campo (*Spielraum*) [inglese «*range*»] fu introdotto da von Kries (1886); idee di questo genere si trovano in Bolzano. Waismann (in «Erkenntnis», I, 1930, pp. 228 sgg.) tenta di combinare la teoria del campo con la teoria della frequenza. Cfr. § 72. * Nel *Treatise* cit. (p. 88), Keynes traduce «*Spielraum*» con «*field*»: egli usa anche (p. 224) «*scope*» (scopo) per indicare ciò che, nella mia teoria, equivale esattamente alla stessa cosa.

[*1] Questo è un punto che credo sia stato interpretato erroneamente da Duhem. Cfr. il suo *Aim and Structure of Physical Theory*, pp. 137 sgg. [trad ingl. (1954) di *La théorie physique, son objet et sa structure* cit.].

avere il piú alto grado di controllabilità raggiungibile (e dunque permettere soltanto il campo piú ristretto) implica logicamente [*entails*] l'esigenza che il grado di precisione nella misurazione dev'essere elevato piú che si può.

Si dice spesso che ogni misurazione consiste nella determinazione di coincidenze di punti. Ma qualsiasi determinazione di questo genere può essere corretta soltanto entro certi limiti. In senso stretto, non ci sono coincidenze di punti [*2]. Due «punti» fisici – per esempio, un segno sul regolo e un altro segno sul corpo che si deve misurare – possono, nel migliore dei casi, essere portati molto vicini: non possono coincidere, cioè fondersi in *un* solo punto. Per quanto trita possa essere in un altro contesto, quest'osservazione è importante per la questione della precisione delle misurazioni. Essa infatti ci ricorda che la misurazione dev'essere descritta nei termini seguenti: troviamo che il punto del corpo da misurare giace *tra due* gradazioni o segni del regolo o, diciamo, che l'indice del nostro apparecchio di misurazione giace *tra due* gradazioni sulla scala. Allora possiamo considerare queste gradazioni, o segni, come i nostri due limiti ottimali d'errore, o procedere a valutare la posizione dell'indice (diciamo) entro l'intervallo fra due gradazioni, e ottenere cosí un risultato piú accurato. Si può descrivere quest'ultimo caso dicendo che consideriamo che l'indice giaccia tra due gradazioni immaginarie. Dunque rimane sempre un intervallo, un campo. È costume dei fisici fare una stima di quest'intervallo per ogni misurazione. (Seguendo Millikan essi dànno, per esempio, la carica elementare di un elettrone misurata in unità elettrostatiche, come $e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$, e aggiungono che il margine di imprecisione è $\pm 0{,}005 \cdot 10^{-10}$). Ma questo solleva un problema. Che scopo può avere la sostituzione, a un segno sulla scala, di *due* segni – cioè a dire, dei due confini dell'intervallo – quando per ciascuno di questi due confini sorgerà necessariamente la stessa questione circa i limiti di accuratezza per i confini dell'intervallo?

È chiaro che è inutile dare i limiti dell'intervallo a meno che a loro volta questi limiti non possano essere definiti con

[*2] Si osservi che qui parlo di misurare, non di contare. (La differenza tra questi due concetti è strettamente connessa con la differenza tra numeri razionali e numeri reali).

un grado di precisione che supera largamente quello che possiamo aspettarci di ottenere per la misurazione originale; a meno, cioè, che non possano essere definiti entro i loro propri intervalli d'imprecisione, che dovrebbero perciò essere piú piccoli, di diversi ordini di grandezza, dell'intervallo che determinano per il valore della misurazione originale. In altre parole, i confini dell'intervallo non sono confini rigorosi, ma sono, in realtà, intervalli molto piccoli, i cui confini, a loro volta, sono intervalli ancor piú piccoli, e cosí via. In questo modo arriviamo all'idea di quelli che possono essere chiamati i «limiti non rigorosi», o «*limiti di condensazione*» dell'intervallo.

Queste considerazioni non presuppongono la teoria matematica dell'errore, né la teoria della probabilità. Si tratta, piuttosto, del contrario: analizzando l'idea di un intervallo di misurazione esse forniscono un sottofondo senza il quale la teoria statistica dell'errore avrebbe ben poco senso. Se misuriamo molte volte una grandezza otteniamo valori che sono distribuiti con densità differenti su un intervallo, l'intervallo di precisione dipendendo dalla tecnica di misurazione che si usa. Soltanto se sappiamo che cosa stiamo cercando, cioè i limiti di condensazione dell'intervallo, possiamo applicare a questi valori la teoria dell'errore, e determinare i limiti dell'intervallo *3.

Ora, penso che tutto ciò getti un po' di luce sulla *superiorità dei metodi che impiegano misurazioni* sopra i *metodi puramente qualitativi.* È vero che anche nel caso di stime qualitative, come la stima dell'intensità di un determinato suono musicale, può essere possibile qualche volta dare un intervallo di accuratezza delle stime. Ma, se mancano le misurazioni, qualunque intervallo di questo genere non può che essere vago, perché in questo caso non è possibile applicare il concetto di limiti di condensazione. Questo concetto è applicabile soltanto in quei casi in cui possiamo parlare di ordini di grandezza e perciò soltanto in quei casi in cui sono definiti metodi di misurazione. Nel § 68, trattando della teoria della pro-

*3 Queste considerazioni stanno in stretta relazione con, e sono sostenute da, alcuni risultati discussi, nei numeri 8 sgg. della mia Terza nota ristampata nell'appendice *IX. Per il significato delle misurazioni della «profondità» delle teorie cfr. anche § *15 del *Postscript* cit.

babilità, farò ancora uso del concetto di limiti di condensazione di intervalli di precisione.

38. *Gradi di controllabilità confrontati rispetto alle dimensioni.*

Finora abbiamo discusso il confronto fra teorie rispetto ai loro gradi di controllabilità, solo in quanto le teorie possono essere confrontate con l'aiuto della relazione di sottoclasse. In alcuni casi questo metodo riesce piuttosto bene a guidare la nostra scelta fra teorie differenti. Cosí possiamo dire, ora, che il principio di esclusione di Pauli, menzionato come esempio nel § 20, si rivela altamente soddisfacente come ipotesi ausiliaria. Esso infatti accresce di molto il grado di precisione e, con il grado di precisione, anche il grado di controllabilità della vecchia teoria quantistica (come l'asserzione corrispondente della nuova teoria quantistica, che asserisce che gli stati antisimmetrici sono realizzati dagli elettroni, mentre quelli simmetrici da particelle prive di carica e da certe particelle a carica multipla).

Ma per molti scopi il confronto mediante la relazione di sottoclasse si rivela insufficiente. Cosí, per esempio, Frank ha fatto notare che le asserzioni dotate di un alto livello di universalità – come il principio di conservazione dell'energia nella formulazione di Planck – possono diventare tautologiche e perdere il loro contenuto empirico, a meno che le condizioni iniziali non possano essere determinate «... in base a *poche* misurazioni... vale a dire, in base a un piccolo numero di grandezze caratteristiche dello stato del sistema»[1]. La questione del numero di parametri che devono essere accertati e sostituiti nelle formule non può essere chiarita con l'aiuto della relazione di sottoclasse, nonostante sia evidentemente connessa, in modo piuttosto stretto, con il problema della controllabilità e della falsificabilità e dei loro gradi. Quanto minore è il numero delle grandezze richieste per determinare le condizioni iniziali, tanto meno composite[*1] sa-

[1] Cfr. FRANK, *Das Kausalgesetz und seine Grenzen* cit., per es., a p. 24.
[*1] Per il termine «composito», cfr. § 32, nota *1.

ranno le asserzioni-base che bastano per falsificare la teoria; infatti un'asserzione-base falsificante consiste della congiunzione delle condizioni iniziali e della negazione della predizione derivata (cfr. § 28). Dunque può essere possibile confrontare le teorie rispetto al loro grado di controllabilità, accertando il grado minimo di composizione che un'asserzione-base deve avere per essere in grado di contraddire la teoria; purché ci sia sempre possibile trovare una maniera per confrontare asserzioni-base allo scopo di accertare se sono piú (o meno) composite; cioè, composte di un numero maggiore (o minore) di asserzioni-base di tipo piú semplice. Tutte le asserzioni-base, quale che sia il loro contenuto, il cui grado di composizione non raggiungesse il minimo richiesto, sarebbero permesse dalla teoria soltanto grazie al loro basso grado di composizione.

Ma qualsiasi programma del genere incontra difficoltà. Infatti, in generale, non è facile dire in base a una semplice osservazione se un'asserzione sia composita, cioè sia equivalente a una congiunzione di asserzioni piú semplici. In tutte le asserzioni compaiono nomi universali, analizzando i quali è spesso possibile spaccare l'asserzione nei suoi componenti, membri di una congiunzione. (Per esempio, l'asserzione «C'è un bicchiere d'acqua al posto *k*» potrebbe forse essere analizzata e spaccata nelle due asserzioni: «C'è un bicchiere contenente liquido al posto *k*» e «C'è acqua al posto *k*»). Non possiamo sperare di trovare un termine naturale alla dissezione delle asserzioni operata con questo metodo, soprattutto perché possiamo sempre introdurre nuovi universali, definiti allo scopo di rendere possibile un'ulteriore dissezione.

Al fine di rendere confrontabili i gradi di composizione di tutte le asserzioni universali, si potrebbe suggerire di scegliere, come *asserzioni elementari* o *atomiche*[2], una certa classe

[2] A proposito delle «proposizioni elementari» si veda il *Tractatus* di Wittgenstein, prop. 5: «Le proposizioni sono funzioni di verità delle proposizioni elementari». Per le «proposizioni atomiche» (che si differenziano dalle proposizioni composite, «molecolari») cfr. WHITEHEAD e RUSSELL, *Principia Mathematica* cit., vol. I, introduzione alla 2ª ed., 1925, pp. XV sg. C. K. Ogden traduce il termine «*Elementarsatz*» del *Tractatus* con «*elementary proposition*» [proposizione elementare] (cfr. *Tractatus*, 4.21), mentre Bertrand Russell, nella sua prefazione al *Tractatus* (1922), p. 13, tradusse questo termine con «*atomic propositions*» [proposizioni atomiche]. Quest'ultimo termine è diventato piú popolare.

di asserzioni dalle quali, mediante la congiunzione e altre operazioni logiche, si potrebbero ottenere tutte le altre asserzioni. Se la cosa riesce dovremmo aver definito, in questo modo, uno «zero assoluto» di composizione, e la composizione di una qualsiasi asserzione potrebbe essere espressa, per cosí dire, in gradi assoluti di composizione [*2]. Ma per le ragioni esposte in precedenza un simile procedimento dovrebbe essere considerato altamente inadatto, perché imporrebbe serie restrizioni al libero uso del linguaggio scientifico [*3].

Tuttavia è ancora possibile confrontare i gradi di composizione delle asserzioni-base, e perciò anche di altre asserzioni. Lo si può fare scegliendo arbitrariamente una classe di asserzioni *relativamente* atomiche, che si possano prendere come base per il confronto. Questa classe di asserzioni relativamente atomiche può essere definita per mezzo di uno *schema generatore o matrice* (per esempio: «c'è un apparecchio di misurazione per ... al posto ..., e il suo indice giace tra i segni ... e ... della scala»). Possiamo quindi definire come relativamente atomiche, e perciò equicomposite, la classe di tutte le asserzioni ottenute da questo tipo di matrice (o funzione assertoria) per sostituzione di valori definiti. La classe di queste asserzioni, insieme con tutte le congiunzioni che si possono formare a partire da esse, può essere chiamata un

[*2] Gradi assoluti di composizione determinerebbero, naturalmente, gradi assoluti di contenuto, e dunque di improbabilità logica assoluta. Il programma delineato qui, consistente nell'introdurre l'improbabilità, e di conseguenza la probabilità, enucleando una certa classe di asserzioni assolutamente atomiche (e già abbozzato, ad esempio, da Wittgenstein) è stato elaborato, piú recentemente, da Carnap nel suo libro *Logical Foundations of Probability* cit., allo scopo di costruire una teoria dell'induzione. Si vedano anche le osservazioni sui modelli linguistici nella mia Prefazione all'edizione inglese, 1958, di questo libro. Qui io alludo al fatto che il terzo modello linguistico (il sistema linguistico di Carnap) non ammette proprietà misurabili. (Né permette, nella sua forma attuale, l'introduzione di un ordine spaziale o temporale).

[*3] Le parole «linguaggio scientifico» erano state usate in modo piuttosto rozzo, e non devono essere interpretate nel senso tecnico di ciò che oggi si chiama «sistema linguistico», Al contrario, il punto della mia trattazione era che non dovremmo dimenticare che gli scienziati non possono usare un «sistema linguistico», perché devono costantemente cambiare il loro linguaggio, ad ogni nuovo passo. «Materia» o «atomo» dopo Rutherford, e «materia» o «energia» dopo Einstein, significano cose diverse da quelle che significavano prima: il significato di questi concetti è funzione della *teoria*, che cambia costantemente.

«*dominio*» [*field*]. Una congiunzione di n differenti asserzioni relativamente atomiche di un dominio può essere chiamata una «n-upla del dominio», e possiamo dire che il suo grado di composizione è eguale al numero n.

Se per una teoria t esiste un dominio di asserzioni singolari (che non necessariamente devono essere asserzioni-base) tali che, per qualche numero d, la teoria t non può essere falsificata da qualsiasi d-upla del dominio pur potendo essere falsificata da certe $d+1$-uple, diremo che d è il *numero caratteristico* della teoria rispetto a quel dominio. Tutte le asserzioni del dominio, il cui grado di composizione è minore o eguale a d, saranno compatibili con la teoria, e permesse da essa, quale che sia il loro contenuto.

Ora è possibile basare su questo numero caratteristico, d, il confronto fra i gradi di controllabilità delle teorie. Ma al fine di evitare contraddizioni, che potrebbero sorgere a causa dell'uso di domini differenti, è necessario usare un concetto un po' piú ristretto del concetto di dominio; cioè a dire il concetto di *dominio di applicazione*. Data una teoria t diciamo che un dominio è un *dominio di applicazione della teoria t* se esiste un numero caratteristico d della teoria t rispetto a questo dominio e se, oltre a ciò, questo numero soddisfa certe condizioni ulteriori (che sono spiegate nell'appendice I).

Chiamo il numero caratteristico d di una teoria t, rispetto a un dominio di applicazione: *dimensione* di t rispetto a questo dominio di applicazione. L'espressione «dimensione» è suggerita dal fatto che possiamo pensare tutte le n-uple del dominio come disposte spazialmente (in uno spazio di configurazione di dimensioni infinite). Se, per esempio, $d = 3$, le asserzioni, ammissibili perché la loro composizione è troppo bassa, formano un sottospazio tridimensionale di questa configurazione. Il trapasso da $d = 3$ a $d = 2$, corrisponde al trapasso da un solido a una superficie. Quanto piú piccola è la dimensione d tanto piú rigorosamente ristretta è la classe di quelle asserzioni permesse che, indipendentemente dal loro contenuto, non possono contraddire la teoria per via del loro basso grado di composizione; e tanto piú alto è il grado di falsificabilità della teoria.

Il concetto di dominio di applicazione non è stato ristretto alle asserzioni-base, ma tra le asserzioni appartenenti a un dominio di applicazione si sono ammesse asserzioni di ogni genere. Tuttavia, possiamo stimare il grado di composizione delle asserzioni-base confrontando le loro dimensioni con l'aiuto del dominio. (Assumiamo che ad asserzioni singolari altamente composite corrispondano asserzioni-base altamente composite). Si può cosí supporre che a una teoria di dimensione maggiore corrisponda una classe di asserzioni-base di dimensione maggiore, tale che tutte le asserzioni di questa classe sono permesse dalla teoria, indipendentemente da ciò che asseriscono.

Ciò costituisce una risposta alla questione circa il modo in cui i due metodi per confrontare i gradi di controllabilità stanno in relazione tra loro: l'uno per mezzo della dimensione di una teoria, l'altro mediante la relazione di sottoclasse. Ci saranno casi in cui non risulta applicabile nessuno dei due metodi o ne risulta applicabile solo uno. Naturalmente in questi casi non c'è spazio per un conflitto tra i due metodi. Ma se in un caso particolare sono applicabili entrambi i metodi allora può accadere che due teorie di eguali dimensioni, valutate col metodo basato sulla relazione di sottoclasse, posseggano differenti gradi di controllabilità. In questi casi si dovrà accettare il verdetto di quest'ultimo metodo, perché dimostrerebbe di essere il metodo piú sensibile. In tutti gli altri casi in cui è possibile applicare entrambi i metodi, questi devono portare allo stesso risultato. Con l'aiuto di un semplice teorema della teoria delle dimensioni si può infatti mostrare che la dimensione di una classe dev'essere maggiore della, o eguale alla, dimensione delle sue sottoclassi [3].

39. *La dimensione di un insieme di curve.*

Talvolta possiamo semplicemente identificare quello che ho chiamato il «dominio di applicazione» di una teoria con il *dominio della sua rappresentazione grafica*, cioè con l'area di un foglio di carta millimetrata sulla quale rappresentiamo gra-

[3] Cfr. MENGER, *Dimensionstheorie* cit., p. 81. * Si può assumere che le condizioni alle quali questo teorema vale siano sempre soddisfatte dagli «spazi» coi quali abbiamo da fare qui.

ficamente la teoria. Ciascun punto di questa rappresentazione grafica può esser fatto corrispondere a un'asserzione relativamente atomica. La dimensione della teoria rispetto a questo dominio (definita nell'appendice I) è allora identica con la dimensione dell'insieme di curve corrispondenti alla teoria. Discuterò queste relazioni con l'aiuto delle due asserzioni *q* e *s* del § 36. (Il nostro confronto tra dimensioni vale per asserzioni con predicati differenti). L'ipotesi *q* – «Tutte le orbite dei pianeti sono circolari» – è tridimensionale: infatti, per falsificarla, sono necessarie almeno quattro asserzioni singolari del dominio, corrispondenti a quattro punti della sua rappresentazione grafica. L'ipotesi *s*, che tutte le orbite dei pianeti sono ellissi, è pentadimensionale, dal momento che per falsificarla sono necessarie almeno sei asserzioni singolari, corrispondenti a sei punti del grafico. Abbiamo visto, nel § 36, che *q* è piú facilmente falsificabile di *s*: poiché tutti i cerchi sono ellissi, è stato possibile basare il confronto sulla relazione di sottoclasse. Ma l'uso delle dimensioni ci mette in grado di confrontare teorie che prima non eravamo in grado di confrontare. Per esempio, ora possiamo confrontare l'ipotesi del cerchio con l'ipotesi della parabola (che è tetradimensionale). Ciascuna delle parole «cerchio», «ellisse», «parabola», denota una classe, o *insieme di curve*; e ciascuno di questi insiemi ha la dimensione *d*, se per mettere in evidenza, o caratterizzare, una particolare curva dell'insieme sono necessari e sufficienti *d* punti. Nella rappresentazione algebrica la dimensione dell'insieme di curve dipende dal numero di *parametri*, i cui valori possiamo scegliere liberamente. Possiamo pertanto dire che il numero dei parametri determinabili liberamente di un insieme di curve, per mezzo delle quali si rappresenta una teoria, è caratteristico del grado di falsificabilità (o di controllabilità) di quella teoria.

Riferendomi alle asserzioni *q* e *s* dell'esempio dato nel § 36 vorrei fare alcuni commenti metodologici alla scoperta, ad opera di Keplero, delle leggi che portano il suo nome [*1].

[*1] I punti di vista sviluppati qui furono accettati da W. C. KNEALE, *Probability and Induction* [Probabilità e induzione], 1949, p. 230, e J. G. KEMENY, *The Use of Simplicity in Induction* [L'uso della semplicità nell'induzione], in «Philosophical Review», 57 (1953); che riconobbero di averli presi da me. Cfr. la nota a p. 404.

Non intendo suggerire che la credenza nella perfezione – il principio euristico che guidò Keplero alla sua scoperta – sia stata ispirata, consapevolmente o inconsapevolmente, da considerazioni metodologiche riguardanti i gradi di falsificabilità. Credo però che Keplero dovette il suo successo in parte al fatto che l'ipotesi del cerchio, dalla quale prese le mosse, è relativamente facile da falsificare. Se Keplero fosse partito da un'ipotesi che, a causa della sua forma logica, non fosse stata cosí facilmente falsificabile come l'ipotesi del cerchio, forse non avrebbe ottenuto alcun risultato, considerando le difficoltà dei calcoli, le cui stesse basi erano «sospese nell'aria»: per cosí dire fluttuanti in cielo, e procedenti per strade sconosciute. Il risultato incontestabilmente *negativo* che Keplero ottenne falsificando la propria ipotesi del cerchio fu, in realtà, il suo primo successo. Il suo metodo era sufficientemente giustificato perché egli procedesse oltre, specialmente da quando il suo primo tentativo aveva già portato a certe approssimazioni.

Non c'è dubbio che le leggi di Keplero si sarebbero potute scoprire anche in un altro modo; ma io penso che non fu un mero caso che la strada che lo portò al successo sia stata proprio questa. Corrisponde al *metodo di eliminazione* che può essere applicato soltanto se la teoria è sufficientemente facile da falsificare, sufficientemente *precisa* da poter entrare in conflitto con le osservazioni empiriche.

40. *Due modi per ridurre il numero di dimensioni di un insieme di curve.*

Insiemi di curve completamente differenti possono avere la stessa dimensione. Ad esempio l'insieme di tutti i cerchi è tridimensionale; ma l'insieme di tutti i cerchi che passano per un punto dato è un insieme bidimensionale (come l'insieme delle linee rette). Se chiediamo che tutti i cerchi passino per *due* punti dati, otteniamo un insieme monodimensionale, e cosí via. Ogni ulteriore richiesta, che tutte le curve di un insieme passino per un punto dato in piú, riduce di una le dimensioni dell'insieme.

classi a zero dimensioni [1]	classi a una dimensione	classi a due dimensioni	classi a tre dimensioni	classi a quattro dimensioni
–	–	retta	cerchio	parabola
–	retta passante per un punto dato	cerchio passante per un punto dato	parabola passante per un punto dato	conica passante per un punto dato
retta passante per due punti dati	cerchio passante per due punti dati	parabola passante per due punti dati	conica passante per due punti dati	–
cerchio passante per tre punti dati	parabola passante per tre punti dati	conica passante per tre punti dati	–	–

Il numero delle dimensioni può anche essere ridotto ricorrendo ad altri metodi che non siano quello consistente nell'aumentare il numero dei punti dati. Per esempio, l'insieme degli ellissi i cui assi stanno in un rapporto dato è tetradimensionale (come quello delle parabole), e cosí pure l'insieme degli ellissi la cui eccentricità è espressa da un numero dato. Naturalmente il trapasso dall'ellisse al cerchio è equivalente alla specificazione di un'eccentricità (l'eccentricità 0) o di un particolare rapporto tra gli assi (l'unità).

Poiché ci interessa valutare i gradi di falsificabilità delle teorie, ci chiederemo ora se i vari metodi per ridurre il numero delle dimensioni siano equivalenti per i nostri scopi, o se i loro meriti relativi non debbano essere esaminati piú da vicino. Ora, la stipulazione secondo cui una curva deve passare attraverso un certo *punto singolare* (o una piccola regione), sarà spesso collegata, o corrisponderà, all'accettazione di una certa *asserzione singolare*, cioè di una condizione iniziale. D'altra parte il trapasso, poniamo, dall'ipotesi dell'ellisse all'ipotesi del cerchio, corrisponderà ovviamente a una riduzione della dimensione della *teoria stessa*. Ma in qual modo si devono tener separati questi due metodi per ridurre le di-

[1] Naturalmente potremmo anche cominciare con la classe dimensionale meno-uno; si tratta di una classe vuota (superdeterminata).

mensioni? Possiamo dare il nome di «*riduzione materiale*» a quel metodo per ridurre le dimensioni che *non* opera con stipulazioni riguardanti la «forma» o la «conformazione» della curva; cioè a riduzioni operate, ad esempio, specificando uno o piú punti o per mezzo di qualche altra specificazione equivalente. L'altro metodo, in cui si specifica piú rigorosamente la forma, o configurazione, della curva – come, per esempio, quando passiamo dall'ellisse al cerchio, o dal cerchio alla retta, ecc. – lo chiamerò il metodo della «*riduzione formale*» del numero delle dimensioni.

Non è comunque molto facile mantenere rigorosamente questa distinzione. Ciò si può vedere nel modo seguente. Ridurre le dimensioni di una teoria significa, in termini algebrici, sostituire una costante a un parametro. Ora, non è ben chiaro in qual modo possiamo distinguere tra metodi differenti per sostituire una costante a un parametro. La *riduzione formale*, che consiste nel passare dall'equazione generale di un ellisse all'equazione di un cerchio, può essere descritta come l'operazione dell'eguagliare un parametro a zero e un secondo parametro a uno. Ma eguagliare a zero un altro parametro (il termine assoluto) significherebbe una *riduzione materiale*, cioè la specificazione di un punto dell'ellisse. Penso che sia possibile render chiara questa distinzione vedendo la sua connessione con il problema dei nomi universali. Infatti la riduzione materiale introduce un nome individuale nella definizione dell'insieme significante di curve, mentre la riduzione formale vi introduce un nome universale.

Immaginiamo che ci sia dato un certo piano individuale, ad esempio mediante una «definizione ostensiva». L'insieme di tutti gli ellissi che giacciono in questo piano può essere definito per mezzo dell'equazione generale dell'ellisse; l'insieme dei cerchi, per mezzo dell'equazione generale del cerchio. Queste definizioni sono *indipendenti dal luogo* del piano *nel quale tracciamo le coordinate* (*cartesiane*) a cui fanno riferimento. Di conseguenza sono indipendenti dalla scelta dell'origine e dell'orientamento delle coordinate. Un sistema di coordinate specifico può essere determinato soltanto per mezzo di nomi individuali; per esempio, specificando ostensivamente l'origine e l'orientamento delle coordinate. Poiché la definizione dell'insieme di ellissi (o di cerchi) è la stessa per tutte le coordinate cartesiane, essa sarà indipendente dalla specificazione di questi nomi individuali: sarà *invariante* rispetto a tutte le trasformazioni di coordinate del gruppo euclideo (movimenti o similitudini).

Se, d'altra parte, desideriamo definire un insieme di ellissi (o di cerchi) che abbiano in comune sul piano un punto specifico, individuale, dobbiamo operare con un'equazione che non è invariante rispetto alle trasformazioni del gruppo euclideo, ma si riferisce a un sistema di coordinate singolo, cioè specificato individualmente od ostensivamente. Dunque la nostra definizione è connessa con nomi individuali [2].

Le trasformazioni possono essere ordinate gerarchicamente. Una definizione che sia invariante rispetto a un gruppo piú generale di trasformazioni è invariante anche rispetto a gruppi piú speciali. Per ciascuna definizione di un insieme di curve esiste un gruppo di trasformazioni – il piú generale – che è caratteristico di questa definizione. Ora possiamo dire: la definizione D_1 di un insieme di curve si chiama «egualmente generale» (o piú generale) di una definizione D_2 di un insieme di curve, se è invariante rispetto allo stesso gruppo di trasformazione rispetto al quale è invariante D_2 (o rispetto a un gruppo piú generale). Possiamo ora dire che una riduzione delle dimensioni di un insieme di curve è *formale* se non diminuisce la generalità della definizione; altrimenti la riduzione può essere chiamata *materiale*.

Se confrontiamo il grado di falsificabilità di due teorie considerando le loro dimensioni, è chiaro che dovremo tener conto della loro *generalità*, cioè della loro invarianza rispetto a trasformazioni coordinate, insieme con le loro dimensioni.

Naturalmente il procedimento dovrà essere differente secondo che la teoria, come quella di Keplero, faccia effettivamente asserzioni di tipo geometrico intorno al mondo, o sia «geometrica» solo in quanto può essere rappresentata mediante un grafico, quale ad esempio il grafico che rappresenta la dipendenza della pressione dalla temperatura. Sarebbe improprio esigere da quest'ultimo genere di teoria, o dall'insieme di curve corrispondente, che la sua definizione debba essere invariante rispetto, poniamo, alle rotazioni del sistema

[2] Sulle relazioni tra gruppi di trasformazione e «individuazione» cfr. WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* cit., p. 59, dove si fa riferimento all'*Erlanger Programm* di Klein.

di coordinate; infatti in questi casi le differenti coordinate possono rappresentare cose totalmente differenti (una la pressione, l'altra la temperatura).

Concludo con ciò la mia esposizione dei metodi per confrontare i gradi di falsificabilità. Credo che questi metodi possano aiutarci a chiarificare questioni epistemologiche come il *problema della semplicità*, di cui ci occuperemo nel capitolo successivo. Ma, come vedremo, ci sono altri problemi che il nostro esame dei gradi di falsificabilità presenta sotto nuova luce: specialmente il problema della cosiddetta «probabilità delle ipotesi», o della *corroborazione*.

Capitolo settimo
Semplicità

Sembra che l'accordo sull'importanza del cosiddetto «problema della semplicità» sia minimo. Non molto tempo fa Weyl disse che «il problema della semplicità è di importanza capitale per l'epistemologia delle scienze della natura»[1]. Tuttavia pare che in questi ultimi tempi l'interesse per il problema sia andato declinando, forse perché, specialmente dopo l'acuta analisi di Weyl, le possibilità di risolverlo sembravano molto poche.

Fino a pochissimo tempo fa l'idea di semplicità è stata usata in modo acritico, come se fosse perfettamente ovvio che cosa sia la semplicità e perché dev'essere apprezzata. Non pochi filosofi della scienza hanno dato al concetto di semplicità un posto di cruciale importanza nelle loro teorie, senza neanche rendersi conto delle difficoltà che fa sorgere. Per esempio, i seguaci di Mach, Kirchhoff e Avenarius hanno tentato di sostituire all'idea di spiegazione causale l'idea della «descrizione piú semplice». Senza l'aggettivo «la piú semplice», o una parola simile, questa dottrina non direbbe nulla. Dal momento che dovrebbe spiegare perché preferiamo una descrizione del mondo condotta con l'aiuto di teorie a una descrizione condotta con l'aiuto di asserzioni singolari, sembra che tale dottrina presupponga che le teorie sono piú semplici delle asserzioni singolari. Pochi tuttavia hanno tentato di spiegare perché le teorie dovrebbero essere piú semplici, o che cosa si intenda, piú precisamente, quando si parla di semplicità.

Inoltre, se assumiamo che le teorie si debbano usare per

[1] Cfr. WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* cit., pp. 115 sg.; cfr. anche § 42 di questo libro.

amore di semplicità, è chiaro che dovremmo usare le teorie piú semplici. Questo è il modo in cui Poincaré, per cui la scelta di una teoria è materia di convenzione, perviene alla formulazione del suo principio per la scelta delle teorie: sceglie la *piú semplice* tra le convenzioni possibili. Ma quali sono le convenzioni piú semplici?

41. *Eliminazione del concetto estetico e del concetto pragmatico di semplicità.*

La parola «semplicità» si usa in moltissimi sensi differenti. La teoria di Schrödinger, per esempio, è estremamente semplice dal punto di vista metodologico, ma secondo un altro punto di vista potrebbe benissimo essere chiamata «complessa». Possiamo dire, di un problema, che la sua soluzione non è semplice, ma difficile, di una presentazione o di un'esposizione, che non è semplice ma intricata.

Tanto per cominciare, escluderò dalla nostra discussione l'applicazione del termine «semplicità» a tutto ciò che somigli a una presentazione o a un'esposizione. Si dice talvolta, di due esposizioni della medesima prova matematica, che una è piú semplice o piú elegante dell'altra. Questa distinzione è poco interessante dal punto di vista della teoria della conoscenza; essa non rientra nel dominio della logica ma indica semplicemente una preferenza di carattere *estetico* o *pragmatico*. La situazione è analoga quando si dice che un compito può essere «eseguito con mezzi piú semplici» di un altro, e si intende che può venir eseguito piú facilmente o che, per eseguirlo, sono richiesti un addestramento minore e una minore quantità di conoscenze. In tutti questi casi la parola «semplice» può essere eliminata: l'uso che se ne fa è un uso extralogico.

42. *Il problema metodologico della semplicità.*

Che cosa rimane (ammesso che rimanga qualcosa) dopo che abbiamo eliminato l'idea estetica e quella pragmatica di semplicità? Esiste un concetto di semplicità che abbia importanza per il logico? È possibile distinguere teorie che non siano logicamente equivalenti rispetto al loro grado di semplicità?

Quando si consideri quanto poco successo abbiano avuto la maggior parte dei tentativi per definire questo concetto, la risposta a questa domanda può ben apparire dubbia. Tanto per fare un esempio, Schlick le dà una risposta negativa. Egli dice: «La semplicità è... un concetto indicativo di preferenze che hanno in parte carattere pratico e in parte carattere estetico»[1]. Ed è degno di nota che dia questa risposta proprio mentre tratta del concetto che ci interessa qui, e che chiamerò il *concetto epistemologico di semplicità*; Schlick continua infatti: «anche se non fossimo in grado di spiegare che cosa realmente si intenda, qui, per "semplicità", dovremmo tuttavia riconoscere che tutti gli scienziati che sono riusciti a rappresentare una serie di osservazioni mediante una formula molto semplice (per esempio, mediante una funzione lineare, quadratica o esponenziale) si sono immediatamente convinti di aver scoperto una legge».

Schlick discute la possibilità di definire il concetto di regolarità conforme a leggi, e specialmente la distinzione tra «legge» e «caso», con l'aiuto del concetto di semplicità. Alla fine si sbarazza di questo concetto osservando che «ovviamente la semplicità è un concetto del tutto relativo e vago; col suo aiuto non si può ottenere nessuna definizione rigorosa di causalità, né si può fare una distinzione precisa tra legge e caso»[2]. Da questo passo appare chiaramente che cosa ci si aspetti, in realtà, dal concetto di semplicità: ci si aspetta che fornisca una misura del grado di conformità a leggi o di regolarità degli eventi. Un punto di vista analogo è riecheggiato da Feigl, quando parla dell'«idea di definire il grado di regolarità, o di conformità a leggi, con l'aiuto del concetto di semplicità»[3].

L'idea epistemologica di semplicità ha una funzione speciale nelle teorie della logica induttiva, per esempio in relazione con il problema della «curva piú semplice». Coloro che

[1] SCHLICK, in «Naturwissenschaften», 19 (1931), p. 148. * Ho tradotto liberamente il termine «*pragmatischer*» usato da Schlick.

[2] *Ibid.*

[3] H. FEIGL, *Theorie und Erfahrung in der Physik* [Teoria ed esperienza in fisica], 1931, p. 25.

credono nella logica induttiva presuppongono che si arrivi alle leggi naturali per mezzo della generalizzazione di osservazioni particolari. Se pensiamo ai vari risultati di una serie di osservazioni come a punti rappresentati graficamente mediante un sistema di coordinate, allora la rappresentazione grafica della legge sarà una curva che passa per tutti questi punti. Ma per un numero finito di punti possiamo sempre tracciare un numero infinito di curve dalle forme piú diverse. Pertanto, poiché la legge non è determinata in modo univoco dalle osservazioni, la logica induttiva deve affrontare il problema di decidere quale curva, tra tutte le curve possibili, debba essere scelta.

La risposta che si dà di solito è: «Scegli la curva piú semplice». Per esempio, Wittgenstein dice: «Il processo induttivo consiste nello scegliere la legge *piú semplice* che possa esser accordata con la nostra esperienza»[4]. Di solito quando si sceglie la legge piú semplice si assume tacitamente che una funzione lineare, ad esempio, è piú semplice di una funzione quadratica, che un cerchio è piú semplice di un ellisse e cosí via. Ma, se si escludono le ragioni estetiche e pratiche, non si dànno altre ragioni per cui questa particolare gerarchia di semplicità si debba preferire ad altre, o per credere che le leggi «semplici» presentino vantaggi su quelle meno semplici[5]. Schlick e Feigl menzionano[6] uno scritto inedito di Natkin il quale, secondo quanto riferisce Schlick, propone di dire che una curva è piú semplice di un'altra quando la sua curvatura media è minore; o, secondo Feigl, quando devia dalla linea retta meno dell'altra. (Le due versioni non sono equivalenti). Questa definizione sembra concordare abbastanza bene con le nostre intuizioni; ma in qualche modo fallisce il punto cruciale: stando ad essa certe parti di un'iperbole (i tratti asintotici) sarebbero molto piú semplici di un cerchio, e via discorrendo. E io non penso davvero che la questione si possa liquidare con simili «artifici» (come li chiama Schlick).

[4] WITTGENSTEIN, *Tractatus* cit., prop. 6.363.

[5] L'osservazione di Wittgenstein sulla semplicità della logica (*Tractatus* cit., prop. 5.4541) che stabilisce lo «standard di semplicità», non aiuta a risolvere il problema. Il «principio della curva piú semplice» formulato da Reichenbach («Mathematische Zeitschrift», 34, 1932, p. 616) riposa sul suo assioma d'induzione (che io ritengo insostenibile) e non è di alcun aiuto.

[6] Nei luoghi a cui abbiamo fatto riferimento.

Inoltre la ragione per cui dovremmo dare le nostre preferenze alla semplicità definita in questa particolare maniera, continuerebbe a rimanere un mistero.

Weyl discute e respinge un tentativo molto interessante di basare la semplicità sulla probabilità. «Assumiamo, per esempio, che venti coppie coordinate di valori (x, y) della stessa funzione, $y = f(x)$ rappresentate graficamente su un foglio di carta millimetrata giacciano (nei limiti dell'accuratezza che ci si può aspettare) su una linea retta. In questo caso supporremo di essere di fronte a una legge rigorosa di natura, e supporremo altresí che y dipenda da x secondo una relazione lineare. E lo supporremo per via della *semplicità* della linea retta o perché, se la legge in questione fosse diversa, sarebbe *estremamente improbabile* che proprio queste venti coppie di osservazioni scelte arbitrariamente si approssimino tanto a una linea retta. Se ora usiamo la linea retta per interpolazione ed estrapolazione, otteniamo predizioni che vanno oltre quello che ci dicono le osservazioni. In ogni modo, quest'analisi è soggetta a critiche. Sarà sempre possibile definire funzioni matematiche di ogni genere che... saranno soddisfatte dalle venti osservazioni; e qualcuna di queste funzioni devierà considerevolmente dalla linea retta. E per ogni singola osservazione possiamo sostenere che sarebbe *estremamente improbabile* che le venti osservazioni giacciano proprio su questa curva, a meno che essa non rappresenti la legge vera. È perciò essenziale, dopo tutto, che la funzione, o meglio la classe di funzioni, ci sia data a priori dalla matematica, per via della sua semplicità matematica. Si dovrebbe notare che questa classe di funzioni non dipende necessariamente da tanti parametri quanti sono quelli da cui dipende il numero di osservazioni che devono essere soddisfatte»[7]. Weyl osserva che «la classe di funzioni ci dev'essere data a priori dalla matematica, per via della sua semplicità matematica», e il suo riferimento al numero dei parametri concorda con il mio

[7] WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* cit., p. 116. * Mentre stavo scrivendo questo libro non sapevo (e senza dubbio non lo sapeva neanche Weyl mentre stava scrivendo il suo) che Harold Jeffreys e Dorothy Wrinch avevano suggerito, sei anni prima di Weyl, che la semplicità di una funzione dovrebbe essere misurata in base al numero dei suoi parametri liberamente adattabili. (Si veda il loro articolo, scritto in collaborazione, su «Phil. Mag.», 42, 1921, pp. 369 sgg.). Desidero cogliere l'occasione per esprimere il mio debito verso questi autori.

punto di vista (che sarà sviluppato nel § 43). Ma Weyl non dice che cosa sia la «semplicità matematica»: e, soprattutto, non dice quali *vantaggi logici o epistemologici* debba possedere la legge piú semplice, paragonata con una legge piú complessa[8].

I vari passi citati fin qui sono molto importanti per la relazione che hanno col nostro scopo: l'analisi del concetto epistemologico di semplicità. Infatti questo concetto non è ancora stato determinato con precisione. È pertanto possibile respingere ogni tentativo (come il mio) di precisare questo concetto, dicendo che il concetto di semplicità al quale sono interessati gli epistemologi è, in realtà, un concetto del tutto differente. A tali obiezioni potrei rispondere che non annetto la minima importanza alla *parola* «semplicità». Non sono stato io a introdurre questo termine, e sono consapevole degli svantaggi che esso presenta. Mi limito ad asserire che il concetto di semplicità che mi accingo a chiarificare aiuta a rispondere a quelle stesse questioni che, come mostrano le citazioni che ho fatto, sono state sollevate cosí spesso dai filosofi della scienza in relazione al loro «problema della semplicità».

43. *Semplicità e grado di falsificabilità.*

A tutte le questioni epistemologiche relative al concetto di semplicità si può rispondere a condizione di identificare questo concetto con quello di *grado di falsificabilità.* Probabilmente quest'affermazione incontrerà opposizioni [*1]; e io

[8] Anche gli altri commenti di Weyl sulla connessione tra semplicità e corroborazione sono importanti a questo proposito. Essi concordano largamente con i miei punti di vista, espressi nel § 82, anche se la mia impostazione e le mie argomentazioni sono piuttosto diverse. Cfr. § 82, nota 1, * e la nuova nota qui appresso (§ 43, nota *1).

[*1] Mi fu gradito trovare che questa teoria della semplicità (comprese le idee espresse nel § 40) è stata accettata da almeno un epistemologo, William Kneale, che scrive nel suo libro *Probability and Induction* cit., pp. 229 sg.: «... È facile vedere che l'ipotesi piú semplice in questo senso, è anche l'ipotesi che possiamo sperare di eliminare piú rapidamente, se è falsa... In breve, la politica dell'assumere sempre l'ipotesi piú semplice che concordi con i fatti noti, ci metterà in grado di liberarci il piú rapidamente possibile dalle ipotesi false». Kneale aggiunge una nota in cui fa riferimento a p. 116 del libro di Weyl, oltre che al mio. Ma né nella pagina citata – di cui ho riporta-

tenterò, in primo luogo, di renderla intuitivamente piú accettabile.

Ho già mostrato che le teorie che hanno dimensione inferiore sono falsificabili piú facilmente di quelle che hanno dimensione superiore. Ad esempio, una legge che abbia la forma di una funzione di primo grado può essere falsificata piú facilmente di una legge esprimibile mediante una funzione di secondo grado. Ma, fra tutte le leggi la cui forma matematica è quella di una funzione algebrica, una legge esprimibile come funzione di secondo grado è ancora una delle meglio falsificabili. Ciò concorda con l'osservazione di Schlick sulla semplicità: «Certo dovremmo essere propensi a considerare una funzione di primo grado come piú semplice di una fun-

to, nel testo, le parti piú importanti – né nelle altre parti del grosso libro di Weyl (né, tanto meno, in altri suoi libri) sono riuscito a trovare traccia della teoria secondo cui la semplicità di una teoria è connessa con la sua falsificabilità, cioè con la facilità della sua eliminazione. Né io avrei scritto (come ho fatto verso la fine del paragrafo precedente) che Weyl «non dice quali *vantaggi logici o epistemologici* si suppone possegga la legge piú semplice» se Weyl (o qualunque altro autore a me noto) avesse anticipato la mia teoria.

I fatti sono questi. Nella sua profonda discussione del problema (qui citata nel § 42, testo relativo alla nota 7) Weyl menziona, dapprima, la concezione intuitiva secondo cui una curva semplice – per esempio una linea retta – presenta un vantaggio su una curva piú complessa *perché potrebbe essere considerato un accidente altamente improbabile che tutte le osservazioni si dispongano secondo una curva cosí semplice.* Ma invece di seguire questa teoria intuitiva (che, io credo, l'avrebbe condotto a vedere che la teoria piú semplice è meglio controllabile), Weyl la *rifiuta* perché, secondo lui, essa non resiste alla critica razionale. Egli mette in evidenza che la stessa cosa si potrebbe dire di *qualsiasi* curva *data,* per quanto complessa. (Quest'argomentazione è corretta, ma non regge piú quando si considerino i *falsificatori potenziali* – e il loro grado di composizione – in luogo dei casi verificanti). Weyl procede quindi a discutere la scarsezza del numero di parametri come criterio di semplicità, senza connetterla, in nessun modo, né con il punto di vista intuitivo che ha appena rigettato, né con altre cose le quali, come la controllabilità o il contenuto, potrebbero spiegare la nostra preferenza epistemologica per la teoria piú semplice.

La caratterizzazione di Weyl della semplicità di una curva per mezzo del basso numero dei suoi parametri fu anticipata, nel 1921, da Harold Jeffreys e Dorothy Wrinch («Phil. Mag.», 42, pp. 369 sgg.) Ma se Weyl non fece altro che non riuscire a vedere ciò che oggi è «facile a vedersi» (secondo Kneale), Jeffreys vide davvero – e vede tuttora – esattamente l'opposto: egli attribuisce alla legge piú semplice la maggiore probabilità primaria, anziché la maggiore improbabilità. (Cosí i punti di vista di Jeffreys e di Kneale, presi insieme, possono illustrare la osservazione di Schopenhauer che la soluzione di un problema somiglia spesso, dapprima, a un paradosso, e poi a un truismo). Desidero aggiungere, qui, che ho ulteriormente sviluppato le mie teorie sulla semplicità e che, nel farlo, ho tentato con tutte le mie forze, e, spero, non senza successo, di imparare qualcosa da Kneale. Cfr. appendice *x e il § *15 del *Postscript* cit.

zione di secondo grado, anche se quest'ultima rappresenta senza dubbio un'ottima legge...»[1].

Il grado di universalità e di precisione di una teoria cresce, come abbiamo visto, col crescere del suo grado di falsificabilità. Cosí, possiamo forse identificare il *grado di rigorosità* di una teoria – il grado, per cosí dire, al quale una teoria impone alla natura il rigore della legge – con il suo grado di falsificabilità: e ciò mostra che quest'ultimo adempie esattamente alla funzione cui Schlick e Feigl si aspettavano adempisse il concetto di semplicità. Posso aggiungere che la distinzione, che Schlick sperava di fare, tra legge e caso, può anche essere chiarita con l'aiuto dell'idea di gradi di falsificabilità: le asserzioni probabilistiche intorno a sequenze aventi carattere casuale si rivelano di dimensione infinita (cfr. § 65); non semplici ma complesse (cfr. § 58 e l'ultima parte del 59); e falsificabili soltanto quando si prendano speciali precauzioni (§ 68).

Il confronto tra gradi di controllabilità è stato discusso ampiamente nei §§ 31-40. Alcuni esempi, e altri dettagli forniti in quei paragrafi, possono essere facilmente trasferiti al problema della semplicità. Questo vale specialmente per il grado di universalità di una teoria: un'asserzione piú universale può prendere il posto di molte asserzioni meno universali, e per questa ragione è stata spesso chiamata «piú semplice». Si può dire che il concetto di dimensione di una teoria conferisce precisione all'idea di Weyl, di usare il numero di parametri per determinare il concetto di semplicità [*2]. E gra-

[1] SCHLICK, in «Naturwissenschaften», 19 (1931), p. 148 (cfr. § 42, nota 1).

[*2] Come ho menzionato nella nota 7 al § 42, e nella nota *1 a questo paragrafo, furono Harold Jeffreys e Dorothy Wrinch a proporre, per primi, di misurare la semplicità di una funzione in base al basso numero dei suoi parametri liberamente adattabili. Ma essi proposero anche di attribuire all'ipotesi piú semplice una piú alta probabilità primaria. I loro punti di vista possono pertanto essere esposti mediante lo schema:

semplicità = basso numero di parametri =
= alta probabilità primaria.

Accade cosí che io abbia avvicinato l'argomento da un angolo del tutto diverso. Mi interessava fissare i gradi di controllabilità e trovai, dapprima, che la controllabilità può essere misurata dall'improbabilità «logica» (che corrisponde esattamente all'improbabilità «primaria» di Jeffreys). In seguito trovai che la controllabilità, e dunque l'improbabilità primaria, può essere assimilata al basso numero di parametri; e solo alla fine assimilai l'alta controlzie alla nostra distinzione tra riduzione formale e riduzione materiale della dimensione di una teoria (cfr. § 40) è possibile affrontare certe eventuali obiezioni di Weyl. Una di queste è l'obiezione che l'insieme degli ellissi i cui assi stanno in un rapporto dato, e la cui eccentricità è data numericamente, ha esattamente lo stesso numero di parametri dell'insieme dei cerchi, anche se ovviamente è meno «semplice».

Soprattutto, la nostra teoria spiega *perché la semplicità sia cosí altamente desiderabile.* Per comprendere ciò non abbiamo bisogno di assumere un «principio di economia del pensiero», o qualcosa del genere. Se l'obbiettivo che intendiamo raggiungere è la conoscenza, allora le asserzioni semplici devono essere apprezzate di piú delle asserzioni meno semplici, *perché ci dicono di piú; perché il loro contenuto empirico è maggiore, e perché possono essere controllate meglio.*

44. *Configurazione geometrica e forma funzionale.*

La nostra teoria del concetto di semplicità ci mette in grado di risolvere un certo numero di contraddizioni che finora hanno reso dubbio se questo concetto avesse una qualsiasi utilità.

Pochi considererebbero particolarmente semplice la *configurazione* [*shape*] *geometrica*, ad esempio di una curva logaritmica; ma di solito si considera semplice una *legge* che possa essere rappresentata per mezzo di una funzione logaritmica. Analogamente, si dice che è semplice una *funzione seno*, anche se forse la configurazione geometrica di una *sinusoide* non è poi cosí semplice.

Le difficoltà di questo genere possono essere eliminate ri-

labilità all'alta semplicità. Il mio punto di vista può essere dunque esposto nello schema:

controllabilità = *alta improbabilità primaria* =
= *basso numero di parametri* =
= *semplicità.*

Si vedrà che questi due schemi in parte coincidono, ma per quanto riguarda il punto decisivo – probabilità-improbabilità – sono diametralmente opposti. Cfr. anche appendice *VIII.

cordando la connessione tra il numero dei parametri e il grado di falsificabilità e distinguendo tra riduzione formale e riduzione materiale delle dimensioni. (Dobbiamo anche tenere a mente l'ufficio dell'invarianza rispetto alle trasformazioni dei sistemi di coordinate). Quando parliamo della *forma* [*form*] *o configurazione geometrica* di una curva, esigiamo l'invarianza rispetto a tutte le trasformazioni appartenenti al gruppo dei movimenti, e possiamo anche esigere l'invarianza rispetto alle similitudini. Infatti non pensiamo a una figura o a una configurazione geometrica come a qualcosa che sia legato a una *posizione* definita. Di conseguenza, se pensiamo alla configurazione di una curva logaritmica ad un solo parametro ($y = \log_a x$) come a una figura che giace in una porzione qualsiasi del piano, allora (se ammettiamo le similitudini), la curva avrà *cinque* parametri. Dunque non è affatto una curva particolarmente semplice. Se, d'altra parte, si rappresenta una *teoria, o una legge*, per mezzo di una curva logaritmica, le trasformazioni di coordinate del tipo descritto sono irrilevanti. In questi casi sia la rotazione, sia i movimenti paralleli, sia le similitudini non hanno alcuna importanza. Infatti una curva logaritmica è, di regola, una rappresentazione grafica in cui le coordinate non possono essere scambiate tra loro. (Per esempio, l'asse delle x potrebbe rappresentare la pressione atmosferica, e l'asse delle y l'altezza sul livello del mare). Per questa ragione le similitudini sono qui egualmente prive di significato. Considerazioni analoghe valgono per le oscillazioni sinusoidali lungo un particolare asse, per esempio, l'asse del tempo, e per molti altri casi.

45. *La semplicità della geometria euclidea.*

Uno dei punti che hanno avuto parte preponderante nella maggior parte delle discussioni sulla teoria della relatività è stata la semplicità della geometria euclidea. Nessuno ha mai dubitato che la geometria euclidea come tale sia piú semplice di qualsiasi geometria non-euclidea a curvatura costante data, per non menzionare le geometrie non-euclidee a curvature varianti da luogo a luogo.

A prima vista il tipo di semplicità implicato qui sembra aver poco da fare con i gradi di falsificabilità: ma se le asserzioni in discussione vengono formulate come ipotesi empiriche, troviamo che i due concetti, semplicità e falsificabilità, coincidono anche in questo caso.

Consideriamo quali esperimenti ci possano aiutare a controllare l'ipotesi: «Nel nostro mondo dobbiamo impiegare una certa geometria metrica a raggio di curvatura cosí e cosí». Un controllo è possibile solo se si identificano certe curve geometriche con certi oggetti fisici; per esempio, linee rette con raggi, o punti con intersezioni di fili. Adottando un'identificazione di questo genere (una definizione che metta in relazione le due classi di enti, o, forse, una definizione ostensiva; cfr. § 17) si può mostrare che l'ipotesi della validità di una geometria euclidea dei raggi di luce ha un grado di falsificabilità superiore a quello di qualunque altra ipotesi contraria che asserisca la validità di qualche geometria non-euclidea. Infatti, se misuriamo la somma degli angoli di un triangolo i cui lati siano costituiti da raggi luminosi, ogni deviazione significante da 180° falsificherà l'ipotesi euclidea, mentre, d'altra parte, l'ipotesi di una geometria di Bolyai-Lobačevskij a curvatura data, sarebbe compatibile con qualsiasi misurazione particolare che non superasse i 180°. Inoltre, per falsificare quest'ipotesi sarebbe necessario misurare non soltanto la somma degli angoli, ma anche la dimensione (assoluta) del triangolo, e ciò significa che oltre agli angoli si dovrebbe definire ancora un'unità di misura, quale una unità di area. Vediamo di qui che per la falsificazione di questa ipotesi sono necessarie piú misurazioni; che l'ipotesi è compatibile con maggiori variazioni nei risultati delle misurazioni e che perciò è piú difficile da falsificare: ha un grado minore di falsificabilità. Per metterla in un altro modo: la geometria euclidea è la sola geometria metrica a curvatura definita in cui siano possibili similitudini. Di conseguenza le figure geometriche euclidee possono essere invarianti rispetto a un maggior numero di trasformazioni; cioè, possono avere dimensioni minori: possono essere piú semplici.

46. *Il convenzionalismo e il concetto di semplicità.*

Ciò che il convenzionalista chiama «semplicità» *non* corrisponde a ciò che io chiamo con lo stesso nome. L'idea centrale del convenzionalista, il suo punto di partenza, è che nessuna teoria sia determinata dall'esperienza in modo non ambiguo, e su questo punto sono d'accordo con lui. Egli crede di dover scegliere, per questa ragione, la teoria piú semplice. Però, siccome il convenzionalista non tratta le teorie come sistemi falsificabili, ma piuttosto come stipulazioni convenzionali, è ovvio che con «semplicità» intende una cosa diversa dal grado di falsificabilità.

Il concetto convenzionalistico di semplicità si rivela, in realtà, in parte di natura estetica, in parte di natura pratica. Cosí, il seguente commento di Schlick (cfr. § 42) vale per il concetto convenzionalistico di semplicità, ma non per il mio: «È certo che si può definire il concetto di semplicità soltanto per mezzo di una convenzione, che deve sempre essere arbitraria»[1]. È curioso che gli stessi convenzionalisti abbiano trascurato il carattere convenzionale del loro stesso concetto fondamentale: il concetto di semplicità. Che dovessero trascurarlo è chiaro, perché altrimenti si sarebbero resi conto che, una volta scelta la strada delle convenzioni arbitrarie, il loro appello alla semplicità non li avrebbe mai messi al riparo dell'arbitrarietà.

Dal mio punto di vista, un sistema dev'essere descritto come *complesso al piú alto grado*, se, d'accordo con la prassi convenzionalistica, ci si aggrappa saldamente ad esso come a un sistema stabilito una volta per tutte, che si è ben decisi a salvare tutte le volte che è in pericolo, introducendo ipotesi ausiliarie. Infatti il grado di falsificabilità di un sistema cosí protetto è eguale a *zero*. Il nostro concetto di semplicità ci riporta dunque alle regole metodologiche enunciate nel § 20; e in special modo a quella regola, o principio, che ci vieta di indulgere alle ipotesi *ad hoc* e alle ipotesi ausiliarie: al principio di parsimonia nell'uso delle ipotesi.

[1] SCHLICK, in «Naturwissenschaften» cit., p. 148.

Capitolo ottavo

Probabilità

In questo capitolo tratterò unicamente della *probabilità degli eventi* e dei problemi a cui essa dà luogo. Questi problemi sorgono in relazione con la teoria dei giuochi d'azzardo e con le leggi probabilistiche della fisica. Non prenderò in considerazione i problemi relativi a quella che può essere chiamata la *probabilità delle ipotesi*, cioè questioni come quella se un'ipotesi che è stata controllata frequentemente sia piú probabile di una che è stata controllata un piccolo numero di volte. Tali problemi saranno discussi nei §§ 79-85 sotto il titolo di «Corroborazione».

Le idee che implicano la teoria della probabilità svolgono una parte decisiva nella fisica moderna. Tuttavia non siamo ancora in possesso di una definizione soddisfacente e non contraddittoria di probabilità; o, il che è esattamente lo stesso, non abbiamo ancora un sistema assiomatico soddisfacente per il calcolo della probabilità. Anche le relazioni tra probabilità ed esperienza non hanno ancora trovato una chiarificazione. Durante l'esame di questo problema verrà in luce un'obiezione, che a prima vista apparirà insormontabile, ai miei punti di vista metodologici. Infatti, sebbene le asserzioni probabilistiche svolgano una parte cosí importante e vitale nella scienza empirica, tuttavia si rivelano *impervie alla falsificazione stretta.* Ma questo stesso masso, cosí ingombrante, diventerà la pietra di paragone con la quale mettere alla prova la mia teoria, allo scopo di trovare quale valore abbia.

Dunque i compiti che dobbiamo affrontare sono essenzialmente due. *Il primo è quello di fornire nuovi fondamenti per il calcolo della probabilità.* Nel tentativo di assolvere a questo compito svilupperò la teoria della probabilità come teoria frequenziale, battendo la strada seguita da Richard von Mises, ma senza far uso di quello che egli chiama «l'assioma di convergenza» (o «assioma del limite») e adottando un «assioma del disordine [*randomness*]» un po' indebolito. *Il secondo compito che mi propongo è quello di delucidare le relazioni sussistenti tra probabilità ed esperienza.* Questo significa risolvere quello che io chiamo *il problema della decidibilità delle asserzioni probabilistiche.*

Io spero che queste indagini aiuteranno a chiarire l'insoddisfacente situazione attuale, in cui i fisici fanno un grande uso della probabilità senza essere in grado di dire, con una certa coerenza, che cosa intendano con «probabilità» *[1].

47. *Il problema dell'interpretazione delle asserzioni probabilistiche.*

Incomincerò col distinguere due tipi di asserzioni probabilistiche: quelle che asseriscono una probabilità in termini numerici – e che chiamerò asserzioni probabilistiche numeriche – e quelle che non l'asseriscono in questi termini.

Cosí l'asserzione: «La probabilità di ottenere un undici

*[1] Dal 1934 ho operato tre tipi di cambiamenti all'interno della teoria della probabilità.

1) L'introduzione di un calcolo formalizzato (assiomatico) delle probabilità, che può essere interpretato in molti modi; ad esempio, nel senso delle interpretazioni logiche e frequenziali discusse in questo libro, e anche dell'interpretazione in termini di propensione, discussa nel *Postscript* cit.

2) Una semplificazione della teoria frequenziale della probabilità, raggiunta attraverso una realizzazione piú piena e piú diretta di quella del 1934, di quel programma di ricostruzione della teoria frequenziale che corre sotto la trattazione di questo capitolo.

3) La sostituzione, all'interpretazione oggettivistica della probabilità in termini di frequenza, di un'altra interpretazione oggettivistica – l'*interpretazione in termini di propensione* – e la sostituzione, al calcolo delle frequenze, del formalismo neo-classico (o basato sulla teoria della misurazione).

I primi due mutamenti risalgono al 1938 e sono indicati in questo stesso volume: il primo, da nuove appendici – dalla *II alla *V – e il secondo – quello cioè che tocca l'argomento del presente capitolo – da un certo numero di note aggiunte in calce a questo stesso capitolo e dalla nuova appendice *VI. Il cambiamento piú importante è stato descritto al § 57, nota *1.

Il terzo di questi cambiamenti (che è stato introdotto in via di tentativo nel 1953) viene spiegato e sviluppato nel *Postscript*, dove è anche applicato ai problemi della teoria quantistica.

con due dadi (non truccati) è $1/18$» è un esempio di asserzione probabilistica numerica. Le asserzioni probabilistiche non-numeriche possono essere di vari tipi. «È molto probabile che mescolando acqua e alcool si ottenga un miscuglio omogeneo» illustra un tipo di asserzione che, opportunamente interpretata, potrebbe forse essere trasformata in un'asserzione probabilistica numerica. (Per esempio: «La probabilità di ottenere... è molto vicina a 1»). Un genere molto differente di asserzioni probabilistiche non-numeriche sarebbe, ad esempio, «La scoperta di un effetto fisico che contraddica la teoria quantistica è altamente improbabile»; asserzione, questa, che credo non possa essere trasformata in un'asserzione probabilistica numerica, o essere messa sul suo stesso piano, senza distorcerne il significato. Tratterò prima delle asserzioni probabilistiche *numeriche*; quelle non-numeriche, che secondo me sono meno importanti, saranno prese in considerazione in seguito.

A proposito di ogni asserzione probabilistica numerica sorge la questione: «Come dobbiamo interpretare un'asserzione di questo tipo, e, in particolare, l'asserzione numerica che essa fa?»

48. *Interpretazioni soggettivistiche e interpretazioni oggettivistiche.*

La teoria classica (laplaciana) della probabilità definisce il valore numerico di una probabilità come il quoziente che si ottiene dividendo il numero dei casi favorevoli per il numero dei casi egualmente possibili. Possiamo anche non prendere in considerazione le obiezioni logiche che sono state sollevate contro questa definizione[1], quali l'obiezione che «egualmente possibile» non è che un'altra espressione per «egualmente probabile». Ma anche allora sarebbe ben difficile ac-

[1] Cfr. ad esempio, R. VON MISES, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* [Probabilità, statistica e verità], 1928, pp. 62 sgg.; 1936², pp. 84 sgg. * Sebbene sia spesso chiamata «laplaciana» (come anche in questo libro) la definizione classica è vecchia almeno quanto la *Doctrine of Chances* [Dottrina del caso], 1718, di De Moivre. Per una delle prime obiezioni contro la frase «egualmente possibile», cfr. C. S. PEIRCE, in «Collected Papers», 2 (1932) (pubblicato per la prima volta nel 1878), p. 417 § 2, 673.

cettare questa definizione come quella che fornisce un'interpretazione applicabile in modo non ambiguo. In essa infatti si trovano implicite varie interpretazioni differenti, che classificherò come interpretazioni soggettivistiche e interpretazioni oggettivistiche.

Un'*interpretazione soggettivistica* della teoria della probabilità è suggerita dal frequente uso di espressioni di sapore psicologico, come «*aspettativa* matematica», «legge normale dell'*errore*» ecc. Nella sua forma originale tale interpretazione è *psicologistica*. Tratta il grado di probabilità come misura dei sentimenti di certezza o di incertezza, di credenza o di dubbio che possono essere suscitati in noi da certe asserzioni o da certe congetture. Questo modo di tradurre la parola «probabile» può rivelarsi abbastanza soddisfacente in relazione ad alcune asserzioni non-numeriche; non mi sembra però che un'interpretazione, che segua queste linee, sia molto soddisfacente per le asserzioni probabilistiche numeriche.

C'è tuttavia una variante piú recente dell'interpretazione soggettivistica[*1] che merita, in questa sede, una considerazione piú seria. Essa interpreta le asserzioni probabilistiche non psicologicamente, ma *logicamente*, come asserzioni intorno a ciò che può essere chiamato la «prossimità logica»[2] delle asserzioni. Le asserzioni, come tutti sappiamo, possono stare fra loro in varie relazioni logiche quali derivabilità, incompatibilità, indipendenza reciproca; e la teoria logico-soggettivistica, di cui Keynes[3] è il principale esponente, tratta *la relazione di probabilità* come un tipo speciale di relazione logica tra due asserzioni. I due casi estremi di questa relazione di probabilità sono la derivabilità e la contraddizione: si dice che un'asserzione «q» «dà»[4] a un'altra asserzione, p, la pro-

[*1] Le ragioni per cui annovero l'interpretazione logica tra le varianti dell'interpretazione *soggettivistica* sono discusse piú a fondo nel capitolo *II del *Postscript* cit., dove l'interpretazione soggettivistica è sottoposta a una critica dettagliata. Cfr. anche appendice *IX.

[2] WAISMANN, *Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffes* [Analisi logica del concetto di probabilità], in «Erkenntnis», I (1930), p. 237: «La probabilità cosí definita è dunque, per cosí dire, una misura della prossimità logica, della connessione deduttiva tra le due asserzioni». Cfr. anche WITTGENSTEIN, *Tractatus* cit., prop. 5.15 sgg.

[3] KEYNES, *A Treatise on Probability* cit., pp. 95 sgg.

[4] WITTGENSTEIN, *Tractatus* cit., prop. 5.152: «Se p segue da q, la proposizione q dà alla proposizione p la probabilità 1. La certezza della conclusione logica è un caso limite di probabilità».

babilità 1, se *p* segue da *q*. Nel caso in cui *p* e *q* siano fra loro contraddittorie la probabilità che *q* dà a *p* è zero. Tra questi due estremi giacciono altre relazioni di probabilità che possono essere approssimativamente interpretate nel modo seguente: la probabilità numerica di un'asserzione *p* (data *q*) è tanto maggiore quanto meno il suo contenuto va oltre ciò che è già contenuto nell'asserzione *q* da cui dipende la probabilità di *p* (e che «dà» a *p* una probabilità).

L'affinità tra questa teoria e la teoria psicologistica si può vedere dal fatto che Keynes definisce la probabilità come il «grado di credenza razionale». Con quest'espressione egli intende la quantità di fiducia che è corretto accordare a un'asserzione *p* alla luce dell'informazione o della conoscenza che otteniamo dall'asserzione *q*, che «dà» probabilità a *p*

Una terza interpretazione, l'*interpretazione oggettivistica*, tratta ogni asserzione di probabilità numerica come un'asserzione intorno alla *frequenza relativa* con cui un certo evento compare all'interno di una *sequenza di accadimenti*[5].

Secondo quest'interpretazione, l'asserzione «la probabilità che il prossimo lancio di questo dado dia cinque è eguale a ⅙» non è propriamente un'asserzione intorno al prossimo lancio; si tratta piuttosto, di un'asserzione intorno a un'intera *classe di lanci*, di cui il prossimo lancio è soltanto un elemento. L'asserzione in questione non dice niente di piú se non che la frequenza relativa del cinque, all'interno di questa classe di lanci, è eguale a ⅙.

Stando a questo punto di vista le asserzioni numeriche di probabilità sono ammissibili soltanto se possiamo darne una *interpretazione in termini di frequenza*. Quelle asserzioni probabilistiche per le quali non è possibile dare un'interpretazione in termini di frequenza e, in particolare le asserzioni probabilistiche non numeriche, sono di solito lasciate in disparte dai sostenitori della teoria frequenziale.

[5] Per la piú antica teoria frequenziale, cfr. la critica di KEYNES, *A Treatise on Probability* cit., pp. 95 sgg., dove si fa un riferimento particolare al libro di J. VENN, *The Logic of Chance* [La logica del caso]. Per quanto riguarda il punto di vista di Whitehead, cfr. § 80, nota 2. I principali rappresentanti della nuova teoria frequenziale sono: R. von Mises (cfr. § 50, nota 1), Dörge, Kamke, Reichenbach e Tornier. * Una nuova interpretazione oggettivistica, strettissimamente imparentata con la teoria frequenziale, ma differente da essa anche nel formalismo matematico in cui è espressa, è l'*interpretazione in termini di propensione* introdotta nei §§ *53 sgg. del *Postscript* cit.

Nelle pagine che seguono tenterò di ricostruire daccapo la teoria della probabilità come *teoria frequenziale* (modificata). Dichiaro dunque la mia fede in un'*interpretazione oggettivistica*, soprattutto perché credo che soltanto una teoria oggettivistica possa spiegare l'applicazione del calcolo della probabilità nell'ambito della scienza empirica. Ammetto che la teoria soggettivistica è in grado di fornire una soluzione coerente al problema di come decidere le asserzioni probabilistiche, e che, in generale deve affrontare un minor numero di difficoltà di quante non ne debba affrontare la teoria oggettivistica. Ma la sua soluzione è che le asserzioni probabilistiche sono non-empiriche; che sono tautologie. E questa soluzione si rivela, in ultima analisi, inaccettabile quando ricordiamo l'uso che la fisica fa della teoria della probabilità. (Rifiuto quella variante della teoria soggettivistica la quale sostiene che le asserzioni oggettive sulla frequenza devono essere ricavate da assunzioni soggettive – magari usando come «ponte» il teorema di Bernoulli [6]. Considero il programma irrealizzabile per ragioni di ordine logico).

49. *Il problema fondamentale della teoria del caso.*

La piú importante applicazione della teoria della probabilità è l'applicazione a quelli che possiamo chiamare eventi, o accadimenti, «casuali» [*chance-like*] o «a casaccio» [*random*]. Essi sembrano caratterizzati da un genere particolare di incalcolabilità che ci dispone a credere – dopo molti tentativi falliti – che nel loro caso tutti i metodi razionali noti debbano fallire. Abbiamo, per cosí dire, la sensazione che soltanto un profeta, e non uno scienziato, sia in grado di prevederli. E tuttavia proprio quest'incalcolabilità ci fa concludere che a questi eventi si può applicare il calcolo della probabilità.

È ben vero che questa conclusione un tantino paradossale, dall'incalcolabilità alla calcolabilità (cioè, all'applicabilità di

[6] Questo è il piú grosso errore di Keynes; cfr. § 62, specialmente nota 3. * Non ho mutato il mio punto di vista su questo argomento, anche se ora credo che il teorema di Bernoulli possa servire come «ponte» *all'interno* di una teoria oggettivistica – come ponte che unisce le propensioni alla statistica. Cfr. anche appendice *IX e §§ *55-*57 del *Postscript* cit.

un certo calcolo) cessa di essere paradossale se accettiamo la teoria soggettivistica, ma questo modo di evitare il paradosso è estremamente insoddisfacente. Infatti esso trascina con sé la teoria secondo cui, contrariamente a tutti gli altri metodi della scienza empirica, il calcolo della probabilità non è un metodo per calcolare predizioni. Secondo la teoria soggettivistica esso è semplicemente un metodo per compiere trasformazioni logiche di ciò che conosciamo già; o, piuttosto, di ciò che *non* conosciamo: infatti, compiamo queste trasformazioni proprio quando ci manca la conoscenza[1]. È vero che questa concezione dissolve il paradosso, ma *non spiega in qual modo un'asserzione d'ignoranza, interpretata come un'asserzione frequenziale, possa essere controllata e corroborata empiricamente*. Questo, però, è proprio il nostro problema. In che modo possiamo spiegare il fatto che dall'incalcolabilità – cioè, dall'ignoranza – possiamo trarre conclusioni che siamo in grado di interpretare come asserzioni intorno alle frequenze empiriche, e che, alla fine, troviamo brillantemente corroborate in pratica?

Finora neanche la teoria frequenziale è stata in grado di fornire una soluzione soddisfacente di questo problema, che chiamerò *il problema fondamentale della teoria del caso* [*chance*]. Nel § 67 mostrerò che questo problema è connesso con l'«assioma di convergenza» che è parte integrante della teoria nella sua forma attuale. Però, dopo che quest'assioma sia stato eliminato, sarà possibile trovare una soluzione soddisfacente nell'ambito della teoria frequenziale. La soluzione si troverà analizzando le assunzioni che ci consentono di ragionare dalla successione irregolare degli accadimenti singoli alla regolarità o stabilità delle loro frequenze.

[1] WAISMANN, in «Erkenntnis», I (1930), p. 238, scrive: «L'unica ragione per introdurre il concetto di probabilità è l'incompletezza della nostra conoscenza». Una concezione analoga è stata sostenuta da C. Stumpf (in «Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften», Phil.-hist. Klasse, 1892, p. 41). * Credo che questo punto di vista, largamente diffuso, sia responsabile delle peggiori confusioni. Lo mostrerò dettagliatamente nel *Postscript* cit., capp. *II e *V.

50. *La teoria frequenziale di von Mises.*

Il primo a proporre una teoria frequenziale che fornisca un fondamento per tutti i principali teoremi del calcolo della probabilità è stato Richard von Mises[1]. Le sue idee fondamentali sono le seguenti.

Il calcolo delle probabilità è una teoria di certe sequenze di eventi o accadimenti casuali, o a casaccio; cioè, di una serie di eventi ripetibili, come una serie di lanci di un dado. Queste sequenze sono definite come «casuali» o «a casaccio» da due condizioni assiomatiche: l'*assioma di convergenza* (o l'*assioma del limite*) e l'*assioma del disordine* [*randomness*]. Una sequenza di eventi che soddisfi entrambe queste condizioni, è chiamata da von Mises un «collettivo».

Un collettivo è, per usare un linguaggio inesatto, una sequenza di eventi o di accadimenti che è passibile, in linea di principio, di essere continuata indefinitamente: per esempio una sequenza di lanci fatti con un dado che si suppone indistruttibile. Ciascuno di questi eventi ha un certo carattere o *proprietà*: per esempio, il dado può mostrare la faccia del cinque, e avere cosí la *proprietà cinque*. Se prendiamo tutti i lanci aventi la proprietà cinque che sono comparsi fino a un certo elemento della sequenza e dividiamo il loro numero per il numero totale dei lanci fino a quell'elemento (cioè il numero ordinale dell'elemento nella sequenza) otteniamo *la frequenza relativa* dei cinque fino a quell'elemento. Se determiniamo la frequenza relativa dei cinque per ogni elemento della sequenza otteniamo, in questo modo, una nuova sequenza – *la sequenza delle frequenze relative di cinque*. La sequenza delle frequenze è distinta dalla sequenza originale di eventi a cui corrisponde, e che può essere chiamata la «sequenza degli eventi» o la «sequenza delle proprietà».

[1] R. VON MISES, *Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [Proposizioni fondamentali del calcolo delle probabilità], in «Mathematische Zeitschrift», 4 (1919), p. 1; *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [Principî del calcolo delle probabilità], in «Mathematische Zeitschrift», 5 (1919), p. 52; *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* cit.; *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik* [Il calcolo delle probabilità e il suo impiego in statistica e in fisica teorica], (*Vorlesungen über angewandte Mathematik* [Lezioni di matematica applicata], 1), 1931.

Per dare un semplice esempio di collettivo ho scelto quella che possiamo chiamare un'«*alternativa*». Con questo termine denotiamo una sequenza di eventi che si suppone abbiano *soltanto due proprietà*, come la sequenza di lanci di una moneta. Una proprietà, testa, sarà denotata con «1»; l'altra, croce, con «0». Una sequenza di eventi (o sequenza di proprietà) può dunque essere rappresentata nel modo seguente:

A) 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 ...

Corrispondente a questa «alternativa» – o, piú precisamente, correlata alla proprietà «1» di questa alternativa – è la seguente sequenza di frequenze relative, o «sequenza frequenziale»[2]:

A′) $0\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{4}\ \frac{2}{5}\ \frac{2}{6}\ \frac{3}{7}\ \frac{4}{8}\ \frac{5}{9}\ \frac{5}{10}\ \frac{6}{11}\ \frac{6}{12}\ \frac{7}{13}\ \frac{7}{14}\ \ldots$

Ora l'*assioma di convergenza* (o «assioma del limite») postula che, man mano che la sequenza degli eventi diventa piú lunga, la sequenza delle frequenze tende a un *limite* definito. Questo assioma viene usato da von Mises perché dobbiamo assicurarci *un valore fisso di frequenza* col quale operare (anche se le frequenze effettive hanno valori fluttuanti). In ogni collettivo ci sono almeno due proprietà, e se ci vengono dati i limiti corrispondenti a *tutte* le proprietà di un collettivo, ci viene anche data quella che si chiama la sua «*distribuzione*».

L'*assioma del disordine* o, come talvolta viene chiamato, «il principio dell'esclusione del sistema di scommesse», è destinato a dare espressione matematica al carattere casuale della sequenza. È chiaro che se le sequenze dei lanci della moneta mostrassero regolarità come, ad esempio, un'apparizione abbastanza regolare di croce dopo tre lanci in cui risulta testa, un giocatore dovrebbe essere in grado di migliorare le sue chances usando un sistema di scommesse. Ora l'assioma del disordine postula, per tutti i collettivi, che non esiste

[2] Possiamo far corrispondere ad ogni sequenza di proprietà tante sequenze di frequenze relative quante sono le proprietà definite nella sequenza. Pertanto, nel caso di un'alternativa, ci saranno due sequenze distinte. Ma queste due sequenze sono derivabili l'una dall'altra, dal momento che sono complementari (termini corrispondenti si sommano fino a dare 1). Per questa ragione mi riferirò, per brevità, alla «(sola) sequenza di frequenze relative correlate coll'alternativa (α)», con il che intenderò sempre la sequenza delle frequenze correlate con la proprietà «1» di quest'alternativa (α).

un sistema di scommesse che possa essere applicato con successo ai collettivi stessi. Postula che, qualunque sistema di scommesse prendiamo per scegliere lanci creduti favorevoli, troveremo che, se la scommessa viene continuata abbastanza a lungo, le frequenze relative nella sequenza dei *lanci supposti favorevoli* tenderanno allo stesso limite a cui tenderanno quelle della sequenza di *tutti i lanci*. Dunque una sequenza per la quale esista un sistema di scommesse grazie al quale il giocatore può migliorare le sue chances, non è un collettivo nel senso di von Mises.

Cosí, per von Mises, «probabilità» è un altro termine per «limite della frequenza relativa in un collettivo». L'idea di probabilità, pertanto, è applicabile *solo a sequenze di eventi*, restrizione questa che è probabilmente inaccettabile da un punto di vista come quello di Keynes. Ai critici che gli obbiettavano la ristrettezza della sua interpretazione, von Mises replicò mettendo in evidenza la differenza tra l'uso scientifico della probabilità, per esempio in fisica, e l'uso popolare della probabilità e fece vedere che sarebbe un errore esigere che un termine scientifico, rigorosamente definito, debba corrispondere, per tutti gli aspetti, all'uso inesatto, prescientifico.

Secondo von Mises *il compito del calcolo della probabilità* consiste solo e semplicemente in questo: inferire certi «collettivi derivati», con «distribuzioni derivate», da certi «collettivi iniziali» dati, con certe «distribuzioni iniziali» date: in breve: calcolare probabilità non date partendo da probabilità date.

I tratti distintivi di questa teoria sono stati condensati da von Mises in quattro punti[3]: il concetto di collettivo precede quello di probabilità; quest'ultimo è definito come il limite delle frequenze relative; viene formulato un assioma del disordine; viene definito il compito del calcolo della probabilità.

[3] Cfr. VON MISES, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* cit., p. 22.

51. *Progetto di una nuova teoria della probabilità.*

I due assiomi o postulati, formulati da von Mises al fine di definire il concetto di collettivo, sono stati sottoposti a violente critiche; e io credo che tali critiche non siano del tutto ingiustificate. In particolare contro la combinazione dell'assioma di convergenza e dell'assioma del disordine[1] sono state sollevate obiezioni basate sull'impossibilità di ammettere l'applicazione del concetto matematico di limite o di convergenza a una sequenza che per definizione (cioè, per via dell'assioma del disordine) non dev'essere soggetta a nessuna legge o regola matematica. Infatti il limite matematico non è altro che una *proprietà caratteristica della regola matematica o legge che definisce la sequenza.* È semplicemente una proprietà di questa regola o legge se, per qualsiasi frazione scelta vicina quanto si vuole allo zero, esiste nella sequenza un elemento tale che tutti gli elementi successivi ad esso differiscono di una quantità minore di quella frazione per qualche valore definito, che è chiamato il loro limite.

Per affrontare queste obiezioni si è proposto di evitare la combinazione dell'assioma di convergenza con quello del disordine e di postulare soltanto la convergenza, cioè l'esistenza di un limite. Per quanto riguarda l'assioma del disordine si propose, o di abbandonarlo del tutto (Kamke) o di sostituirlo con un'esigenza piú debole (Reichenbach). Questi suggerimenti presuppongono che la causa delle difficoltà sia l'assioma del disordine.

In contrasto con questi punti di vista, io sono propenso a gettare la colpa sull'assioma di convergenza non meno che sull'assioma del disordine. Dunque ritengo che i compiti da assolvere siano due: il miglioramento dell'assioma del disordine (e questo è, soprattutto, un problema matematico) e l'eliminazione completa dell'assioma di convergenza; problema, questo, che interessa particolarmente l'epistemologo[2] (cfr. § 66).

[1] WAISMANN, in «Erkenntnis», I (1930), p. 232.

[2] Quest'interesse è espresso da SCHLICK, in «Naturwissenschaften», 19 (1931). * Continuo a credere che questi due compiti siano importanti. Sebbene in questo libro io sia quasi riuscito a ottenere quello che mi proponevo di ottenere, i due compiti furono portati a termine soddisfacentemente soltanto nella nuova appendice *VI.

Nei paragrafi che seguono mi propongo di trattare prima la questione matematica e poi la questione epistemologica.

Il primo di questi due compiti, la ricostruzione della teoria matematica[3], ha come scopo principale la derivazione del teorema di Bernoulli – la prima «legge dei grandi numeri» – da *un assioma modificato del disordine*; modificato, cioè, in modo da non richiedere nulla piú di quanto sia necessario per raggiungere questo scopo. O, per essere piú precisi, il mio compito è la derivazione della formula binomiale (talvolta chiamata «formula di Newton») in quella che io chiamo la sua «terza forma». Infatti da questa formula è possibile ottenere, seguendo i procedimenti usuali, il teorema di Bernoulli e gli altri teoremi della teoria della probabilità riguardanti il limite.

Mi propongo di elaborare, in primo luogo, una *teoria frequenziale per le classi finite* e, in quest'ambito, di svilupparla fin dov'è possibile, cioè fino alla derivazione della («prima») formula binomiale. Questa teoria frequenziale per le classi finite costituisce solo una parte piuttosto elementare della teoria delle classi. Essa sarà sviluppata unicamente allo scopo di ottenere una base per la discussione dell'assioma del disordine.

In seguito procederò alle *sequenze infinite* (cioè a sequenze di eventi che possono essere continuate indefinitamente) col vecchio metodo dell'introduzione di un assioma di convergenza: infatti abbiamo bisogno di una cosa del genere per la nostra discussione dell'assioma del disordine. E, dopo aver derivato e preso in considerazione il teorema di Bernoulli, esaminerò *in che modo sia possibile eliminare l'assioma di convergenza* e qual genere di sistema assiomatico risulti da quest'eliminazione.

Nel corso della derivazione matematica userò *tre* differenti simboli di frequenza: F'' per simbolizzare la frequenza relativa nelle classi finite; F' per simbolizzare il limite delle frequenze relative di una sequenza di frequenze infinita; e, infine, F per simbolizzare la probabilità oggettiva, cioè la frequenza relativa in una sequenza «irregolare», «a casaccio» o «casuale».

[3] Un resoconto completo della costruzione matematica sarà pubblicato separatamente. * Cfr. la nuova appendice *VI.

52. *Frequenza relativa in una classe finita.*

Consideriamo una classe α di un numero *finito* di accadimenti; per esempio, la classe dei lanci fatti ieri con questo particolare dado. La classe α, che supponiamo *non-vuota*, serve, per cosí dire, come sistema di riferimento, e sarà chiamata *classe-riferimento* (finita). Il numero degli elementi appartenenti ad α, cioè, il numero cardinale di questa classe, si denota con «$N(\alpha)$», che si legge «il numero di α». Supponiamo ora di avere un'altra classe, β, che può essere o non essere finita. Chiameremo β la nostra classe-proprietà: tale classe può essere, per esempio, la classe di *tutti* i lanci che dànno un cinque o (come vedremo) che hanno la proprietà cinque.

La classe di quegli elementi che appartengono sia ad α sia a β si chiama la classe-prodotto di α e β ed è denotata da «$\alpha.\beta$», che si legge «α e β». Poiché $\alpha.\beta$ è una sottoclasse di α, può contenere al massimo un numero finito di elementi (può anche essere vuota). Il numero degli elementi di $\alpha.\beta$ si denota con «$N(\alpha.\beta)$».

Mentre simbolizziamo i *numeri* (finiti) degli elementi con N, le *frequenze relative* saranno simbolizzate da F''. Per esempio, «la frequenza relativa della proprietà β all'interno della classe-riferimento α» si scrive «${}_{\alpha}F''(\beta)$». Quest'espressione si può leggere «la frequenza α di β». Possiamo ora definire

Def 1 $${}_{\alpha}F''(\beta) = \frac{N(\alpha.\beta)}{N(\alpha)}.$$

Nei termini del nostro esempio quest'eguaglianza significa: «la frequenza relativa di cinque lanci effettuati ieri con questo dado è, per definizione, eguale al quoziente ottenuto dividendo il numero dei cinque ottenuti ieri con questo dado per il numero totale dei lanci effettuati ieri con questo dado» *[1].

*[1] Naturalmente la definizione 1) è imparentata con la definizione classica della probabilità, come del rapporto tra i casi favorevoli e i casi egualmente possibili; ma dovrebbe essere distinta chiaramente da quest'ultima definizione, poiché nella 1) non è implicita nessuna assunzione che gli elementi di α siano «egualmente possibili».

Da questa definizione, peraltro piuttosto ovvia, è molto facile derivare i teoremi del *calcolo della frequenza in classi finite* (piú in particolare: il teorema generale della moltiplicazione, il teorema dell'addizione e i teoremi della divisione, cioè le regole di Bayes, cfr. appendice II). È caratteristico dei teoremi di questo calcolo della frequenza e del calcolo della probabilità in generale che in essi non compaiono mai numeri cardinali (numeri N) ma soltanto frequenze relative, cioè rapporti, o numeri F. I numeri N compaiono soltanto nelle prove di alcuni teoremi fondamentali dedotti direttamente dalla definizione; essi però non compaiono nei teoremi stessi [*2].

In che modo si debba intendere ciò, verrà qui mostrato con l'aiuto di un esempio molto semplice. (Altri esempi si troveranno nell'appendice II). Denotiamo con «$\bar{\beta}$» la classe degli elementi che non appartengono a β (si legga: «il complemento di β» o, piú semplicemente, «non-β»). Possiamo allora scrivere:

$$_{\alpha}F''(\beta)+{}_{\alpha}F''(\bar{\beta}) = 1.$$

Mentre l'enunciato di questo teorema contiene soltanto numeri F la sua prova fa uso di numeri N. Infatti il teorema segue dalla definizione 1) con l'aiuto di un semplice teorema di calcolo delle classi, che asserisce che $N(\alpha.\beta)+N(\alpha.\bar{\beta}) = N(\alpha)$.

53. *Selezione, indipendenza, refrattarietà, irrilevanza.*

Tra le operazioni che si possono compiere con le frequenze relative nelle classi finite, l'operazione di *selezione* [1] è di speciale importanza per quello che segue.

Supponiamo che sia data una classe-riferimento finita, α, per esempio la classe dei bottoni contenuti in una scatola, e due classi-proprietà, β (poniamo i bottoni rossi) e γ (per esempio, i bottoni grandi). Ora possiamo prendere la classe-

[*2] Scegliendo un insieme di formule F dalle quali possono essere derivate le altre formule F, otteniamo un *sistema assiomatico* formale *per la probabilità*. Cfr. appendici II, *II, *IV e *V.

[1] Il termine usato da von Mises è «*scelta*» («*Auswahl*»).

prodotto, $\alpha . \beta$, come una *nuova classe-riferimento* e chiederci quale sia il valore di ${}_{\alpha.\beta}F''(\gamma)$, cioè quale sia la frequenza di γ all'interno della nuova classe-riferimento[2]. La nuova classe-riferimento $\alpha . \beta$ può essere chiamata «il risultato della selezione degli elementi β da α», o «la selezione da α secondo la proprietà β»; infatti possiamo pensare che questa classe sia stata ottenuta scegliendo da α tutti quegli elementi (bottoni) che hanno la proprietà β (rosso).

Ora, è possibile che γ compaia nella nuova classe-riferimento, $\alpha . \beta$, con la stessa frequenza relativa con cui compariva nella classe-riferimento originaria, α: in altre parole, può essere vero che

$$ {}_{\alpha.\beta}F''(\gamma) = {}_{\alpha}F''(\gamma). $$

In questo caso diremo, seguendo Hausdorff[3], che le proprietà β e γ sono «*reciprocamente indipendenti* all'interno della classe-riferimento α». La relazione di indipendenza è una relazione a tre termini ed è simmetrica rispetto alle proprietà β e γ[4]. Se due proprietà β e γ sono (reciprocamente) indipendenti all'interno di una classe-riferimento α, possiamo anche dire che, all'interno di α, la proprietà γ è *refrattaria* alla selezione degli elementi β; o forse anche che, rispetto alla proprietà γ, la classe-riferimento α è refrattaria a una selezione secondo la proprietà β.

Dal punto di vista della teoria soggettivistica la reciproca indipendenza, o refrattarietà di β e γ all'interno di α, potrebbe anche essere interpretata come segue: se siamo informati che un particolare elemento della classe α ha la proprietà β,

[2] La risposta a questa domanda è data dal teorema generale della divisione (cfr. appendice II).

[3] HAUSDORFF, in «Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Ges. d. Wissenschaften», Leipzig, mathem.-physik. Klasse, 53 (1901), p. 158.

[4] È simmetrico addirittura tre volte, cioè, per α, β e γ se assumiamo che anche β e γ siano *finite*. Per la prova dell'asserzione di simmetria cfr. l'appendice II, I^s) e I_s). * La condizione di finitudine per la simmetria tripla, asserita in questa nota, è insufficiente. Posso aver inteso esprimere la condizione che β e γ sono limitate dalla classe di riferimento finita, o, piú probabilmente, che α debba costituire il nostro universo di discorso finito. (Queste sono condizioni sufficienti). L'insufficienza della condizione, come è stata formulata nella mia nota, è resa palese dal seguente controesempio. Si prenda un universo di 5 bottoni; quattro sono rotondi (α); 2 sono rotondi e neri ($\alpha\beta$); 2 sono rotondi e grandi ($\alpha\gamma$); 1 è rotondo, nero e grande ($\alpha\beta\gamma$); e 1 è quadrato, nero e grande ($\bar{\alpha}\beta\gamma$). In questo caso non abbiamo simmetria tripla, poiché ${}_{\alpha}F''(\gamma) \neq {}_{\beta}F''(\gamma)$.

allora quest'informazione è *irrilevante* quando β e γ sono reciprocamente indipendenti all'interno di α; irrilevante, cioè, ai fini della questione se anche quest'elemento abbia la proprietà γ o non ce l'abbia [*1]. Se, d'altra parte, sappiamo che γ compare piú spesso (o meno spesso) nella sottoclasse α.β (che è stata selezionata da α secondo β), allora l'informazione che un elemento ha la proprietà β è *rilevante* ai fini della questione se anche quest'elemento abbia la proprietà γ o non ce l'abbia [5].

54. *Sequenze finite. Selezione ordinale e selezione di intorno.*

Supponiamo che gli elementi di una classe-riferimento finita, α, siano *numerati* (per esempio, che su ciascun bottone contenuto nella scatola sia scritto un numero), e che siano disposti in una *sequenza*, secondo questi numeri ordinali. In questa sequenza possiamo distinguere due tipi di selezione che hanno un'importanza particolare: la selezione secondo il numero ordinale di un elemento, o, in breve, la selezione ordinale, e la selezione secondo l'intorno di quest'elemento.

La *selezione ordinale* consiste nell'operare una selezione dalla sequenza α, secondo una proprietà β che dipende dal numero ordinale dell'elemento (sulla cui selezione si deve decidere). Per esempio, β può essere la proprietà *pari*, cosí che scegliamo da α tutti quegli elementi il cui numero ordinale è pari. Gli elementi cosí selezionati formano una *sottosequenza selezionata.* Se una proprietà γ è indipendente da una selezione ordinale secondo β possiamo anche dire che la *selezione ordinale* è indipendente rispetto a γ; oppure possia-

[*1] Cosí qualsiasi informazione circa il possesso di proprietà è rilevante, o irrilevante, se, e solo se, le proprietà in questione sono, rispettivamente, dipendenti o indipendenti. La rilevanza può dunque essere definita in termini di dipendenza, ma non viceversa. (Cfr. la nota successiva e la nota *1 al § 55).

[5] Keynes si oppose alla teoria frequenziale perché credeva che fosse impossibile definire la *rilevanza* nei termini di tale teoria; cfr. *A Treatise on Probability* cit., pp. 103 sgg. * Di fatto, la teoria soggettivistica non può definire l'*indipendenza* (oggettiva), e questa è un'obiezione piuttosto seria, come mostro nel *Postscript*, cap. *II, specialmente §§ *40-*43.

mo dire che, rispetto a γ, la sequenza α è refrattaria a una selezione di elementi β.

La *selezione di intorno* è resa possibile dal fatto che quando si ordinano gli elementi in una sequenza numerata, si creano certe relazioni di intorno. Questo ci permette, ad esempio, di scegliere tutti quei membri il cui predecessore immediato ha la proprietà γ; o, diciamo, quegli elementi il cui primo e secondo predecessore, o il cui secondo successore, hanno la proprietà γ; e cosí via.

Dunque, se abbiamo una sequenza di eventi – ad esempio i lanci di una moneta – dobbiamo distinguere tra due tipi di proprietà: le sue proprietà primarie, come «testa» o «croce» che appartengono a ciascun elemento indipendentemente dalla sua posizione nella sequenza; e le sue proprietà secondarie, come «pari» o «successore di croce», ecc., che un elemento acquista in virtú della sua posizione nella sequenza.

Una sequenza con due proprietà primarie è stata chiamata «alternativa». Come ha mostrato von Mises, è possibile (procedendo con una certa cautela) sviluppare le parti essenziali della teoria della probabilità come una teoria delle alternative, senza sacrificare con questo la generalità. Denotando le due proprietà primarie di un'alternativa con le cifre «1» e «0», ogni alternativa può essere rappresentata come una sequenza di uno e di zeri.

Ora, la struttura di un'alternativa può essere *regolare*, o può essere piú o meno *irregolare*. Nelle pagine che seguono studieremo piú da vicino questa regolarità o irregolarità di certe alternative finite [*1].

55. *Libertà n nelle sequenze finite.*

Prendiamo un'alternativa finita α che consista, ad esempio, di mille uno e zero disposti con regolarità, come segue:

α) 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 ...

[*1] Suggerisco di saltare, a una prima lettura, i §§ 55-64, o forse anche soltanto quelli 56-64. Potrebbe essere addirittura consigliabile passare direttamente di qui, o dalla fine del § 55, al capitolo x.

In quest'alternativa abbiamo distribuzione eguale; cioè, le frequenze relative degli uno e degli zeri sono eguali. Se denotiamo la frequenza relativa della proprietà 1 con «$F''(1)$» e con «$F''(0)$» quella di 0 possiamo scrivere

$$1) \qquad {}_{\alpha}F''(1) = {}_{\alpha}F''(0) = \tfrac{1}{2}.$$

Ora scegliamo da α tutti i termini che hanno la proprietà-intorno di *essere successori immediati di un uno* (all'interno della sequenza α). Se denotiamo con «β» questa proprietà, possiamo chiamare «$\alpha.\beta$» la sottosequenza risultante da questa selezione. Tale sottosequenza avrà la struttura.

$$\alpha.\beta) \qquad 1\;0\;1\;0\;1\;0\;1\;0\;1\;0\ldots$$

Questa sequenza è, a sua volta, un'alternativa con distribuzione eguale. Inoltre, né la frequenza relativa degli uno, né quella degli zeri è cambiata; in altre parole, avremo

$$2) \qquad {}_{\alpha.\beta}F''(1) = {}_{\alpha}F''(1); \quad {}_{\alpha.\beta}F''(0) = {}_{\alpha}F''(0).$$

Usando la terminologia introdotta nel § 53, possiamo dire che le proprietà primarie dell'alternativa α sono *refrattarie* alla selezione secondo la proprietà β; o, piú brevemente, che α è refrattaria alla selezione secondo β.

Poiché ogni elemento di α ha, o la proprietà β (quella di essere il successore di un uno), o quella di essere successore di uno zero, possiamo denotare quest'ultima proprietà con «$\bar{\beta}$». Se ora scegliamo i membri che hanno la proprietà $\bar{\beta}$ otteniamo l'alternativa

$$\alpha.\bar{\beta}) \qquad 0\;1\;0\;1\;0\;1\;0\;1\;0\ldots$$

Questa sequenza mostra una deviazione molto leggera dalla distribuzione eguale, in quanto comincia e finisce con zero (perché la stessa α, data la sua distribuzione eguale, finisce con «0, 0»). Se α contiene 2000 elementi, allora $\alpha.\bar{\beta}$ conterrà 500 zeri e soltanto 499 uno. Queste deviazioni dalla distribuzione eguale (o da altre distribuzioni) si verificano soltanto relativamente al primo o all'ultimo elemento e possono essere rese piccole a piacere rendendo la sequenza sufficientemente lunga. Per questa ragione non ce ne occuperemo piú; specialmente perché le nostre indagini devono essere estese alle sequenze infinite, dove queste deviazioni si annullano. Di conseguenza diremo che l'alternativa $\alpha.\bar{\beta}$ ha distribuzione eguale; e che l'alternativa α è *refrattaria* alla selezione di elementi che abbiano la proprietà $\bar{\beta}$. Ne consegue che α o, piuttosto, la frequenza relativa delle proprietà primarie di α, è refrattaria sia a una selezione rispetto a β, sia a una selezione rispetto a $\bar{\beta}$; possiamo pertanto dire che α è refrattaria a *ogni* selezione secondo la proprietà del *predecessore immediato*.

È chiaro che questa refrattarietà è dovuta a certi aspetti della struttura dell'alternativa α, aspetti che la possono distinguere da altre alternative. Per esempio, le alternative $\alpha . \beta$ e $\alpha . \bar{\beta}$ *non* sono refrattarie a una selezione rispetto alla proprietà di un predecessore.

Possiamo ora fare oggetto della nostra indagine l'alternativa α allo scopo di vedere se sia refrattaria ad altre selezioni, e specialmente a una selezione rispetto alla proprietà di una *coppia* di predecessori. Possiamo, per esempio, scegliere da α tutti quegli elementi che sono successori di una coppia 1, 1. Vedremo subito che α *non* è refrattaria alla selezione del successore di qualunque delle quattro possibili coppie: 1, 1; 1, 0; 0, 1; 0, 0. In nessuno di questi casi le sottosequenze che risultano hanno distribuzione eguale. Al contrario, consistono tutte di «*blocchi*» (o «*iterazioni*») ininterrotti, cioè soltanto di uno o soltanto di zeri.

Dal punto di vista della teoria soggettivistica il fatto che α sia refrattaria alla selezione secondo i singoli predecessori, ma non sia refrattaria alla selezione secondo le coppie di predecessori, si potrebbe esprimere nel modo seguente. Le informazioni riguardanti la proprietà di un predecessore di un qualsiasi elemento di α sono irrilevanti per la questione circa la proprietà di questo elemento. D'altra parte, le informazioni riguardanti le proprietà della coppia di predecessori di questo elemento sono della massima importanza. Infatti, data la legge secondo la quale si costruisce α, esse ci mettono in grado di *predire* la proprietà dell'elemento in questione: l'informazione intorno alle proprietà della sua coppia di predecessori ci fornisce, per cosí dire, le condizioni iniziali di cui abbiamo bisogno per dedurre la predizione. (La legge secondo la quale si costruisce α deve avere, come condizioni iniziali, una coppia di proprietà; essa dunque è «bidimensionale» rispetto a queste proprietà. La specificazione di *una sola* proprietà è «irrilevante» solo in quanto è composita in grado insufficiente per servire come condizione iniziale. Cfr. § 38 *[1]).

Ricordando quanto strettamente l'idea di causalità – di *causa ed effetto* – sia connessa con la deduzione di predizioni, farò ora uso dei termini seguenti. Esprimerò ora l'asserzione fatta precedentemente intorno all'alternativa α: «α è refrattaria alla scelta secondo un *singolo* predecessore», dicendo: «α è libera da ogni retroeffetto dei *singoli* predecessori», o, piú brevemente, «α è 1 libera». E invece di dire, come prima, che α è (o non è) «refrattaria a una selezione secondo *le coppie* di predecessori», dirò, ora: «α è (non è) libera dai retroeffetti delle *coppie* di predecessori», o, piú brevemente, «α è (non è) 2 libera» *[2].

Usando come prototipo l'alternativa 1 libera, α, possiamo ora costruire facilmente altre sequenze, che a loro volta hanno ancora distribuzione eguale, che non soltanto sono libere dai retroeffetti di un predecessore, cioè sono 1 libere (come α) ma che, per di piú, sono libere dai retroeffetti di una coppia di predecessori, cioè sono 2 libere. Dopo di ciò, possiamo procedere a sequenze 3 libere, e cosí via. In questo modo siamo condotti a un'idea generale che è d'importanza fondamentale per quello che segue. Si tratta dell'idea di libertà dai retroeffetti di tutti i predecessori fino a qualche numero n; o, come diremo, di libertà n. Piú precisamente, diremo che una sequenza è «n libera» se e solo se le frequenze relative delle sue proprietà primarie sono «n refrattarie», cioè, refrattarie

*[1] Questa è un'altra indicazione del fatto che i termini «rilevante» e «irrilevante» che figurano cosí largamente nella teoria soggettivistica, sono grossolanamente ingannevoli. Perché, se p è irrilevante, e cosí pure q, è piuttosto sorprendente apprendere che $p.q$ possono essere della massima rilevanza. Cfr. anche appendice *IX, specialmente ai punti 5 e 6 della Prima nota.

*[2] L'idea generale di distinguere gli intorni secondo la loro misura, e di operare con ben definite selezioni secondo l'intorno fu introdotta da me. Tuttavia il termine «libero da retroeffetti» [«*nachwirkungsfrei*»] è dovuto a Reichenbach. Tuttavia Reichenbach lo usò, a suo tempo, soltanto nel senso assoluto di «refrattario alla selezione rispetto a *qualsiasi* gruppo precedente di elementi». L'idea di introdurre un concetto di libertà di grado 1, 2, ..., n *definibile ricorsivamente*, utilizzando cosí il metodo ricorsivo per analizzare selezioni secondo l'intorno, e specialmente per *costruire sequenze casuali*, è mia. (Ho usato lo stesso metodo ricorsivo anche per definire l'indipendenza reciproca di n eventi). Questo metodo è piuttosto differente da quello di Reichenbach. Cfr. § 58, nota 4, e specialmente § 60, nota 2. Aggiunta del 1968: Ora ho trovato che Smoluchowski usò il termine molto prima che l'usasse Reichenbach.

alla selezione secondo i singoli predecessori *e* secondo le coppie di predecessori, *e* secondo le triple di predecessori... *e*, secondo le *n*-uple di predecessori [1].

Un'alternativa α, che sia 1 libera, può essere costruita ripetendo il *periodo generatore*

A) 1 1 0 0 ...

per un numero qualsiasi di volte. Analogamente, otteniamo un'alternativa 2 libera con distribuzioni eguali se prendiamo come periodo generatore

B) 1 0 1 1 1 0 0 0 ...

Un'alternativa 3 libera si ottiene dal periodo generatore

C) 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 ...

mentre un'alternativa 4 libera si ottiene dal periodo generatore

D) 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 ...

Vedremo che l'impressione intuitiva di trovarci davanti a una sequenza irregolare diventa sempre piú forte man mano che cresce il numero *n* della sua libertà *n*.

Il periodo generatore di un'alternativa *n* libera deve contenere almeno 2^{n+1} elementi. Naturalmente i periodi che abbiamo dato come esempi possono cominciare in posti differenti; per esempio, C) può cominciare col quarto elemento. In luogo di C) otterremo allora:

C′) 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 0 1 ...

Esistono altre trasformazioni che lasciano immutata la libertà *n* di una sequenza. In un'altra parte di questo libro descriveremo un metodo per costruire periodi generatori di sequenze *n* libere, per ogni numero *n* [*3].

[1] Come mi ha fatto notare il dottor K. Schiff, è possibile semplificare questa definizione. È sufficiente esigere che ogni *n*-upla di predecessori sia refrattaria alla selezione (per un dato *n*). Allora la refrattarietà alla selezione di $n-1$-uple (ecc.) può essere provata con facilità.

[*3] Cfr. appendice IV, nota *1. Il risultato è una sequenza della lunghezza 2^n+n-1, tale che, tralasciando i suoi ultimi $n-1$ elementi, otteniamo un periodo generatore di un'alternativa *m* libera, con $m = n-1$.

Se al periodo generatore di un'alternativa n libera aggiungiamo i primi n elementi del periodo successivo, otteniamo una sequenza di lunghezza $2^{n+1}+n$. Tale sequenza ha, tra le altre, la proprietà seguente: ogni disposizione di $n+1$ zeri e uno, cioè ogni $n+1$-upla possibile, compare in essa almeno una volta [*4].

56. *Sequenze di segmenti. La prima forma della formula binomiale.*

Data una sequenza finita α diciamo che una sottosequenza di α consistente di n elementi consecutivi è un «segmento di α di lunghezza n», o, piú brevemente, un «segmento n di α». Se, oltre alla sequenza α, ci è dato qualche numero definito, n, possiamo disporre i segmenti n di α in una sequenza: *la sequenza dei segmenti n* di α. Data una sequenza α possiamo costruire una nuova sequenza di segmenti n di α comunciando col segmento dei primi n elementi di α. Viene poi il segmento degli elementi di α da 2 a $n+1$. In generale, come x-esimo elemento della nuova sequenza prendiamo il segmento consistente degli elementi di α da x a $x+n-1$. La nuova sequenza cosí ottenuta si può chiamare la «sequenza dei segmenti n sovrapposti di α». Questo indica che due elementi (cioè segmenti) consecutivi della nuova sequenza si sovrappongono in modo da avere in comune $n-1$ elementi della sequenza originale α.

Ora, in seguito a selezione, da una sequenza di segmenti che si sovrappongono possiamo ottenere altre sequenze n; specialmente *sequenze di segmenti n adiacenti.*

[*4] La seguente definizione, applicabile a qualsiasi alternativa lunga, ma finita, A, caratterizzata da equidistribuzione, sembra appropriata. Sia N la lunghezza di A, ed n il piú grande numero intero tale che $2^{n+1} \leq N$. Allora si dice che A è *perfettamente casuale*, se, e solo se, il numero relativo di occorrenze di qualsiasi coppia, tripla... m-upla data (fino a $m = n$) differisce da quello di qualsiasi altra coppia, tripla,... m-upla di una quantità non maggiore, diciamo, di $m/N^{1/2}$ rispettivamente. Questa caratterizzazione rende possibile dire che una data alternativa A è approssimativamente casuale, e ci autorizza anche a definire un grado di approssimazione. Si può usare una definizione piú elaborata, basata sul metodo (di massimizzare la mia funzione E) descritto sotto i punti 8 e sgg. della mia Terza nota, ripubblicata nell'appendice *IX.

Una sequenza di segmenti n adiacenti contiene soltanto quei segmenti n che si succedono immediatamente l'un l'altro in α senza sovrapporsi. Essa può cominciare, per esempio, con i segmenti n degli elementi numerati da 1 a n, della sequenza originale α, seguiti da quella degli elementi da $n+1$ a $2n$, $2n+1$ a $3n$, e cosí via. In generale, una sequenza di segmenti adiacenti comincerà con il k-esimo elemento di α e i suoi segmenti conterranno gli elementi di α numerati da k a $n+k-1$, da $n+k$ a $2n+k-1$, da $2n+k$ a $3n+k-1$ e cosí via.

Nelle pagine che seguono le sequenze di segmenti n sovrapposti di α saranno denotate da «$\alpha_{(n)}$», e le sequenze dei segmenti n adiacenti saranno indicate da «α_n».

Consideriamo ora un po' piú da vicino le sequenze di segmenti sovrapposti $\alpha_{(n)}$. Ogni elemento di una tale sequenza è un segmento n di α. Come proprietà primaria di un elemento di $\alpha_{(n)}$ possiamo prendere in considerazione, per esempio, la n-upla ordinata degli zeri e degli uno di cui consiste il segmento. O, piú semplicemente, potremmo considerare come proprietà primaria dell'elemento *il numero dei suoi uno* trascurando l'*ordine* degli uno e degli zeri. Se denotiamo con «m» il numero degli uno, avremo, ovviamente $m \leq n$.

Ora, da ogni sequenza $\alpha_{(n)}$ otteniamo di nuovo un'*alternativa* scegliendo un particolare m ($m \leq n$), assegnando la proprietà «m» a ciascun elemento della sequenza $\alpha_{(n)}$ che ha esattamente m uno (e perciò $n-m$ zeri) e la proprietà «$\bar{m}$» (non-m) a tutti gli altri elementi di $\alpha_{(n)}$. Ogni elemento di $\alpha_{(n)}$ deve dunque avere l'una o l'altra di queste due proprietà.

Immaginiamo ancora che ci sia data un'alternativa finita α con due proprietà primarie, «1» e «0». Supponiamo che la frequenza degli uno, ${}_\alpha F''(1)$ sia eguale a p, e che la frequenza degli zeri, ${}_\alpha F''(0)$ sia eguale a q. (Non assumiamo che sia eguale la distribuzione, cioè che $p = q$).

Supponiamo ora che questa alternativa, α sia (almeno) $n-1$ libera (dove n è un numero naturale scelto arbitrariamente). Possiamo allora formulare la seguente domanda: qual è la frequenza con cui la proprietà m ricorre nella sequenza $\alpha_{(n)}$? O, in altre parole, quale sarà il valore di

$$ {}_{\alpha(n)}F''(m)? $$

Senza assumere nient'altro, se non che α è almeno n-1 libera, possiamo risolvere la questione [1] mediante l'aritmetica elementare. La risposta è contenuta nella formula seguente, la cui prova si troverà nell'appendice III:

$$1) \qquad {}_{\alpha(n)}F''(m) = {}^{n}C_{m}p^{m}q^{n-m}.$$

Il secondo membro della formula «binomiale» 1) si deve a Newton, che lo formulò in un altro contesto. Perciò qualche volta si chiama la formula di Newton. Io la chiamerò invece: «la prima forma della formula binomiale» *[1].

Con la derivazione di questa formula abbandono, per il momento, la teoria frequenziale, in quanto essa tratta di classi-riferimento *finite*. La formula ci fornirà una base per la discussione dell'assioma del disordine.

57. *Sequenze infinite. Stime ipotetiche di frequenza.*

È abbastanza facile estendere i risultati, ottenuti per sequenze finite n libere, a sequenze infinite n libere definite da un *periodo generatore* (cfr. § 55). Una sequenza infinita che svolga la funzione di classe-riferimento, alla quale siano correlate le nostre frequenze relative, può essere chiamata «sequenza-riferimento». Piú o meno, corrisponde a un «collettivo» nel senso di von Mises *[1].

[1] Chiamo il problema corrispondente, in relazione a sequenze infinite di segmenti adiacenti, il «problema di Bernoulli» (e seguo nel far ciò VON MISES, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* cit., p. 128); in connessione con sequenze infinite di segmenti sovrapposti, «problema quasi-di-Bernoulli» (cfr. § 60, nota 1). Cosí, il problema discusso qui, potrebbe essere chiamato il *problema quasi-di-Bernoulli per sequenze finite.*

*[1] Nel testo originale [in lingua tedesca] ho usato il termine «formula di Newton»; ma poiché questo termine sembra raramente usato in inglese, ho deciso di tradurlo [in inglese] con «formula binomiale».

*[1] È questo il punto in cui non sono riuscito a realizzare completamente il programma delineato soltanto in via intuitiva – il programma, cioè, consistente nell'analizzare la casualità fin dove è possibile all'interno della regione delle sequenze *finite*, e nel procedere alle sequenze-riferimento *infinite* (nelle quali abbiamo bisogno di *limiti* di frequenze relative) soltanto in seguito, allo scopo di ottenere una teoria in cui l'esistenza dei limiti delle frequenze segua dal carattere casuale della sequenza. Avrei potuto completare questo programma molto facilmente costruendo, come passo ulteriore, sequenze n libere (finite) *piú brevi*, per un n che cresce, come ho fatto nella mia vecchia appendice IV. Allora si può facilmente mostrare che, se in que-

Il concetto di libertà *n* presuppone quello di frequenza relativa; infatti la sua definizione richiede che la *frequenza relativa* con cui una proprietà ricorre sia refrattaria alla scelta secondo certi predecessori. Nei teoremi che trattano di sequenze infinite impiegherò provvisoriamente (e cioè, fino al § 64), l'idea di *limite delle frequenze relative* (denotato da F') in luogo della *frequenza relativa in classi finite* (F''). Finché ci limiteremo a sequenze-riferimento costruite *secondo qualche regola matematica* l'uso di questo concetto non darà origine a nessun problema. Per tali sequenze possiamo sempre stabilire se la sequenza di frequenze relative corrispondenti sia convergente oppure no. L'idea di un limite delle frequenze relative ci procura noie solo nel caso di sequenze per cui non è data nessuna regola matematica, ma è data soltanto una regola empirica (che metta in relazione, ad esempio, la sequenza con i lanci di una moneta); infatti in questi casi il concetto di limite non è definito (cfr. § 51).

Un esempio di regola matematica per la costruzione di una sequenza è il seguente: «l'*n*-esimo elemento della sequenza α dev'essere 0 se, e solo se, *n* è divisibile per quattro». Questa regola definisce l'alternativa infinita

α) 1 1 1 0 1 1 1 0 ...

con i limiti delle frequenze relative: ${}_{\alpha}F'(1) = 3/4$, e ${}_{\alpha}F'(0) = 1/4$. Per brevità chiamerò «*sequenze matematiche*» le frequenze definite in questo modo per mezzo di una regola matematica.

Per contro, una regola per costruire una *sequenza empirica* potrebbe essere, per esempio: «l'*n*-esimo elemento della

ste sequenze piú brevi si permette ad *n* di crescere illimitatamente, la sequenza diventa infinita e le frequenze si tramutano, senza ulteriori assunzioni, in limiti di frequenze. (Cfr. appendice IV nota *2, e la nuova appendice *VI). Tutto ciò avrebbe semplificato i paragrafi successivi che, tuttavia, conservano la loro importanza. Ma avrebbe risolto completamente, senza il bisogno di fare assunzioni ulteriori, il problema dei §§ 63 e 64; infatti, poiché l'esistenza di limiti diventa dimostrabile, non è piú necessario menzionare i punti di accumulo.

In ogni caso, questi mutamenti rimangono tutti nell'ambito della teoria frequenziale pura: tranne che nella misura in cui descrivono uno standard ideale di disordine oggettivo, diventano superflui se adottiamo un'interpretazione in termini di propensione del formalismo neoclassico (basato sulla teoria della misurazione), come ho spiegato nei §§ *53 sgg. del *Postscript* cit. Ma anche allora è necessario parlare di ipotesi frequenziali – di stime ipotetiche e delle loro prove statistiche; e cosí il presente paragrafo continua ad essere importante, come pure gran parte di quello successivo, fino al § 64.

sequenza α dev'essere 0 se, e solo se, l'n-esimo lancio della moneta c dà croce». Ma non necessariamente le regole empiriche devono sempre definire sequenze a casaccio. Per esempio direi che è empirica la regola seguente: «l'n-esimo elemento della sequenza dev'essere 1 se, e solo se, all'n-esimo secondo (partendo da qualche istante-zero) il pendolo p si trova alla sinistra di questo segno».

Quest'esempio mostra che qualche volta si può sostituire una regola matematica a una regola empirica, per esempio sulla base di certe ipotesi e di certe misurazioni relative a qualche pendolo. In questo modo possiamo trovare una sequenza matematica che si approssima alla nostra sequenza empirica con un grado di precisione che, secondo i nostri scopi, può o non può soddisfarci. Di particolare interesse in questo contesto è la possibilità (per definire la quale potremmo usare il nostro esempio) di ottenere una sequenza matematica le cui varie *frequenze* si approssimino a quelle di una certa sequenza empirica.

Nel dividere le sequenze in sequenze matematiche e sequenze empiriche, faccio uso di una distinzione che può essere chiamata «intensionale», anziché «estensionale». Se infatti una sequenza ci è data «estensionalmente», cioè enumerando i suoi elementi singolarmente, l'uno dopo l'altro – cosicché siamo in grado di conoscerne solo una porzione finita, un segmento finito, per quanto lungo – è impossibile determinare, partendo dalle proprietà di questo segmento, se la sequenza di cui esso fa parte sia una sequenza matematica o una sequenza empirica. Solo quando ci è data una regola di costruzione – cioè a dire una regola «intensionale» – possiamo decidere se una sequenza è una sequenza matematica o una sequenza empirica.

Poiché desideriamo affrontare le nostre sequenze infinite con l'aiuto del concetto di limite (delle frequenze relative) dobbiamo restringere la nostra indagine alle sequenze matematiche e, in particolare, a quelle la cui sequenza corrispondente delle frequenze relative è convergente. Questa restrizione equivale all'introduzione di un assioma di convergenza. (I problemi connessi con quest'assioma non saranno presi in esame fino ai §§ 63-66, perché si rivela conveniente il discuterli insieme con la «legge dei grandi numeri»).

Dunque tratteremo solo con *sequenze matematiche*. Tuttavia, ci occuperemo soltanto di quelle sequenze matematiche da cui ci aspettiamo (o intorno alle quali congetturiamo) che si approssimino, dal punto di vista delle frequenze, a *sequenze empiriche aventi carattere casuale o a casaccio*; queste, infatti, ci interessano di piú. Ma l'aspettarsi (o il congetturare) che, per quanto riguarda le frequenze, una sequenza matematica si approssimi a una sequenza empirica, non è altro che *formulare un'ipotesi* – un'ipotesi intorno alle frequenze della sequenza empirica[1].

Il fatto che nelle sequenze empiriche a casaccio le nostre stime delle frequenze siano ipotesi, non ha alcuna influenza sul modo in cui possiamo calcolare queste frequenze. È chiaro che, dal punto di vista delle classi *finite*, non ha nessuna importanza in che modo otteniamo le frequenze dalle quali prendono le mosse i nostri calcoli. Queste frequenze si possono ottenere contandone effettivamente gli elementi, o in base a una regola matematica, o partendo da un'ipotesi di questo o quel tipo. Oppure possiamo semplicemente inventarle. Nel calcolare le frequenze, accettiamo alcune frequenze come date, e da esse deriviamo le altre frequenze.

Lo stesso vale per le stime di frequenze in sequenze *infinite*. Cosí la questione riguardante le «fonti» delle nostre stime di frequenza non è un problema di calcolo delle probabilità; ciò tuttavia non vuol dire che tale questione verrà esclusa dalla nostra discussione dei problemi della teoria della probabilità.

Nel caso di sequenze empiriche infinite possiamo distinguere due «fonti» principali delle nostre stime ipotetiche di frequenze, cioè a dire, due modi in cui tali stime ci si possono suggerire. Una è una stima basata su un'«*ipotesi di chances eguali*» (o ipotesi di equiprobabilità), l'altra è una stima basata su un'*estrapolazione di reperti statistici.*

Per «*ipotesi di chances eguali*» intendo un'ipotesi che asserisce che le probabilità delle varie proprietà primarie sono eguali: una ipotesi, cioè, che asserisce *distribuzione eguale.* Le ipotesi di chances eguali sono di solito basate su conside-

[1] In seguito, nei §§ 65-68, discuterò il *problema della decidibilità* delle ipotesi frequenziali, cioè a dire, il problema se una congettura o ipotesi di questo tipo possa essere controllata; e, se lo può, in qual modo; se può essere in qualche modo corroborata; e se è falsificabile. * Cfr. anche appendice *IX.

razioni di *simmetria*[2]. Un esempio altamente tipico è fornito dalla congettura di frequenze eguali nel giuoco dei dadi, congettura basata sulla simmetria e sull'equivalenza geometrica delle sei facce del cubo.

Le stime dei tassi di mortalità forniscono un buon esempio di ipotesi frequenziali basate sull'*estrapolazione statistica.* Qui i dati statistici concernenti la mortalità sono accertati empiricamente, e, *basandoci sull'ipotesi che le tendenze passate continueranno ad essere relativamente stabili* o non cambieranno di molto – almeno per quanto riguarda il futuro immediato – compiamo un'estrapolazione ai casi ignoti partendo dai casi noti cioè, da accadimenti che sono stati classificati e computati empiricamente.

I ricercatori con tendenze induttivistiche saranno forse propensi a trascurare il carattere ipotetico di queste stime; confonderanno forse una stima ipotetica, cioè una predizione di frequenza basata su un'estrapolazione statistica, con una delle sue «fonti» empiriche – la classificazione e il computo effettivo degli accadimenti e delle sequenze di accadimenti passati. Spesso si pretende di «derivare» stime probabilistiche – cioè predizioni di frequenze – da accadimenti passati che sono stati classificati e computati (quali le statistiche della mortalità). Ma da un punto di vista logico questa pretesa è del tutto ingiustificata. Non si sono fatte derivazioni logiche di nessun genere. Al massimo si è avanzata un'ipotesi non-verificabile, che nulla potrà mai giustificare logicamente: la congettura che le frequenze rimarranno *costanti*, e pertanto consentiranno l'estrapolazione. Anche le *ipotesi di chances eguali* sono ritenute «derivabili empiricamente» o «empiricamente esplicabili», da alcuni sostenitori della logica induttiva, che le credono basate sull'esperienza statistica, cioè su frequenze osservate empiricamente. Per parte mia, comunque, io credo che spesso, nel fare questa specie di stime ipotetiche di frequenza, siamo guidati soltanto dalle nostre riflessioni sul significato della simmetria, e da considerazioni simili. Non vedo nessuna ragione perché queste congetture debbano essere ispirate soltanto dall'accumulazione di una gran massa di osservazioni induttive; ma in ogni caso non

[2] Keynes tratta questioni di questo genere nella sua analisi del *principio di indifferenza.* Cfr. *A Treatise on Probability* cit., cap. IV, pp. 41-64.

annetto molta importanza a queste questioni, riguardanti le origini o «fonti» delle nostre stime (cfr. § 2). Quello che secondo me è piú importante, è l'avere le idee ben chiare sul fatto che tutte le stime predittive di frequenza, compresa quella che possiamo ottenere da un'estrapolazione statistica – e certamente tutte quelle che si riferiscono a sequenze empiriche infinite – rimarranno sempre allo stato di mera congettura, perché oltrepasseranno sempre di molto tutto ciò che siamo autorizzati ad affermare sulla base delle osservazioni.

La mia distinzione tra ipotesi di chances eguali ed estrapolazioni statistiche corrisponde abbastanza bene alla distinzione classica tra probabilità «a priori» e probabilità «a posteriori». Ma poiché questi termini sono usati in tanti sensi differenti [3], e poiché oltre a ciò, sono pesantemente contaminati da associazioni filosofiche, è meglio evitarli.

Nelle pagine che seguono, esaminando l'assioma del disordine, tenterò di trovare sequenze matematiche che si approssimino a sequenze empiriche a casaccio. Ciò significa che prenderò in esame ipotesi frequenziali [*2].

58. *Esame dell'assioma del disordine.*

Il concetto di selezione ordinale (cioè di selezione compiuta secondo la posizione) e il concetto di selezione di intorno sono stati entrambi introdotti e spiegati nel § 55. Con l'aiuto di questi concetti esaminerò adesso l'assioma del disordine di von Mises – il principio dell'esclusione del sistema di scommesse – nella speranza di trovare una condizione piú debole, che sia nondimeno in grado di prenderne il posto. Nella teoria di von Mises questo «assioma» fa parte della definizione del concetto di collettivo: von Mises richiede

[3] Ad esempio, BORN e JORDAN, in *Elementare Quantenmechanik* [Meccanica quantistica elementare], 1930, p. 308, usano il primo di questi termini per denotare un'ipotesi di distribuzione eguale. D'altra parte A. A. Tschuprow usa l'espressione «probabilità a priori» per tutte le *ipotesi* frequenziali, allo scopo di distinguerle dai loro *controlli statistici*, cioè dai risultati, ottenuti a posteriori, del conteggio empirico.

[*2] Questo è, precisamente, il programma a cui alludo nella nota *1 di questo stesso paragrafo, e che ho realizzato nelle appendici IV e *VI.

che in un collettivo i limiti della frequenza siano refrattari a qualsiasi selezione sistematica. (Come egli mette in evidenza, un sistema di scommesse può sempre essere considerato come una selezione sistematica).

La maggior parte delle critiche che sono state elevate contro quest'assioma si concentrano su un aspetto relativamente inessenziale e superficiale della sua formulazione. Esse sono in relazione col fatto che, fra tutte le selezioni possibili, ci sarà quella, poniamo, dei lanci che dànno cinque; e ovviamente all'interno di questa selezione la frequenza dei cinque differirà notevolmente da quello che è nella sequenza originale. Ecco perché nella sua formulazione dell'assioma del disordine von Mises parla di quelle che egli chiama «selezioni» o «scelte» che sono «indipendenti dal risultato» del lancio in questione, e sono dunque definite senza far uso della proprietà dell'elemento che dev'essere scelto [1]. Ma a tutti i molti attacchi portati contro questa formulazione [2] si può rispondere semplicemente facendo vedere che è possibile formulare l'assioma di von Mises senza usare affatto le espressioni dubbie [3]. Infatti possiamo formularlo, ad esempio, nel modo seguente: I limiti delle frequenze in un collettivo dovranno essere refrattari sia alla selezione rispetto all'intorno sia alla selezione ordinale, sia anche a tutte le combinazioni di questi due metòdi di selezione, che possono essere usate come sistemi di scommesse [*1].

Con questa formulazione scompaiono le difficoltà sopra menzionate; ne rimangono però altre. Cosí, può darsi che sia impossibile *provare* che il concetto di collettivo, definito per mezzo di un'assioma del disordine cosí forte, non è autocontraddittorio; o, in altre parole, che la classe dei «collettivi» non è vuota. (La necessità di provarlo è stata messa in evidenza da Kamke [4]). Almeno, sembra impossibile costruire un

[1] Cfr. ad esempio, VON MISES, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* cit., p. 25.

[2] Cfr., ad esempio, FEIGL, in «Erkenntnis», I (1930), p. 256, dove questa formulazione è descritta come «non esprimibile matematicamente». La critica di Reichenbach, in «Mathematische Zeitschrift», 34 (1932), p. 594 sg., è molto simile.

[3] Dörge ha fatto un'osservazione simile, ma non l'ha spiegata.

[*1] Le ultime otto parole (che sono essenziali) non c'erano nel testo tedesco.

[4] Cfr. ad esempio E. KAMKE, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* [Introduzione alla teoria della probabilità], 1932, p. 147 e in «Jahresbe-

esempio di collettivo e provare, in questo modo, che esistono collettivi. Questo perché un esempio di sequenza infinita che soddisfi certe condizioni può essere dato soltanto mediante una regola matematica. Ma per un collettivo nel senso di von Mises non può esistere, per definizione, nessuna regola siffatta, perché come sistema di scommesse o come sistema di selezione si può usare qualsiasi regola. In realtà, se si escludono *tutti i possibili* sistemi di scommesse sembra impossibile rispondere a questa critica [*2].

Contro l'idea di escludere tutti i sistemi di scommesse si può tuttavia sollevare un'altra obiezione: che in realtà tale idea chiede *troppo*. Se dobbiamo assiomatizzare un sistema di asserzioni – in questo caso i teoremi del calcolo delle probabilità e, in particolare, il teorema speciale della moltiplicazione, o teorema di Bernoulli – non solo gli assiomi scelti devono essere sufficienti per la derivazione dei teoremi del sistema, ma devono anche (se possiamo renderli tali), essere *necessari*. Tuttavia si può mostrare che l'esclusione di *tutti* i sistemi di selezione *non è necessaria* per la deduzione del teorema di Bernoulli e dei suoi corollari. È perfettamente sufficiente esigere l'esclusione di una classe speciale di selezione secondo l'intorno: basta esigere che la sequenza sia refrattaria alle scelte compiute secondo *n*-uple di predecessori scelti arbitrariamente; cioè, che *per ogni n, sia n libera da retroeffetti* o, piú brevemente, che sia «*assolutamente libera*».

Propongo perciò di sostituire al principio dell'esclusione del sistema di scommesse di von Mises l'esigenza meno stretta di «libertà assoluta», nel senso di libertà *n* per ogni *n*, e di definire in conseguenza le sequenze matematiche casuali, come quelle sequenze che soddisfano quest'esigenza. Il principale vantaggio di questa sostituzione è che essa non esclu-

richt der deutschen Mathematiker Vereinigung», 42 (1932). L'obiezione di Kamke dev'essere sollevata anche contro il tentativo di Reichenbach di migliorare l'assioma del disordine introducendo *sequenze normali*, poiché non è riuscito a provare che questo concetto è *non-vuoto*. Cfr. REICHENBACH, *Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung* cit., p. 606.

[*2] A questa critica sembra comunque possibile rispondere nel caso in cui si debba eliminare ogni insieme *numerabile* dato di sistemi di scommessa; in questo caso, infatti, è possibile costruire un esempio di sequenza (ricorrendo a una specie di metodo diagonale). Cfr. § *54 del *Postscript* cit. (il testo che segue alla nota 5), relativo ad A. Wald.

de *tutti* i sistemi di scommesse, cosicché è possibile dare regole matematiche per costruire sequenze che sono «assolutamente libere» nel nostro senso, e di qui costruire esempi (cfr. appendice IV, § *a*). In questo modo si affronta l'obiezione di Kamke discussa in precedenza: infatti ora possiamo provare che il concetto di sequenze matematiche casuali non è vuoto e perciò è non-contraddittorio [*3].

Può forse sembrar strano che si debba tentar di tracciare la fisionomia altamente irregolare delle sequenze casuali ricorrendo a sequenze matematiche che devono conformarsi alle regole piú rigorose. A tutta prima può sembrare che l'assioma del disordine di von Mises soddisfi di piú le nostre intuizioni. Sembra del tutto soddisfacente l'imparare che una sequenza casuale dev'essere completamente irregolare, cosí da trovare che ogni regolarità congetturata verrà meno in qualche parte successiva della sequenza, purché si tenti di tutto per falsificare la congettura continuando la sequenza abbastanza a lungo. Ma quest'argomentazione intuitiva torna a vantaggio anche della mia proposta. Infatti se le sequenze casuali sono irregolari, allora, a fortiori, non saranno sequenze regolari di un tipo particolare. E la nostra esigenza di «libertà assoluta» non fa altro che escludere un particolare tipo di sequenza regolare, per quanto importante.

Che sia importante si può vedere dal fatto che sulla base della nostra esigenza escludiamo implicitamente i seguenti tre tipi di sistemi di scommesse (cfr. § 59). In primo luogo escludiamo le selezioni d'intorno «normali» o, «pure» [*4], cioè quelle in cui operiamo la selezione secondo qualche *caratteristica costante dell'intorno.* In secondo luogo, escludiamo la selezione ordinale «normale» che sceglie elementi la cui distanza reciproca è costante, come gli elementi numerati k, $n+k$, $2n+k$, ... e cosí via. E, finalmente, escludiamo [molte] combinazioni di questi due tipi di selezione. (Ad esempio la selezione di ogni n-esimo elemento, purché il suo intorno abbia certe caratteristiche [costanti] ben specificate). Una proprietà caratteristica di tutte queste selezioni consiste nel fatto che esse non si riferiscono a un primo elemento as-

[*3] Il riferimento all'appendice IV riveste, qui, notevole importanza. Pure, la maggior parte delle obiezioni sollevate contro la mia teoria ricevettero una risposta nel paragrafo seguente del testo.

[*4] Cfr. l'ultimo capoverso del § 60.

soluto della sequenza e perciò, se la numerazione della sequenza originale comincia con un altro elemento (appropriato), possono dare origine alla stessa sottosequenza selezionata. Cosí i sistemi di scommesse che risultano esclusi dalla mia richiesta sono quei sistemi che possono venire usati senza che si conosca il primo elemento della sequenza: i sistemi esclusi sono invarianti rispetto a certe trasformazioni (lineari): sono i sistemi *semplici* di scommesse (cfr. § 43). Soltanto [*5] i sistemi di scommesse che si riferiscono alle distanze assolute degli elementi da un elemento (iniziale) assoluto [5] non risultano escluse dalla mia richiesta.

La richiesta di libertà *n* per ogni *n* – richiesta di «libertà assoluta» – sembra anche accordarsi piuttosto bene con quello che la maggior parte di noi, consapevolmente o inconsapevolmente, crede vero delle sequenze casuali; per esempio, che il risultato del lancio successivo di un dado non dipende dai risultati dei lanci precedenti. (La pratica di scuotere i dadi prima del lancio è destinata ad assicurare questa «indipendenza»).

59. *Sequenze casuali. Probabilità oggettiva.*

Tenendo presente quanto è stato detto, propongo ora la seguente definizione.

Si dice che una sequenza-evento, o sequenza-proprietà, in ispecial modo un'alternativa, è «casuale», o «a casaccio», se e solo se i limiti delle frequenze delle sue proprietà primarie sono «assolutamente liberi», cioè refrattari a ogni selezione basata sulle proprietà di una qualsiasi *n*-upla di predecessori. Il limite della frequenza corrispondente a una sequenza a casaccio si chiama la *probabilità oggettiva* della proprietà all'interno della sequenza in parola ed è simbolizzato da *F*. Ciò può anche essere espresso nel modo seguente. Supponiamo che la sequenza α sia una sequenza casuale o a casaccio e abbia la proprietà primaria β; in questo caso vale

$$_{\alpha}F(\beta) = {}_{\alpha}F'(\beta).$$

[*5] La parola «soltanto» è corretta *soltanto* se si parla di sistemi di scommesse (*predittivi*). Cfr. § 60, nota *3 e § *54, nota 6 del *Postscript* cit.

[5] Ad esempio, la selezione di tutti i termini il cui numero è un numero primo.

Dovremo ora mostrare che la nostra definizione è sufficiente per la derivazione dei principali teoremi della teoria matematica della probabilità, specialmente del teorema di Bernoulli. In seguito – nel § 64 – la definizione data qui verrà modificata, in modo da renderla indipendente dal concetto di *limite* delle frequenze [*1].

60. *Il problema di Bernoulli.*

La prima formula binomiale menzionata nel § 56:

1) $$_{\alpha(n)}F''(m) = {}^{n}C_{m}p^{m}q^{n-m}.$$

vale per sequenze finite di segmenti sovrapposti. Essa è derivabile sulla base dell'assunzione che la sequenza *finita* α sia almeno $n-1$ libera. Sulla base della stessa assunzione otteniamo immediatamente una formula esattamente corrispondente per sequenze infinite; cioè a dire, se α è infinita e almeno $n-1$ libera, allora

2) $$_{\alpha(n)}F'(m) = {}^{n}C_{m}p^{m}q^{n-m}.$$

Poiché le sequenze casuali sono assolutamente libere, cioè n libere per ogni n, la formula 2), la *seconda* formula binomiale, deve valere anche per esse; e deve valere per esse per qualsiasi valore di n scegliamo.

Nelle pagine che seguono ci occuperemo *soltanto* di sequenze casuali, o sequenze a casaccio (come le abbiamo definite nel § 59). Mostreremo che per *sequenze casuali* deve valere, oltre alla formula 2), una terza formula binomiale, 3); si tratta della formula:

3) $$_{\alpha_n}F(m) = {}^{n}C_{m}p^{m}q^{n-m}.$$

La formula 3) differisce dalla formula 2) in due modi: primo, viene asserita per sequenze di segmenti adiacenti α_n

[*1] Attualmente sarei disposto a usare il concetto «probabilità oggettiva» in modo diverso, cioè in un senso piú largo, in modo da coprire *tutte le interpretazioni* «oggettive» *del calcolo formale delle probabilità*, come l'interpretazione frequenziale e l'interpretazione in termini di propensione che è discussa nel *Postscript* cit. Qui, nel § 59, il concetto è usato unicamente come concetto ausiliario per la costruzione di una certa forma della teoria frequenziale.

invece che per segmenti sovrapposti $\alpha_{(n)}$. Secondo, non contiene il simbolo F' ma il simbolo F. Ciò significa che essa asserisce, per implicazione, che le *sequenze di segmenti adiacenti* sono a loro volta casuali o a casaccio; cioè, per quanto riguarda F, la probabilità oggettiva è definita soltanto per sequenze casuali.

La questione, a cui risponde la 3), circa la probabilità oggettiva della proprietà m in una sequenza di segmenti adiacenti – cioè la questione circa il valore di ${}_{\alpha_n}F(m)$ – la chiamo, seguendo von Mises, «problema di Bernoulli»[1]. Per la sua soluzione, e quindi per la derivazione della terza formula binomiale 3), è sufficiente assumere che α sia casuale o a casaccio[2]. (Il nostro compito è equivalente a quello che consiste nel mostrare che il teorema speciale della moltiplicazione vale per le sequenze di segmenti adiacenti di una sequenza a casaccio α).

La prova[*1] della formula 3) può essere condotta in due passi. In primo luogo mostriamo che la formula 2) vale non soltanto per sequenze di segmenti sovrapposti $\alpha_{(n)}$, ma anche per sequenze di segmenti adiacenti α_n. In secondo luogo, facciamo vedere che queste ultime sono «assolutamente libere». (L'ordine di questi passi non può essere invertito perché una sequenza di segmenti sovrapposti, $\alpha_{(n)}$, *non* è affatto «assolutamente libera». Di fatto, una sequenza di questo genere fornisce un esempio tipico di quelle che possono essere chiamate «sequenze con retroeffetti»[3]).

[1] La questione corrispondente, riguardante le sequenze di segmenti *sovrapposti*, cioè, il problema di ${}_{\alpha(n)}F'(m)$, a cui risponde la 2) può essere chiamata il «quasi problema di Bernoulli». Cfr. §56, nota 1 e § 61.

[2] Reichenbach (*Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung* cit., p. 603) contesta implicitamente ciò scrivendo: «... le sequenze normali sono anche libere da retroeffetti, *mentre non vale necessariamente l'inverso*». Ma le sequenze normali di Reichenbach sono quelle sequenze per cui vale la 3). (La mia prova è resa possibile dal fatto che mi sono allontanato dalla procedura seguita in precedenza, definendo il concetto di «libertà da retroeffetti» non direttamente, ma con l'aiuto del concetto di «libertà n da retroeffetti». In questo modo ho reso la prova accessibile al procedimento dell'induzione matematica).

[*1] Qui viene dato soltanto un breve schizzo della prova. I lettori che non sono interessati alla prova possono passare senz'altro all'ultimo capoverso di questo paragrafo.

[3] Von Smoluchowski ha basato la sua teoria del moto browniano sulle sequenze definite da retroeffetti, cioè sulle sequenze di segmenti sovrapposti.

Primo passo. Sequenze di segmenti adiacenti, α_n, sono sottosequenze di $\alpha_{(n)}$. Si possono ottenere dalle prime per selezione ordinale normale. Dunque, se riusciremo a far vedere che i limiti delle frequenze nelle sequenze sovrapposte ${}_{\alpha(n)}F'(m)$, sono refrattari alla selezione ordinale normale, avremo compiuto il primo passo, e saremo andati anche un po' piú avanti. Infatti, avremo provato la formula:

4) $${}_{\alpha_n}F'(m) = {}_{\alpha(n)}F'(m).$$

Delineerò dapprima la prova nel caso di n eguale a 2; cioè mostrerò che

4a) $${}_{\alpha_2}F'(m) = {}_{\alpha(2)}F'(m) \quad (m \leq 2)$$

è vera; sarà poi facile generalizzare questa formula per ogni n.

Dalle sequenze di segmenti sovrapposti, $\alpha_{(2)}$, possiamo scegliere due, e solo due, sequenze distinte α_2, di segmenti adiacenti; una, che sarà denotata da A) contiene il primo, il terzo, il quinto, ... segmento di $\alpha_{(2)}$, cioè le coppie di α consistenti dei numeri 1, 2; 3, 4; 5, 6; ... L'altra, denotata da B) contiene il secondo, il quarto, il sesto, ... segmento di $\alpha_{(2)}$, cioè le coppie di elementi di α consistenti dei numeri 2, 3; 4, 5; 6, 7; ... e cosí via. Ora, assumiamo che la formula 4a) *non* valga per *una* delle *due* sequenze, A) o B), cosicché il segmento (cioè la coppia) 0, 0 compaia *troppo spesso*, diciamo, nella sequenza A); allora nella sequenza B) dovrà aver luogo una deviazione complementare; cioè il segmento 0, 0 comparirà *non abbastanza spesso* («troppo spesso» o «non abbastanza spesso» in confronto con la formula binomiale). Ma questo contraddice alla ipotesi dell'«assoluta libertà» di α. Infatti, se la coppia 0, 0 compare piú spesso in A) che non in B), allora in segmenti di α sufficientemente lunghi, la coppia 0, 0 deve apparire piú spesso a certe *distanze caratteristiche* che non ad altre distanze. Le distanze piú frequenti sarebbero quelle che otterremmo se le coppie 0, 0 appartenessero a *una sola* delle due sequenze α_2. Le distanze meno frequenti sarebbero quelle che otterremmo se le coppie in parola appartenessero a *entrambe* le sequenze α_2. Ma ciò contraddirebbe l'ipotizzata «libertà assoluta» di α. Infatti stando alla seconda formula binomiale, la «libertà assoluta» di α implica [*entails*] che la frequenza con cui una sequenza particolare di lunghezza n compare in una qualsiasi sequenza $\alpha_{(n)}$ dipende *soltanto* dal numero di uno e di zeri che compaiono in essa, e non dall'*ordine con cui sono disposti* nella sequenza [*2].

Questo prova la 4a): e poiché questa prova può essere facilmente generalizzata per ogni n, ne segue la validità della 4). Ciò completa il primo passo della prova.

Secondo passo. Con un ragionamento strettamente analogo si può mostrare che le sequenze α_n sono «assolutamente libere». Anche qui prenderemo prima in considerazione solo le sequenze α_2; e, per cominciare, ci limiteremo a mostrare che sono 1 libere. Supponiamo che una delle due sequenze α_2, ad esempio la sequenza A) *non* sia 1 libera. Allora in A), dopo almeno *uno* dei segmenti che consistono di due elementi (di una particolare coppia α) – poniamo dopo il segmento 0, 0 – deve seguire un altro segmento, poniamo 1, 1, piú spesso di quanto non accadrebbe se A) fosse «assolutamente libera»; ciò significa che il segmento 1, 1 apparirebbe, nella sottosequenza scelta da A) secondo il segmento predecessore 0, 0, con maggiore frequenza di quanto la formula binomiale ci indurrebbe ad aspettarci.

Tuttavia quest'ipotesi contraddice la «libertà assoluta» della sequenza α. Infatti, se in A) il segmento 1,1 segue troppo frequentemente 0, 0 allora, per compensazione, in B) deve accadere il contrario; altrimenti in un segmento sufficientemente lungo di α la quadrupla 0, 0, 1, 1 comparirebbe troppo spesso a certe *distanze caratteristiche*: cioè alle distanze che si avrebbero se le doppie coppie in questione appartenessero alla medesima sequenza α_2, e solo a questa. Per di piú la quadrupla non comparirebbe abbastanza spesso ad altre *distanze caratteristiche*: a quelle distanze, cioè, che sussisterebbero se appartenessero a *entrambe* le sequenze α_2. Cosí ci troviamo di fronte esattamente alla stessa situazione di prima: e possiamo mostrare con considerazioni analoghe

[*2] La seguente formulazione può essere utile dal punto di vista intuitivo: se le coppie 0,0 sono piú frequenti in certe distanze caratteristiche che non in certe altre, allora questo fatto può essere facilmente usato come base di un semplice sistema che in qualche modo migliorerebbe le chances di un giocatore d'azzardo. Ma i sistemi di scommessa di questo tipo sono incompatibili con la «libertà assoluta» della sequenza. La stessa considerazione corre sotto il «secondo passo» della prova.

che l'ipotesi di un'occorrenza preferenziale a distanze caratteristiche è incompatibile con la «libertà assoluta» di α che abbiamo presupposto all'inizio.

Questa prova può essere ancora generalizzata, cosicché possiamo dire che le sequenze α non solo sono 1 libere, ma sono n libere per ogni n; e, perciò, che sono *casuali*, o a casaccio.

Ciò completa il nostro schizzo dei due passi della prova. Cosí ora siamo autorizzati a sostituire, nella 4), F a F'; e questo significa che possiamo accettare la pretesa che la terza formula binomiale risolva il problema di Bernoulli.

Tra parentesi, abbiamo mostrato che le sequenze $\alpha_{(n)}$ di segmenti sovrapposti sono refrattarie alla *selezione ordinale normale* ogni qualvolta α sia «assolutamente libera».

Lo stesso vale anche per sequenze α_n di segmenti adiacenti, perché qualsiasi selezione ordinale normale da α_n può essere considerata come una selezione ordinale normale da $\alpha_{(n)}$ e deve perciò valere per la stessa sequenza α, dal momento che α è identica sia ad $\alpha_{(1)}$ sia ad α_1.

Abbiamo cosí mostrato, tra l'altro, che dalla «libertà assoluta» – che significa refrattarietà a un tipo speciale di selezione d'intorno – segue la refrattarietà alla selezione ordinale normale. Come è facile vedere, un'ulteriore conseguenza è costituita dalla refrattarietà a qualsiasi «pura» selezione secondo l'intorno (cioè a una selezione secondo una caratterizzazione costante del suo intorno: caratterizzazione, questa, che non varia col variare del numero ordinale dell'elemento). E segue, infine, che la «libertà assoluta» recherà con sé la refrattarietà a tutte [*3] le combinazioni di questi due tipi di selezione.

[*3] Qui la parola «tutti» è, cosí credo ora, errata. Per essere un po' piú precisi, dovremmo sostituirla con «tutti quei... che possono essere usati come sistemi di scommesse». Abraham Wald mi indicò nel 1935 la necessità di questa correzione. Cfr. § 58, note *1 e *5 (e nel mio *Postscript* cit., § *54, nota 6, che si riferisce a A. Wald).

61. *La legge dei grandi numeri (teorema di Bernoulli).*

Il teorema di Bernoulli, o (prima[1]) «legge dei grandi numeri», può essere derivato dalla terza formula binomiale per mezzo di un ragionamento puramente aritmetico, sotto l'ipotesi che sia possibile far tendere n al limite $n \rightarrow \infty$. Esso perciò può essere asserito soltanto di sequenze α infinite; infatti soltanto in queste sequenze i segmenti n delle sequenze α_n possono aumentare indefinitamente la loro lunghezza. E può essere asserito soltanto di sequenze α che siano «assolutamente libere», perché soltanto nell'ipotesi della libertà n per ogni n possiamo far tendere n al limite $n \rightarrow \infty$.

Il teorema di Bernoulli fornisce la soluzione di un problema strettamente imparentato al problema che, seguendo von Mises, ho chiamato «problema di Bernoulli»: cioè al problema del valore di ${}_{\alpha_n}F(m)$. Come si è indicato nel § 56, si può dire che un segmento n ha la proprietà «m», quando contiene precisamente m uno; la frequenza relativa degli uno all'interno di questo segmento (finito) è, naturalmente m/n. Possiamo ora dare la seguente definizione: un segmento n di α ha la proprietà «Δp» se, e solo se, la frequenza relativa dei suoi uno devia dal valore ${}_{\alpha}F(1) = p$, che è la probabilità degli uno nella sequenza α, di una quantità minore di δ; qui δ è qualsiasi piccola frazione scelta in modo che si approssimi a zero a nostro piacere, ma sia diversa da zero. Possiamo esprimere questa condizione dicendo: un segmento n ha la proprietà «Δp» se e solo se $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \delta$; altrimenti il segmento ha la proprietà «$\overline{\Delta p}$». Ora il teorema di Bernoulli risponde alla questione circa il valore della frequenza, o probabilità, di segmenti di questo tipo – di segmenti che posseggono la proprietà «Δp» – entro le sequenze α_n; esso perciò risponde alla questione circa il valore di ${}_{\alpha_n}F(\Delta p)$.

Si può indovinare intuitivamente che se il valore δ (per $\delta > 0$) è fisso e se n cresce, allora crescerà anche la frequenza

[1] Von Mises distingue il teorema di Bernoulli – o di Poisson – dal suo inverso, che chiama «teorema di Bayes» o «seconda legge dei grandi numeri».

di quei segmenti che hanno la proprietà Δp, e perciò anche il valore di ${}_{\alpha n}F(\Delta p)$ (e che questo incremento sarà monotono). La prova di Bernoulli (che si può trovare in qualsiasi trattato di calcolo della probabilità) procede a valutare quest'incremento con l'aiuto della formula binomiale. Bernoulli trova che se n cresce illimitatamente, il valore di ${}_{\alpha n}F(\Delta p)$ si avvicina al valore massimale 1, per ogni valore fisso di δ, per quanto piccolo. Ciò può essere espresso simbolicamente da

$$1) \qquad \lim_{n\to\infty} {}_{\alpha n}F(\Delta p) = 1 \quad \text{(per ogni valore di } \Delta p).$$

Questa formula risulta dalla trasformazione della *terza* formula binomiale per sequenze di segmenti *adiacenti*. L'analoga *seconda* formula binomiale per sequenze di segmenti *sovrapposti* condurrebbe immediatamente, per lo stesso metodo, alla formula corrispondente:

$$2) \qquad \lim_{n\to\infty} {}_{\alpha(n)}F'(\Delta p) = 1$$

che è valida per sequenze di segmenti sovrapposti e per la selezione ordinale normale da essi, e quindi per le sequenze con *retroeffetti* (che sono state studiate da Smoluchowski[2]). La stessa formula 2) dà luogo alla 1) per il caso in cui si scelgano sequenze non sovrapposte e perciò n libere. La 2) può essere descritta come una variante del teorema di Bernoulli e ciò che qui dirò del teorema di Bernoulli vale, *mutatis mutandis*, per questa variante.

Il teorema di Bernoulli, cioè la formula 1), può essere espressa, in parole, nel modo seguente. Diciamo che un segmento finito, la cui lunghezza è data ed è stato scelto da una sequenza a casaccio α, è un «campione abbastanza largo», se, e solo se, la frequenza degli uno *all'interno di questo segmento* devia da p, cioè dal valore della probabilità degli uno *nella sequenza a casaccio* α, di un valore non superiore a qualche piccola frazione data (che possiamo scegliere a nostro piacere). Possiamo allora dire che la probabilità di imbatterci per caso in un campione abbastanza largo si approssima ad

[2] Cfr. § 60, nota 3 e § 64, nota 5.

uno a nostro piacere, purché rendiamo sufficientemente lunghi i segmenti in questione *[1].

In questa formulazione la parola «*probabilità*» (o «*valore della probabilità*») ricorre due volte. Come dev'essere interpretato, o tradotto, qui, questo termine? Nel senso della mia definizione di frequenza, dovrebbe essere tradotto come segue (scrivo in corsivo le espressioni che rappresentano la traduzione della parola «probabilità» nel linguaggio frequenziale): *La stragrande maggioranza* di tutti i segmenti finiti sufficientemente lunghi saranno «campioni abbastanza larghi»; cioè a dire, la frequenza relativa di tali segmenti devierà dal *valore p della frequenza* della sequenza casuale in questione, di una piccola quantità, fissata arbitrariamente; o, piú brevemente: La *frequenza p* è realizzata, approssimativamente, in *quasi tutti* i segmenti sufficientemente lunghi. (In che modo si arrivi al valore p è irrilevante ai fini della nostra discussione; tale valore potrebbe essere, ad esempio, il risultato di una stima ipotetica).

Ricordando che la frequenza di Bernoulli ${}_{\alpha_n}F(\Delta p)$ cresce monotonamente col crescere della lunghezza n del segmento, e decresce monotonamente col decrescere di n, e che, perciò, il valore della frequenza relativa è realizzato, nei segmenti brevi, abbastanza raramente, possiamo anche dire:

Il teorema di Bernoulli asserisce che i segmenti brevi di sequenze «assolutamente libere» o casuali presenteranno spesso deviazioni relativamente grandi, e quindi fluttuazioni relativamente grandi, da p, mentre i segmenti piú lunghi presenteranno, nella maggior parte dei casi, deviazioni da p sempre piú piccole a misura che cresce la loro lunghezza. Di conseguenza, la maggior parte delle deviazioni nei segmenti sufficientemente lunghi diventeranno piccole a piacere; o, in altre parole, le grandi deviazioni diventeranno rare, a nostro piacere.

Di conseguenza, se prendiamo un segmento molto lungo di una sequenza casuale allo scopo di trovare le frequenze all'interno delle sue sottosequenze contando, o, forse, usando altri metodi empirici e statistici, otterremo, nella grande

*[1] Nella traduzione inglese questo enunciato è stato riformulato (senza alterarne il contenuto) introducendo il concetto di «campione abbastanza largo»: l'originale opera soltanto con il *definiens* di questo concetto.

maggioranza dei casi, il seguente risultato. Esiste una frequenza media caratteristica tale che le frequenze relative nell'intiero segmento e in quasi tutti i sottosegmenti lunghi, devieranno solo di poco da questa media, mentre le frequenze relative dei sottosegmenti piú piccoli devieranno da questa media ancora, e tanto piú spesso, quanto piú corti li scegliamo. Possiamo riferirci a questo fatto – cioè a questo comportamento statisticamente accertabile dei segmenti finiti – come al «*comportamento quasi-convergente*» di tali segmenti, o come al fatto che *le sequenze a casaccio sono statisticamente stabili* [*2].

Dunque, il teorema di Bernoulli asserisce che i segmenti piú piccoli delle sequenze casuali presentano spesso larghe fluttuazioni, mentre i segmenti grandi si comportano sempre in un modo che suggerisce costanza o convergenza; in breve, che troviamo disordine e irregolarità nel piccolo, ordine e costanza nel grande. Proprio a questo comportamento si riferisce la «*legge dei grandi numeri*».

62. *Il teorema di Bernoulli e l'interpretazione delle asserzioni probabilistiche.*

Abbiamo appena visto che nella formulazione verbale del teorema di Bernoulli la parola «probabilità» compare due volte.

In nessuno dei due casi il teorico della frequenza ha difficoltà nel tradurre questa parola d'accordo con la sua definizione: può dare una chiara interpretazione della formula di Bernoulli e della legge dei grandi numeri. Può il sostenitore della teoria soggettivistica, nella sua forma logica, fare la stessa cosa?

Il teorico soggettivista, che vuole definire la «probabilità» come «grado di credenza razionale» è perfettamente coerente quando interpreta le parole «la probabilità di... si approssima a 1 a nostro piacere» come «è *quasi certo* [1] che...»

[*2] A proposito della «legge dei grandi numeri», Keynes dice che «il nome "stabilità delle frequenze statistiche" andrebbe molto meglio» (*A Treatise on Probability* cit., p. 336).

[1] Von Mises usa anche l'espressione «quasi certo», ma, secondo lui, de-

– e ha tutti i diritti di farlo. Ma quando continua... «che la frequenza relativa devierà *dal suo valore piú probabile*, *p*, di una quantità minore di una quantità data...», o, per usare le parole di Keynes[2], «che la proporzione delle ricorrenze dell'evento divergerà *dalla proporzione piú probabile p* di una quantità minore di una quantità data...», non fa altro che nascondere le proprie difficoltà. Di primo acchito, almeno, queste frasi suonano sensate. Ma se anche qui traduciamo la parola «*probabile*» (qualche volta soppressa) nel senso della teoria soggettivistica, l'intera faccenda suona: «È quasi certo che le frequenze relative deviano dal valore *p* del grado di credenza razionale, di una quantità minore di una quantità data...»; e questo mi sembra completamente insensato[*1]. Infatti, le frequenze relative possono essere confrontate soltanto con frequenze relative, e possono deviare, o non deviare, soltanto da frequenze relative. Ed è chiaro che, *dopo* la deduzione del teorema di Bernoulli, è inammissibile dare a *p* un significato differente da quello che le era stato dato prima della deduzione[3].

Vediamo cosí che la teoria soggettivistica non è in grado

ve essere, ovviamente, considerata come *definita* «dal fatto di avere una frequenza vicina [o eguale] ad 1».

[2] KEYNES, *A Treatise on Probability* cit., p. 338.

[*1] Può forse valer la pena di essere piú espliciti su questo punto. Keynes scrive (in un passo precedente quello citato sopra): «Se la probabilità dell'accadere di un evento, in certe condizioni, è *p*, allora... la proporzione piú probabile tra le sue occorrenze e il numero totale delle occasioni è *p*...». Stando alla mia teoria, questo passo dovrebbe poter essere tradotto cosí: «Se il grado di credenza razionale nell'accadere di un evento è *p*, allora *p* è anche una proporzione di accadimenti, cioè una frequenza relativa: quella frequenza, in altre parole, il grado della nostra credenza razionale nell'emergenza della quale è maggiore». Non mi oppongo a quest'ultimo uso dell'espressione «credenza razionale». (Si tratta dell'uso che potrebbe anche essere reso con «è quasi certo che...»). Ciò a cui mi oppongo è che *p* sia, ora un grado di credenza razionale ora una frequenza; in altre parole, non riesco a vedere perché una frequenza empirica debba essere eguale a un grado di credenza razionale, o che ciò si possa provare mediante un qualsiasi teorema, per quanto profondo. (Cfr. anche § 49 e appendice *IX).

[3] Questo fatto fu messo per la prima volta in evidenza da von Mises, in un contesto simile, in *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* cit., p. 85. Si può inoltre osservare che le frequenze relative non possono essere paragonate ai «gradi di certezza della nostra conoscenza», non foss'altro perché l'ordinamento di questi gradi di certezza è *convenzionale* e non è necessario instaurarlo correlando detti gradi con frazioni comprese tra 0 e 1. Soltanto se la metrica dei gradi soggettivi di certezza viene *definita* correlando ad essa le frequenze relative (ma *soltanto* allora), può essere lecito derivare la legge dei grandi numeri all'interno della teoria soggettivistica (cfr. § 73).

di interpretare la formula di Bernoulli nei termini della legge *statistica* dei grandi numeri. La derivazione di leggi statistiche è possibile soltanto nell'ambito della teoria frequenziale. Prendendo le mosse da una teoria strettamente soggettivistica non arriveremo mai ad asserzioni statistiche – neppure se tentiamo di colmare la lacuna mediante il teorema di Bernoulli [*2].

63. *Il teorema di Bernoulli e il problema della convergenza.*

Dal punto di vista epistemologico la mia deduzione della legge dei grandi numeri delineata nei paragrafi precedenti è insoddisfacente, perché la parte che l'assioma di convergenza ha nella nostra analisi è ben lungi dall'essere chiara.

In effetti, ho introdotto tacitamente un assioma di questo genere quando ho limitato la mia indagine a sequenze matematiche con limiti di frequenza (cfr. § 57). Di conseguenza, si potrebbe anche essere tentati di pensare che il nostro risultato – la derivazione della legge dei grandi numeri – è banale; perché il fatto che le sequenze «assolutamente libere» sono *statisticamente stabili* potrebbe essere considerato come una conseguenza immediata della loro convergenza, che è stata assunta in forza di un assioma, se non implicitamente.

Ma, come von Mises ha chiaramente mostrato, questo punto di vista sarebbe erroneo. Infatti, esistono sequenze [1] che soddisfano l'assioma di convergenza, sebbene per esse non valga il teorema di Bernoulli, perché, data una frequenza prossima ad 1, in esse ricorrono segmenti di lunghezza qualsiasi che possono deviare da p di una misura qualsiasi. (In questi casi l'esistenza del limite p è dovuta al fatto che le deviazioni, benché possano crescere illimitatamente, si can-

[*2] Ma è possibile usare il teorema di Bernoulli come un ponte che permette di passare dall'interpretazione *oggettivistica* in termini di propensione alla statistica. Cfr. *Postscript* cit., §§ *49-*57.

[1] Von Mises cita come esempio la sequenza di cifre che occupano l'ultimo posto di una tavola di radici quadrate composta delle cifre «sei». Cfr. ad esempio, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* cit., pp. 86 sg. (1936[2], p. 137), e *Wahrscheinlichkeitsrechnung* cit., pp. 181 sg.

cellano a vicenda). In segmenti arbitrariamente grandi, tali sequenze *sembrano* divergenti anche se le corrispondenti sequenze di frequenze sono, di fatto, convergenti. Cosí la legge dei grandi numeri non è altro che una conseguenza banale dell'assioma di convergenza, e quest'assioma è del tutto insufficiente per la sua deduzione. Ecco perché non si può fare a meno del mio assioma modificato del disordine, cioè dell'esigenza della «libertà assoluta».

La nostra ricostruzione della teoria suggerisce comunque la possibilità che la legge dei grandi numeri sia *indipendente* dall'assioma di convergenza. Abbiamo visto, infatti, che il teorema di Bernoulli segue immediatamente dalla formula binomiale; per di piú, ho mostrato che la prima formula binomiale può essere derivata per *sequenze finite*, e perciò, naturalmente, senza far uso dell'assioma di convergenza. L'unica cosa che si dovette assumere era che la sequenza-riferimento α fosse almeno $n-1$ libera, assunzione questa da cui seguiva la validità del teorema speciale della moltiplicazione e, con essa, quella della prima formula binomiale. Allo scopo di compiere il passaggio al limite, e di ottenere il teorema di Bernoulli, è sufficiente assumere che si possa rendere n grande a piacere. Da ciò si può vedere che il teorema di Bernoulli è vero, approssimativamente, anche per sequenze *finite*, se queste sono n libere, per un n sufficientemente grande.

Sembra perciò che la deduzione del teorema di Bernoulli dipenda, non da un assioma che postula l'esistenza di un limite di frequenza, ma *soltanto* dalla «libertà assoluta», o disordine. Il concetto di limite esercita soltanto una funzione subordinata: esso viene usato all'unico scopo di applicare alcuni concetti di frequenza relativa (che, in prima istanza, è definita soltanto per classi finite, e senza la quale non si potrebbe formulare il concetto di libertà n) a sequenze che possono essere continuate indefinitamente.

Inoltre, non si dovrebbe dimenticare che lo stesso Bernoulli dedusse il proprio teorema nell'ambito della teoria classica, che non contiene nessun assioma di convergenza, e che la definizione della probabilità come *limite* delle frequenze è solo un'*interpretazione* – e non la sola possibile – del formalismo classico.

Tenterò di giustificare la mia congettura – l'indipendenza del teorema di Bernoulli dall'assioma di convergenza – deducendo questo teorema senza presupporre nulla eccetto la libertà *n* (che peraltro dovrà essere appropriatamente definita)[*1]. E tenterò di mostrare che esso vale anche per quelle sequenze matematiche le cui proprietà primarie *non posseggono limiti di frequenza.*

Soltanto se potrò mostrarlo, considererò la mia deduzione della legge dei grandi numeri soddisfacente dal punto di vista epistemologico. Perché è un «fatto d'esperienza» – o almeno cosí qualche volta ci dicono – che le sequenze empiriche casuali presentano quel particolare comportamento che ho descritto come «quasi-convergente» o «statisticamente stabile» (cfr. § 61). Registrando statisticamente il comportamento dei segmenti lunghi è possibile stabilire che le frequenze relative si approssimano sempre piú a un valore definito, e che gli intervalli entro i quali le frequenze relative variano diventano sempre piú piccoli. Questo cosiddetto «fatto empirico», tante volte discusso e analizzato e spesso considerato addirittura come la corroborazione empirica della legge dei grandi numeri, può essere preso in considerazione da diversi punti di vista. I pensatori con tendenze induttivistiche lo considerano per lo piú come una legge fondamentale della natura, che non può essere ridotta a nessun'asserzione piú semplice; come una peculiarità del nostro mondo, che dev'essere accettata *sic et simpliciter.* Essi credono che, espressa in forma opportuna – ad esempio sotto la forma dell'assioma di convergenza – questa legge di natura possa essere messa alla base della teoria della probabilità, la quale pertanto assumerebbe il carattere di scienza naturale.

Il mio atteggiamento nei confronti di questo cosiddetto «fatto empirico» è differente. Io sono propenso a credere che esso sia riducibile al carattere casuale delle sequenze; che

[*1] Considero ancora perfettamente giustificato il mio vecchio dubbio riguardante l'assunzione di un assioma di convergenza e la possibilità di farne a meno. Tale dubbio è giustificato dagli sviluppi indicati nell'appendice IV, nota *2 e nell'appendice *VI, dove si mostra che la casualità (se definita dalle «piú brevi sequenze a carattere casuale») *implica logicamente* la convergenza, che perciò non dev'essere postulata separatamente. Inoltre, il mio riferimento al formalismo classico è giustificato dallo sviluppo della teoria neoclassica (o in termini di teoria della misura) della probabilità, discussa nel capitolo *III del *Postscript* ed è giustificato, anzi, dai «numeri normali» di Borel. Ma non sono piú d'accordo col punto di vista implicito nella frase successiva del testo, anche se concordo con il resto del presente paragrafo.

possa essere derivato dal fatto che queste sequenze sono *n* libere. Secondo me il grande risultato raggiunto da Bernoulli e Poisson nel campo della teoria della probabilità consiste precisamente nella scoperta di un modo per mostrare che questo supposto «fatto di esperienza» è una tautologia, e che dal disordine nel piccolo (purché questo soddisfi una condizione di libertà *n* opportunamente formulata) segue logicamente una specie di ordine stabile nel grande.

Se riusciremo a dedurre il teorema di Bernoulli senza *assumere* un assioma di convergenza, avremo ridotto il problema epistemologico della legge dei grandi numeri a un problema di indipendenza assiomatica, e perciò a una questione puramente logica. Questa deduzione spiegherebbe anche perché l'assioma di convergenza funzioni piuttosto bene in tutte le applicazioni pratiche (nei tentativi di calcolare il comportamento approssimato di sequenze empiriche). Perché, anche se la restrizione a sequenze convergenti dovesse rivelarsi superflua, l'uso di sequenze matematiche convergenti per calcolare il comportamento approssimato di sequenze empiriche che, su basi logiche, sono statisticamente stabili, non può certo essere improprio.

64. *Eliminazione dell'assioma di convergenza. Soluzione del «problema fondamentale della teoria del caso».*

Fin qui i limiti delle frequenze non hanno avuto, nella nostra ricostruzione della teoria della probabilità, altra funzione che quella di fornire un concetto non ambiguo di frequenza relativa applicabile a sequenze infinite, cosicché ci sia possibile, col suo aiuto, definire il concetto di «libertà assoluta» (da retroeffetti). Si esige infatti che ciò che è refrattario alla selezione secondo i predecessori sia una *frequenza relativa*.

In precedenza abbiamo ristretto la nostra ricerca ad alternative dotate di limiti di frequenza, introducendo cosí tacitamente un assioma di convergenza. Ora, per liberarci da quest'assioma, elimineremo questa restrizione senza sostituirgliene nessun'altra. Ciò significa che dovremo costruire un concetto di frequenza che possa assumersi la funzione del concetto di limite della frequenza, che abbiamo scartato, e che possa essere applicato a *tutte* le sequenze-riferimento infinite [*1].

Un concetto di frequenza che soddisfa queste condizioni è il concetto di *punto di accumulazione della sequenza delle frequenze relative*. (Si dice che un valore *a* è un punto di accumulazione di una sequenza se, dopo ogni elemento dato, esistono elementi che differiscono da *a* di una quantità minore di una quantità data, per quanto piccola). Che questo concetto sia applicabile senza restrizioni a tutte le sequenze-riferimento infinite si può vedere dal fatto che per ogni alternativa finita deve esistere *almeno uno* di questi punti di accumulazione per la sequenza di frequenze relative che corrisponde ad essa. Siccome le frequenze relative non possono mai essere maggiori di 1 o minori di 0, una sequenza di tali frequenze deve avere per limiti 1 e 0. E, in quanto sequenza infinita limitata, deve avere (per un famoso teorema di Bolzano e Weierstrass) *almeno un* punto di accumulazione [1].

Per brevità, ogni punto di accumulazione della sequenza delle frequenze relative corrispondenti a un'alternativa α sarà chiamato «*frequenza mediana di* α». Possiamo dunque dire: se una sequenza α ha *una e una sola* frequenza mediana, allora quest'ultima è, al medesimo tempo, il *limite* della sua frequenza; e inversamente: se non ha nessun limite di frequenza allora ha piú di una [2] frequenza mediana.

Si troverà che l'idea di frequenza mediana è molto adatta per il nostro scopo. Proprio come in precedenza avevamo *stimato* – e si trattava forse di una stima ipotetica – che p fosse il limite della frequenza di una sequenza α, cosí ora lavoriamo sulla base della stima che p sia una frequenza mediana di α. E purché prendiamo certe precauzioni indispensabili [3],

[*1] Allo scopo di non *postulare* la convergenza ho fatto appello, nel capoverso seguente, a ciò che può essere *dimostrato*: l'esistenza di punti di accumulazione. Tutto ciò diventa inessenziale se adottiamo il metodo descritto al § 57, nota *1 e nell'appendice *VI.

[1] Fatto questo, che, abbastanza sorprendentemente, non è stato fin qui utilizzato nella teoria della probabilità.

[2] Si può far vedere facilmente che se in una sequenza-riferimento esiste piú di *una* frequenza mediana, allora i valori di queste frequenze mediane formano un continuo.

[3] Il concetto di «selezione indipendente» deve essere interpretato in modo piú rigoroso di quanto non sia stato fatto finora, perché altrimenti non si può provare la validità del teorema speciale della moltiplicazione. Per i particolari, si veda il mio lavoro menzionato al § 51, nota 3 (* ora superato dall'appendice *VI).

con l'aiuto di queste frequenze mediane che abbiamo stimato possiamo *calcolare* in modo analogo a quello in cui calcoliamo con limiti di frequenza. Inoltre, il concetto di frequenza mediana è applicabile a tutte le possibili sequenze-riferimento infinite, senza nessuna restrizione.

Se ora tentiamo di interpretare il nostro simbolo $_{\alpha}F'(\beta)$ come una frequenza mediana piuttosto che come una frequenza limite, e modifichiamo in conseguenza la definizione di probabilità oggettiva (§ 59), vedremo che la maggior parte delle nostre formule saranno ancora derivabili. Tuttavia sorge una difficoltà: le frequenze mediane *non sono uniche*. Se stimiamo, o congetturiamo, che una frequenza mediana sia $_{\alpha}F'(\beta) = p$, questa stima non esclude la possibilità che esistano valori di $_{\alpha}F'(\beta)$ diversi da p. Se postuliamo che le cose non debbano stare cosí, introduciamo implicitamente l'assioma di convergenza. Se, d'altra parte, definiamo la probabilità oggettiva senza far uso di tale postulato di unicità [4], otteniamo (almeno in prima istanza) un *concetto ambiguo di probabilità*; infatti, in certe circostanze, una sequenza può possedere, al medesimo tempo, diverse frequenze mediane «assolutamente libere» (cfr. appendice IV, § *c*). Ma ciò è difficilmente accettabile, dal momento che siamo abituati a lavorare con probabilità *non-ambigue o uniche*; ad assumere cioè che per una sola e medesima proprietà, all'interno di una sola e medesima sequenza-riferimento, possa esserci una e una sola probabilità p.

Comunque, la difficoltà del definire un concetto unico di probabilità senza far uso dell'assioma del limite può essere facilmente superata: possiamo introdurre l'esigenza dell'unicità (e dopo tutto questa è la procedura piú naturale) come ultimo passo, *dopo* aver postulato che la sequenza debba essere «assolutamente libera»; questo ci conduce a proporre, come risoluzione del nostro problema, la seguente modifica-

[4] Possiamo farlo perché dev'essere possibile applicare immediatamente la teoria per le classi finite (ad eccezione del teorema di unicità) alle frequenze mediane. Se una sequenza α ha una frequenza mediana p, allora – quale che sia il termine con cui inizia il conteggio – deve contenere segmenti di grandezza *finita* qualsiasi, la cui frequenza devia da p di una quantità piccola a piacere. Il calcolo può essere eseguito su questi segmenti. Il fatto che p sia libero da retroeffetti significherà allora che questa frequenza mediana di α è anche una frequenza mediana di ogni selezione di α secondo il predecessore.

zione della nostra definizione di sequenza casuale e di probabilità oggettiva.

Supponiamo che α sia un'alternativa (con una o piú frequenze mediane). Supponiamo che gli uno di α abbiano una e una sola frequenza mediana p che sia «assolutamente libera»; diremo allora che α è casuale o a casaccio, e che p è la probabilità oggettiva degli uno all'interno di α.

Sarà utile suddividere questa definizione in due esigenze di carattere assiomatico *[2].

1) Esigenza del disordine: perché un'alternativa sia casuale deve esistere almeno una frequenza mediana «assolutamente libera», cioè la sua probabilità oggettiva p.
2) Esigenza di unicità: per una sola e medesima proprietà di una sola e medesima alternativa casuale, deve esistere *una e una sola probabilità p.*

La non-contraddittorietà del nuovo sistema assiomatico è assicurata dall'esempio costruito precedentemente. È possibile costruire sequenze le quali, mentre hanno una e una sola probabilità, non posseggono tuttavia nessun limite di frequenza (cfr. appendice IV, § *b*). Questo dimostra che le nuove esigenze assiomatiche sono effettivamente piú larghe, o meno rigorose, delle vecchie. Questo fatto diventa ancor piú evidente se asseriamo (e possiamo farlo) i nostri vecchi assiomi nella forma seguente:

1) Esigenza del disordine: come sopra.
2) Esigenza di unicità: come sopra.
2') Assioma di convergenza: per una sola e medesima proprietà di una sola e medesima alternativa casuale, non esiste altra frequenza mediana oltre la sua probabilità p.

*[2] È possibile combinare l'impostazione descritta al § 57, nota *1 e nelle appendici IV e *VI con queste due esigenze, mantenendo l'esigenza 1) e sostituendo alla 2) la seguente:

+2) Esigenza di finitezza: fin dall'inizio la sequenza deve diventare n libera il piú rapidamente possibile, e per il piú grande n possibile; o, in altre parole, dev'essere (approssimativamente), una sequenza casuale *piú breve.*

Dal sistema di esigenze che abbiamo proposto possiamo dedurre il teorema di Bernoulli e, con esso, tutti i teoremi del calcolo classico della probabilità. Questo risolve il nostro problema: adesso è possibile dedurre la legge dei grandi numeri all'interno della teoria frequenziale, senza usare l'assioma di convergenza. Inoltre, non soltanto la formula 1) del § 61 e la formulazione verbale del teorema di Bernoulli rimangono immutate[5], ma rimane anche immutata l'interpretazione che ne abbiamo dato: nel caso di una sequenza casuale *senza* limite di frequenza sarà ancora vero che quasi tutte le sequenze sufficientemente lunghe presentano soltanto piccole deviazioni da p. Naturalmente, in tali sequenze (come ad esempio in sequenze casuali fornite di limiti di frequenza) compariranno talvolta segmenti di lunghezza qualsiasi che si comportano in modo quasi divergente: compariranno cioè segmenti che deviano da p di una quantità qualsiasi. Ma tali segmenti saranno relativamente rari, perché devono essere compensati da parti estremamente lunghe della sequenza in cui tutti (o quasi tutti) i segmenti si comportano in modo quasi convergente. Come mostra il calcolo, questi segmenti dovranno essere piú lunghi di parecchi ordini di grandezza dei segmenti che si comportano in modo divergente, che essi compensano[*3].

È questo anche il luogo in cui risolvere quello che nel § 49 abbiamo chiamato il «*problema fondamentale della teoria del caso*». L'inferenza apparentemente paradossale dall'impossibilità di predire gli eventi singoli e dalla loro irregolarità, all'applicabilità a questi eventi delle regole del calcolo delle probabilità, è valida. È valida purché possiamo esprimere l'irregolarità con un buon grado di approssimazione, nei termini dell'assunzione ipotetica che in ogni selezione secondo i predecessori compaia solo una delle frequenze ricorrenti – delle «frequenze mediane» – e vi compaia in modo tale che non ne risultino retroeffetti. Infatti, in base a

[5] Le formule quasi-di-Bernoulli (simbolo: F') rimangono non ambigue anche per sequenze a carattere probabilistico (secondo la nuova definizione), sebbene ora «F'» simbolizzi soltanto una frequenza media.

[*3] Concordo pienamente con quello che segue qui, anche se, adottando il metodo descritto nel § 57, nota *1, e nell'appendice IV, tutti i riferimenti alle «frequenze mediane» diventano ridondanti.

queste assunzioni è possibile provare che la legge dei grandi numeri è tautologica. È ammissibile, e non autocontraddittorio (come talvolta si è asserito [6]) sostenere la conclusione che data una sequenza irregolare in cui, per cosí dire, qualsiasi cosa può accadere una volta o l'altra – benché alcune cose possano accadere solo raramente – in certe sue sottosequenze molto grandi comparirà una certa regolarità o stabilità. E questa conclusione non è banale, dal momento che per trarla abbiamo bisogno di strumenti matematici specifici (il teorema di Bolzano-Weierstrass, il concetto di libertà *n*, e il teorema di Bernoulli). L'apparente paradosso di un ragionamento che procede dall'impossibilità alla possibilità di far predizioni, o dall'ignoranza alla conoscenza, sparisce non appena ci rendiamo conto che l'assunzione di irregolarità può essere messa sotto forma di un'*ipotesi frequenziale* (quella della libertà da retroeffetti), e che anzi dev'essere messa in questa forma se si vuole mostrare la validità di quel ragionamento.

Ora, anche, diventa chiaro perché le teorie piú antiche non siano state in grado di rendere giustizia a quello che io chiamo il «problema fondamentale». È vero che la teoria soggettivistica può dedurre il teorema di Bernoulli; ma non può mai interpretarlo coerentemente in termini di frequenze, al modo della legge dei grandi numeri (cfr. § 62). Dunque, tale teoria non potrà mai spiegare il successo statistico delle predizioni probabilistiche. D'altra parte, col suo assioma di convergenza, la vecchia teoria frequenziale postula esplicitamente la regolarità nel grande. Cosí, nell'ambito di questa teoria non sorge il problema dell'inferenza dall'irregolarità nel piccolo alla stabilità nel grande, perché tale problema implica semplicemente l'inferenza, dalla stabilità nel grande (assioma di convergenza), accoppiata con l'irregolarità nel piccolo (assioma del disordine), a una speciale forma di stabilità nel grande (teorema di Bernoulli, legge dei grandi numeri) [*4].

[6] Cfr. ad esempio, FEIGL, in «Erkenntnis», I (1930), p. 254: «Nella legge dei grandi numeri si tenta di riconciliare due pretese che, analizzate piú rigorosamente, si dimostrano, di fatto, reciprocamente contraddittorie. Da un lato... si suppone che ogni ordinamento e ogni distribuzione possano comparire una volta. Dall'altro queste occorrenze... devono apparire con una frequenza corrispondente». (Che di fatto non ci sia nessuna incompatibilità è stato provato dalla costruzione di sequenze modello; cfr. appendice IV).

[*4] Ciò che si dice in questo paragrafo accentua implicitamente l'importanza di una teoria neoclassica interpretata *oggettivamente* ai fini della solu-

L'assioma di convergenza non è una parte necessaria dei fondamenti del calcolo della probabilità. Con questo risultato concludo la mia analisi del calcolo matematico[7].

Ritorniamo ora alla considerazione di problemi piú specificamente metodologici; in particolare al problema di come decidere le asserzioni probabilistiche.

65. *Il problema della decidibilità.*

Comunque si definisca il concetto di probabilità, o qualsiasi formulazione assiomatica si scelga, fintantoché la formula binomiale sarà derivabile all'interno del sistema, *le asserzioni probabilistiche non saranno falsificabili.* Le ipotesi probabilistiche *non mettono fuori causa nulla che sia osservabile*; le stime probabilistiche non possono contraddire una asserzione-base, né possono esserne contraddette; neppure possono essere contraddette dalla congiunzione di un qualsiasi numero finito di asserzioni-base né, di conseguenza, da nessun numero finito di osservazioni.

Supponiamo di aver proposto, per un'alternativa α, un'ipotesi di chances eguali; per esempio di aver stimato che i lanci di una certa moneta daranno «1» e «0» con egual frequenza, cosicché ${}_{\alpha}F(1) = {}_{\alpha}F(0) = \frac{1}{2}$; e supponiamo di trovare, empiricamente, che «1» continua a venire senza eccezioni: senza dubbio, allora, abbandoneremo in pratica la nostra stima e la considereremo falsificata. Ma dal punto di vista logico la questione della falsificazione non può sorgere. Infatti possiamo sicuramente osservare soltanto una sequenza finita

zione del «problema fondamentale». Una teoria di questo genere è descritta nel capitolo *III del *Postscript* cit.

[7] Cfr. § 51, nota 3. Desidero mettere in chiaro, retrospettivamente, di aver assunto un atteggiamento conservatore nei confronti dei quattro punti di von Mises (cfr. la fine del § 50). Anch'io definisco la probabilità soltanto in riferimento a *sequenze casuali* (che von Mises chiama «collettivi»). Anch'io faccio uso di un assioma (modificato) del disordine e, nel determinare *il compito del calcolo delle probabilità*, seguo senza riserve von Mises. Cosí le differenze tra von Mises e me riguardano soltanto l'assioma del limite, di cui ho mostrato l'inessenzialità e che ho sostituito con l'esigenza di unicità, e l'assioma del disordine che ho modificato in modo che possano essere costruite sequenze modello. (Appendice IV). Di conseguenza, l'obiezione di Kamke (cfr. § 53, nota 3) cessa di essere valida.

di lanci. E sebbene, secondo la formula binomiale, la probabilità di imbattersi per caso in un segmento finito molto lungo con grandi deviazioni da ½ sia estremamente piccola, essa deve pur sempre rimanere maggiore di zero. Dunque l'occorrenza sufficientemente rara di un segmento finito che pure presenti la deviazione massima non può mai contraddire la stima. In realtà dobbiamo aspettarci che ciò accada: questa è una conseguenza della nostra stima. La speranza che la *rarità*, calcolabile, di un segmento siffatto costituirà un mezzo per falsificare la stima probabilistica si dimostra illusoria, perché si può sempre dire che anche una frequente ricorrenza di un segmento lungo e grandemente deviante, non è altro che un'occorrenza di un segmento ancor piú lungo e ancor piú deviante. Dunque non esistono sequenze di eventi, dateci estensionalmente, e perciò non esistono *n*-uple finite di asserzioni-base che potrebbero falsificare un'asserzione probabilistica.

Soltanto una sequenza infinita di eventi – definita intensionalmente mediante una regola – potrebbe contraddire una stima probabilistica. Ma, alla luce delle considerazioni fatte nel § 38 (cfr. § 43) ciò significa che le ipotesi probabilistiche non sono falsificabili, perché la loro dimensione è infinita. Dovremmo perciò realmente descriverle come non-informative dal punto di vista empirico, come vuote di contenuto empirico[1].

Tuttavia, qualunque atteggiamento di questo genere è chiaramente inaccettabile di fronte ai *successi* che la fisica ha conseguito con predizioni ottenute dalle stime ipotetiche di probabilità. (Questo è lo stesso argomento che è stato usato in precedenza contro l'interpretazione, da parte della teoria soggettivistica, delle asserzioni probabilistiche come tautologie). Dal punto di vista del loro significato scientifico, molte di queste stime non sono inferiori a nessun'altra ipotesi fisica (ad esempio a un'ipotesi di carattere deterministico). E di solito un fisico è capacissimo di decidere se, per il momento, possa accettare una certa particolare ipotesi probabilistica come «confermata empiricamente» o se, invece, debba rigettarla come «falsificata in pratica» cioè come inutile per gli

[1] Ma non come vuote di «contenuto logico» (cfr. § 35); è chiaro infatti che non ogni ipotesi frequenziale vale tautologicamente per ogni sequenza.

scopi della predizione. È abbastanza chiaro che questa «falsificazione pratica» si può ottenere soltanto attraverso una decisione metodologica consistente nel considerare messi fuori causa – proibiti – gli eventi altamente improbabili. Ma con qual diritto questi eventi possono essere considerati tali? Dove mai dovremo tracciare la linea di demarcazione? Dove comincia quest'«alta improbabilità»?

Poiché da un punto di vista puramente logico non può esserci alcun dubbio sul fatto che le asserzioni probabilistiche non possono essere falsificate, può sembrare che il fatto, egualmente indubitabile, che le usiamo empiricamente, dia una botta fatale alle mie idee base sul metodo, che dipendono in modo essenziale dal criterio di demarcazione che ho formulato. Nondimeno cercherò di rispondere alle questioni che ho sollevato – e che costituiscono il problema della decidibilità – applicando risolutamente queste stesse idee. Ma per far ciò dovrò prima analizzare la forma logica delle asserzioni probabilistiche, tenendo conto sia delle interrelazioni logiche tra di esse, sia delle relazioni logiche in cui esse stanno con le asserzioni-base [*1].

66. *La forma logica delle asserzioni probabilistiche.*

Le stime probabilistiche *non* sono falsificabili. E, naturalmente, non sono neppure verificabili; e questo per le stesse

[*1] Credo che l'accento da me posto sull'inconfutabilità delle ipotesi probabilistiche – che culmina nel § 67 – sia stato salutare: esso infatti ha messo a nudo un problema che non era stato discusso in precedenza (a causa della grande importanza attribuita alla verificabilità piuttosto che alla falsificabilità, e del fatto che le asserzioni probabilistiche sono, come si spiega nel paragrafo successivo, verificabili o «confermabili» in qualche senso del termine). Tuttavia la riforma che propongo al § 57, nota *1 (cfr. anche § 64, nota *2), cambia interamente la situazione. Infatti, lasciando da parte gli altri risultati che permette di conseguire, questa riforma consiste nell'adozione di una regola metodologica, come quella proposta piú sotto, nel § 68, che rende falsificabili le ipotesi probabilistiche. Il problema della decidibilità è cosí trasformato nel problema seguente: poiché possiamo soltanto aspettarci che le sequenze empiriche si *approssimino* alle sequenze a casaccio piú brevi, che cosa è accettabile come approssimazione, e che cosa non lo è? La risposta è evidentemente che l'approssimazione è questione di grado e che la determinazione di questo grado è uno dei principali problemi della statistica matematica, e della teoria della corroborazione. Cfr. anche appendice *IX, specialmente la Terza nota.

ragioni per cui non lo sono le altre ipotesi, visto che i risultati sperimentali, per quanto numerosi e favorevoli, non potranno mai stabilire in modo definitivo che la frequenza relativa «testa» è ½ e sarà *sempre* ½.

Le asserzioni probabilistiche e le asserzioni-base non possono, cosí, né contraddirsi reciprocamente né implicarsi [*entail*] reciprocamente. E tuttavia sarebbe egualmente un errore il credere, da questo fatto, che tra asserzioni probabilistiche e asserzioni-base non vigono relazioni logiche di nessun genere. E sarebbe egualmente lontano dal vero il credere che, mentre fra le asserzioni di questi due tipi vigono relazioni logiche (poiché certe sequenze di osservazioni possono, ovviamente, andare piú o meno d'accordo con un'asserzione di frequenza), l'analisi di queste relazioni ci costringa a introdurre una logica probabilistica speciale [1] che spezzi i vincoli della logica classica. Contro questi punti di vista, io credo che le relazioni in questione possano essere analizzate completamente nei termini delle relazioni logiche «classiche» di *deducibilità* e *contraddizione* [*1].

Dalla non-falsificabilità e non-verificabilità delle asserzioni probabilistiche si può concludere che esse non hanno conseguenze falsificabili, e che non possono, a loro volta, essere conseguenze di asserzioni verificabili. Ma le possibilità inverse non sono escluse. Può darsi infatti: *a*) che abbiano conseguenze verificabili unilateralmente (conseguenze puramente esistenziali, o conseguenze «c'è»), o, *b*), che siano a loro volta conseguenze di asserzioni universali (asserzioni «tutti») unilateralmente falsificabili.

Difficilmente la possibilità *b*) ci aiuterà a chiarificare la relazione logica che sussiste tra asserzioni probabilistiche e asserzioni-base: è fin troppo ovvio che un'asserzione non-falsificabile, cioè, un'asserzione che dice molto poco, può appartenere alla classe delle conseguenze di un'asserzione che è falsificabile, e che, pertanto, dice di piú.

Di maggiore interesse per noi è invece la possibilità *a*), che non è per nulla banale, e che di fatto si rivela fondamentale

[1] Cfr. § 80, specialmente le note 3 e 6.

[*1] Pur non discordando da quello che ho scritto, ora credo che i concetti probabilistici «quasi deducibile», e «quasi contraddittorio» siano estremamente utili in relazione al nostro problema; cfr. appendice *IX e il capitolo *III del *Postscript* cit.

per la nostra analisi della relazione tra asserzioni probabilistiche e asserzioni-base. Troviamo infatti che da ogni asserzione probabilistica è possibile dedurre una classe infinita di asserzioni esistenziali, ma non viceversa. (Dunque l'asserzione probabilistica asserisce di piú di quanto non faccia qualunque di queste asserzioni esistenziali). Per esempio, sia p una probabilità che è stata stimata, ipoteticamente, per una certa alternativa (e supponiamo che sia $0 \neq p \neq 1$); allora da questa stima possiamo dedurre, ad esempio, la conseguenza esistenziale che nella sequenza compariranno sia uno sia zeri. (Naturalmente seguono ancora molte conseguenze di gran lunga meno semplici; ad esempio che compariranno segmenti che deviano da p soltanto di una quantità molto piccola).

Ma da questa stima possiamo dedurre molto di piú; per esempio che ci sarà costantemente un elemento con la proprietà «1» e un altro elemento con la proprietà «0»; ciò vuol dire che dopo *ogni* elemento x comparirà nella sequenza un elemento y che ha la proprietà «1», e anche un elemento z che ha la proprietà «0». Un'asserzione di questa forma («per *ogni* x esiste un y che ha la proprietà, osservabile, o controllabile estensionalmente, β») è sia non-falsificabile – perché non ha conseguenze falsificabili – sia non-verificabile – per via del «tutti» (o «per ogni») che l'ha resa ipotetica [*2]. Nondimeno può essere «confermata» meglio, o meno bene, nel

[*2] Naturalmente non ho mai inteso suggerire che *ogni* asserzione della forma: «per ogni x esiste un y che ha la proprietà osservabile β» sia non-falsificabile, e perciò non-controllabile: ovviamente l'asserzione: «per ogni lancio di una moneta che ha per risultato 1 esiste un successore immediato che ha per risultato 0» è falsificabile e di fatto è falsificata. Ciò che crea la non-falsificabilità non è semplicemente la forma «per ogni x c'è un y tale che...», ma il fatto che il «c'è» è *illimitato*, che l'occorrenza di y può essere procrastinata oltre ogni limite. Nel caso della probabilità, *y può, per cosí dire, comparire tardi a piacere*. Un elemento «0» può comparire subito, o dopo mille lanci, o dopo qualsiasi numero di lanci; è questo fatto ad essere responsabile della non-falsificabilità. Se, d'altra parte, la distanza del luogo di occorrenza di y da quello di occorrenza di x è *limitata*, allora l'asserzione «Per ogni x esiste un y tale che...» può essere falsificabile.

L'asserzione piuttosto avventata contenuta nel testo (e che presuppone tacitamente il § 15) ha condotto certuni – con mia grande sorpresa – a credere che *tutte* le asserzioni – o «la maggior parte» delle asserzioni, qualsiasi cosa ciò significhi – della forma «per ogni x esiste un y tale che...» siano non-falsificabili, e ciò è stato ripetutamente usato come critica del criterio di falsificabilità. Si veda ad esempio, «Mind», 54 (1945), pp. 119 sg. L'intero problema di queste «asserzioni tutti-e-qualcuno» (termine, questo, dovuto a J. W. N. Watkins) è discusso piú ampiamente nel *Postscript* cit. Cfr. specialmente i §§ *24 sg.

senso che possiamo riuscire a verificare molte, poche, o nessuna delle sue conseguenze esistenziali. Essa dunque sta con l'asserzione-base nella relazione che sembra caratteristica delle asserzioni probabilistiche. Le asserzioni che hanno tale forma possono essere chiamate «asserzioni esistenziali universalizzate» o «*ipotesi esistenziali*» (universalizzate).

Io sostengo che la relazione tra le stime probabilistiche e le asserzioni-base, e la possibilità di essere piú o meno ben «confermate», può essere compresa se si considera il fatto che da tutte le stime probabilistiche sono *logicamente deducibili* ipotesi esistenziali. Ciò suggerisce la questione se a loro volta le asserzioni probabilistiche non possano forse avere la forma di ipotesi esistenziali.

Ogni stima probabilistica (ipotetica) ha come conseguenza [*entails*] la congettura che la sequenza empirica in questione è, approssimativamente, casuale, o a casaccio. Ciò significa che essa reca con sé l'applicabilità (approssimata) e la verità degli assiomi del calcolo della probabilità. La nostra questione è perciò equivalente alla questione se questi assiomi rappresentino quelle che ho chiamato «ipotesi esistenziali».

Se esaminiamo le due esigenze avanzate nel § 64 troviamo che l'esigenza del disordine ha, di fatto, la forma di un'ipotesi esistenziale[2]. L'esigenza di unicità, d'altra parte, non ha questa forma; non può averla, perché un'asserzione della forma «esiste *solo un*...» deve avere la forma di un'asserzione universale. (Può essere tradotta... «non c'è piú di un...» oppure «tutti i... sono identici»).

Ora, la mia tesi è che soltanto quello che possiamo chiamare il «costituente esistenziale» delle stime probabilistiche, e perciò soltanto l'esigenza del disordine, stabilisce una relazione logica tra le stime probabilistiche e le asserzioni-base. Di conseguenza, l'esigenza di unicità, in quanto asserzione universale, non deve avere nessuna conseguenza estensionale. Che esista un valore p che ha le proprietà richieste può, in realtà, essere «confermato» estensionalmente (anche se,

[2] Può mettersi nella forma seguente: Per ogni ε positivo, per ogni n-upla di predecessori, e per ogni elemento con numero ordinale x, esiste un elemento, scelto mediante una selezione in base al predecessore, con il numero ordinale $y > x$, tale che la frequenza fino al termine y si allontana da un valore prefissato p di una quantità minore di ε.

naturalmente, solo in via provvisoria); ma non può essere confermato che esista *soltanto uno* di tali valori. Quest'ultima asserzione, che è universale, potrebbe essere estensionalmente significante solo se certe asserzioni-base la potessero *contraddire*; cioè a dire, se le asserzioni-base potessero stabilire l'esistenza di piú d'uno di tali valori. Ma poiché non sono in grado di stabilirla (ricordiamo infatti che la non-falsificabilità è strettamente connessa con la formula binomiale) l'esigenza di unicità dev'essere priva di significato dal punto di vista estensionale [*3].

È questa la ragione per cui le relazioni logiche che reggono tra una stima probabilistica e le asserzioni-base, e la «confermabilità» graduata delle prime, rimangono inalterate se eliminiamo dal sistema l'esigenza dell'unicità. Nel far ciò potremmo dare al sistema la forma di una pura ipotesi esistenziale [3]. Ma dovremmo poi rinunciare all'unicità delle stime probabilistiche [*4], e perciò (per quanto riguarda l'unicità) otterremmo qualcosa di differente dal calcolo delle probabilità usuale.

Dunque, l'esigenza di unicità non è, ovviamente, superflua. Qual è, allora, la sua funzione logica?

Mentre l'esigenza del disordine ci aiuta a stabilire una relazione tra asserzioni probabilistiche e asserzioni-base, l'esigenza dell'unicità regola le relazioni tra le varie asserzioni probabilistiche. Senza l'esigenza dell'unicità alcune di queste asserzioni potrebbero, in quanto ipotesi esistenziali, essere derivabili da altre, ma non potrebbero mai contraddirsi l'una con l'altra. Soltanto l'esigenza dell'unicità assicura che le asserzioni probabilistiche possano contraddirsi vicendevolmente; infatti, in forza di quest'esigenza, esse acquistano la forma di una congiunzione i cui componenti sono un'asserzione universale e un'ipotesi esistenziale; e le asserzioni di questa

[*3] La situazione è totalmente diversa se si adotta l'esigenza +2) del § 64, nota *2: quest'esigenza è empiricamente significante e rende falsificabili le ipotesi probabilistiche (come si asserisce al § 65, nota *1).

[3] In questo sistema d'assiomi sono derivabili anche le formule del calcolo della probabilità; soltanto, le formule devono essere interpretate come formule esistenziali. Ad esempio, il teorema di Bernoulli non asserirebbe piú che il singolo valore della probabilità di un particolare n di ${}_{\alpha n}F(\Delta p)$ giace vicino all'1, ma solo che, per un n particolare, tra gli svariati valori di probabilità di ${}_{\alpha n}F(\Delta p)$ ce n'è almeno uno che giace vicino all'1.

[*4] Come è stato mostrato nella nuova nota *2 al § 64, si può eliminare qualsiasi *esigenza* speciale di unicità senza sacrificare l'unicità.

forma possono stare, l'una con l'altra, esattamente nelle stesse relazioni logiche fondamentali (equivalenza, derivabilità, compatibilità e incompatibilità) in cui possono stare le asserzioni universali «normali» di qualsiasi teoria: per esempio, di una teoria falsificabile.

Se ora consideriamo l'assioma di convergenza, troviamo che esso è simile all'esigenza di unicità in questo: che ha la forma di un'asserzione universale non-falsificabile. Ma esso esige di piú di quanto non richieda la nostra esigenza. Quest'esigenza in piú, comunque, non può avere neppure significato estensionale; per di piú, non ha nessun significato logico o formale, ma un significato *soltanto intensionale*: è una richiesta di esclusione di tutte le sequenze definite intensionalmente (cioè di tutte le sequenze matematiche) senza limiti di frequenza. Ma dal punto di vista delle applicazioni, quest'esclusione si rivela priva di significato anche sotto l'aspetto intensionale, dal momento che nella teoria applicata della probabilità non trattiamo, naturalmente, con le sequenze matematiche in se stesse, ma soltanto con stime ipotetiche intorno a sequenze empiriche. L'esclusione delle sequenze prive di limiti di frequenza potrebbe perciò soltanto servire a metterci in guardia dal trattare quelle sequenze empiriche come sequenze casuali o a casaccio delle quali assumiamo ipoteticamente che non abbiano limite di frequenza. Ma quale possibile azione potremmo intraprendere per rispondere a questo avvertimento[4]? A qual genere di considerazioni, o congetture sulla possibile convergenza o divergenza delle sequenze empiriche, dovremmo indulgere, o da quali dovremmo astenerci, di fronte a quest'avvertimento, visto che i criteri di convergenza non sono applicabili ad esse piú di quanto non lo siano i criteri di divergenza? Tutte queste scomode questioni[5] spariscono non appena ci siamo sbarazzati dell'assioma di convergenza.

[4] Sia l'assioma del disordine, sia quello di unicità possono essere correttamente considerati come avvertimenti (intensionali) di questo genere. Ad esempio, l'assioma del disordine ci mette in guardia dal trattare come casuali le sequenze, quando si suppone (non importa su quali basi) che per tali sequenze avranno successo certi sistemi di scommesse. L'assioma dell'unicità ci mette in guardia dall'attribuire una probabilità q (per $q \neq p$) a una sequenza che supponiamo possa essere descritta approssimativamente per mezzo dell'ipotesi che la sua probabilità è eguale a p.

[5] Simili dubbi inducono Schlick ad obiettare all'assioma del limite (in «Die Naturwissenschaften», 19, 1931, p. 158).

La nostra analisi logica rende cosí trasparenti sia la forma sia la funzione delle varie esigenze parziali del sistema, e mostra quali ragioni parlino contro l'assioma del disordine e in favore dell'esigenza dell'unicità. Frattanto, però, sembra che il problema della decidibilità si faccia ancor piú minaccioso. E sebbene non siamo obbligati a dire che le nostre esigenze (o assiomi) sono «prive di senso» [6], sembra però che siamo costretti a descriverle come non-empiriche. Ma, non importa quali parole usiamo per esprimerla, questa descrizione delle asserzioni probabilistiche non contraddice forse l'idea principale della nostra impostazione?

67. *Un sistema probabilistico di metafisica speculativa.*

L'uso piú importante delle asserzioni probabilistiche in fisica è il seguente: certe regolarità fisiche, o certi effetti fisici osservabili, vengono interpretati come «macroleggi»; cioè a dire vengono interpretati, o spiegati, o come fenomeni massicci o come risultati osservabili di «microeventi» ipotetici e non osservabili direttamente. Le macroleggi vengono dedotte da stime probabilistiche con il seguente metodo: si fa vedere che ci si devono aspettare, con un grado di probabilità molto vicino a 1, cioè con un grado di probabilità che devia da 1 di una quantità che può essere resa piccola a nostro piacere, osservazioni che concordano con la regolarità osservata in questione. Una volta che lo si sia mostrato, si dice che per mezzo della nostra stima probabilistica abbiamo «spiegato» come macroeffetto l'effetto osservabile in questione.

Ma se usiamo in questo modo le stime probabilistiche per la «spiegazione» di regolarità osservabili, *senza introdurre speciali precauzioni*, possiamo trovarci immediatamente coinvolti in speculazioni che, d'accordo con l'uso generale,

[6] Qui il positivista dovrebbe riconoscere un'intera gerarchia di «insignificanze». Le leggi naturali non-verificabili gli appaiono «insignificanti» (cfr. § 6 e le citazioni nelle note 1 e 2), e ancor piú le ipotesi probabilistiche che non sono né verificabili né falsificabili. Dei nostri assiomi, quello di unicità, che non ha significato estensionale, sarebbe piú insignificante che l'assioma, insignificante, dell'irregolarità, che almeno ha conseguenze estensionali. Ancor piú insignificante sarebbe l'assioma del limite che non è neppure significante dal punto di vista intensionale.

possono benissimo venir descritte come tipiche della *metafisica speculativa.*

Infatti, poiché le asserzioni probabilistiche non sono falsificabili, deve sempre essere possibile, in questo modo, «spiegare» mediante stime probabilistiche *qualsiasi regolarità ci piaccia di spiegare.* Prendiamo, ad esempio, la legge della gravità. Possiamo escogitare stime probabilistiche ipotetiche in modo da «spiegare» questa legge nel modo seguente. Scegliamo eventi di qualche genere, perché servano come eventi elementari o atomici: ad esempio, uno di tali eventi sia il movimento di una piccola particella. Scegliamo anche quella che dovrà essere la proprietà primaria di questi eventi; ad esempio, la direzione e la velocità del movimento di una particella. Assumiamo poi che questi eventi presentino una distribuzione casuale. Infine calcoliamo la probabilità che tutte le particelle che si trovano in una certa regione finita dello spazio durante un certo periodo finito di tempo – un certo «periodo cosmico» – si muovano, accidentalmente, con un grado di accuratezza specificato, nel modo richiesto dalla legge di gravità. Naturalmente, la probabilità calcolata sarà molto piccola, e anzi, sarà trascurabilmente piccola, ma tuttavia non uguale a zero. Cosí possiamo chiederci quanto lungo dovrebbe essere un segmento *n* della sequenza, o, in altre parole, quanto lunga dobbiamo assumere che sia la durata dell'intero processo, perché possiamo aspettarci con un grado di probabilità prossimo a 1 (o lontano da 1 di una quantità non maggiore di un valore piccolo a piacere, ε), l'occorrenza di un tale periodo cosmico, in cui, come risultato di un'accumulazione di eventi accidentali, tutte le nostre osservazioni concorderanno con la legge di gravità. Per qualsiasi valore, vicino a 1 a nostro piacere, otteniamo un numero finito determinato, per quanto estremamente grande. Possiamo allora dire: se assumiamo che il segmento della sequenza abbia questa lunghezza molto grande – o in altre parole, che il «mondo» duri abbastanza – allora la nostra assunzione di disordine ci autorizza ad aspettarci l'occorrenza di un periodo cosmico in cui la legge di gravità sembra valere, sebbene «in realtà» non succeda mai nulla, se non una disseminazione [*scattering*] disordinata di eventi. Questo tipo di «spiegazione» condotto per mezzo di un'assunzione di disordine può essere applicato a qualunque regolarità scegliamo. Di fatto, in questo modo possiamo «spiegare» tutto il nostro mondo, con tutte le sue regolarità osservate, come una fase di un caos dominato dal disordine: *come un'accumulazione di coincidenze puramente accidentali.*

Mi sembra chiaro che le speculazioni di questo genere sono «metafisiche» e prive di qualsiasi significato per la scienza. E mi sembra egualmente chiaro che questo fatto è connesso con la loro non-falsificabilità: con il fatto che possiamo indulgervi sempre e in ogni circostanza. Qui dunque il mio criterio di demarcazione sembra concordare perfettamente con l'uso generale della parola «metafisico».

Perciò, quando siano applicate senza speciali precauzioni, le teorie che implicano la probabilità non devono essere considerate scientifiche. Se vogliamo che abbiano una qualche utilità nella pratica della scienza empirica, dobbiamo mettere fuori causa il loro uso metafisico *[1].

68. *La probabilità in fisica.*

Il problema della decidibilità turba soltanto il metodologo, non il fisico *[1]. Se gli chiedono di produrre un concetto di

*[1] Mentre scrivevo questo libro pensavo che le speculazioni del tipo descritto fossero facilmente riconoscibili come inutili, proprio a causa della loro illimitata applicabilità. Ma tali speculazioni sembrano piú tentatrici di quanto io abbia immaginato. Ad esempio, J. B. S. Haldane ho sostenuto (in «Nature», 122, 1928, p. 808. Cfr. anche *Inequality of Man* [Ineguaglianza dell'uomo], pp. 163 sg.) che se accettiamo la teoria probabilistica dell'entropia dobbiamo considerare come certo, o quasi certo, che il mondo si ricaricherà accidentalmente, purché aspettiamo abbastanza a lungo. Naturalmente, questo argomento è stato spesso ripetuto da altri studiosi. Tuttavia si tratta, io penso, di un perfetto esempio del tipo di argomentazione criticata in questo capitolo; un'argomentazione, per di piú, che ci legittima ad aspettarci, con ragionevole certezza, qualunque cosa ci piaccia. Tutto ciò concorre a mostrare i pericoli inerenti alla forma esistenziale, che le asserzioni probabilistiche condividono con la maggior parte delle asserzioni metafisiche. (Cfr. § 15).

*[1] Il problema che viene discusso qui è stato trattato molti anni fa, in modo chiaro ed esauriente, dai fisici P. e T. EHRENFEST, *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* [Enciclopedia delle scienze matematiche], IV Teilband, Heft 6 (12 dicembre 1911), § 30. Essi lo trattano come problema *concettuale e epistemologico* e introducono l'idea di «ipotesi probabilistiche di primo, secondo, ..., *k*-esimo ordine»; un'ipotesi probabilistica di second'ordine è, ad esempio, una stima della frequenza con cui certe frequenze compaiono in aggregati di aggregati. Comunque, P. e T. Ehrenfest non operano con nulla che corrisponda all'idea di *effetto riproducibile*, idea

probabilità applicabile in pratica, il fisico può forse offrire qualcosa di simile a una *definizione fisica della probabilità*, seguendo linee come questa: ci sono certi esperimenti che, anche quando siano compiuti in condizioni ben controllate, conducono a risultati variabili. Nel caso di alcuni di questi esperimenti – di quegli esperimenti, cioè, che hanno «carattere casuale» come i lanci di una moneta – la frequente ripetizione conduce a risultati muniti di frequenze relative che, per ripetizioni ulteriori, si approssimano sempre piú a qualche valore fisso, che possiamo chiamare la *probabilità* dell'evento in questione. Questo valore è «... determinabile empiricamente mediante lunghe serie di esperimenti, con qualsiasi grado di approssimazione» [1]; e questo, sia detto tra parentesi, spiega perché sia possibile falsificare una stima ipotetica di probabilità.

Contro definizioni siffatte sia i matematici, sia i logici, solleveranno obiezioni: in particolare, quelle che seguono:

1) La definizione non concorda col calcolo delle probabilità, perché, secondo il teorema di Bernoulli, solo *quasi* tutti i segmenti molto lunghi sono statisticamente stabili, cioè, si comportano come se fossero convergenti. Per questa ragione la probabilità non può essere definita mediante questa stabilità, cioè mediante il comportamento quasi convergente. Infatti, l'espressione «*quasi* tutti» – che dovrebbe comparire nel *definiens* – è, in se stessa, soltanto un sinonimo di «molto probabile». Pertanto la definizione è circolare: fatto, questo, che può essere facilmente celato (ma non eliminato) lasciando cadere la parola «quasi». Questo ha fatto il fisico con la sua definizione, la quale è perciò inaccettabile.

2) Quando una serie di esperimenti deve chiamarsi «*lunga*»? Se non ci dànno un criterio per decidere che cosa si

che qui viene usata in modo cruciale, per risolvere il problema che essi hanno esposto cosí bene. Si veda, specialmente, l'opposizione tra Boltzmann e Planck, a cui si riferiscono nelle note 247 sg. e che può, io credo, essere risolta usando l'idea di effetto riproducibile. Infatti, in condizioni sperimentali appropriate, certe fluttuazioni possono condurre a effetti riproducibili, come la teoria di Einstein del moto browniano ha cosí brillantemente dimostrato. Cfr. anche § 65, nota *1, e le appendici *VI e *IX.

[1] La citazione è tratta da BORN e JORDAN, *Elementare Quantenmechanik* cit., p. 306. Cfr. anche P. DIRAC, *Quantum Mechanics* [Meccanica quantistica], 1930[1], p. 10. Un passaggio analogo, un po' abbreviato, si trova a p. 14 della 3ª ed., 1947. Cfr. anche WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* [Teoria dei gruppi e meccanica quantistica], 1931[2], p. 66.

debba chiamare «lungo», non possiamo sapere quando, o se, ci siamo approssimati alla probabilità.

3) Come facciamo a sapere che l'*approssimazione* voluta è stata effettivamente raggiunta?

Io credo che queste obiezioni siano giustificate, ma credo anche che sia possibile mantenere la definizione data dal fisico. A sostegno di questa credenza schiererò gli argomenti delineati nel paragrafo precedente. Questi argomenti mostravano che, quando se ne permetta l'applicazione illimitata, le ipotesi probabilistiche perdono tutto il loro contenuto informativo. Il fisico non le userebbe mai cosí. Seguendo il suo esempio, non permetterò l'applicazione illimitata delle ipotesi probabilistiche. Propongo di prendere *la decisione metodologica consistente nel non spiegare mai gli effetti fisici, cioè le regolarità riproducibili, come accumulazioni di accidenti.* Naturalmente, questa decisione modifica il concetto di probabilità: lo restringe [*2]. Cosí l'obiezione 1) non intacca la mia posizione, perché io non asserisco affatto l'identità dei concetti fisico e matematico di probabilità: al contrario, la nego. Ma in luogo della 1) sorge una nuova obiezione.

1′) Quando possiamo parlare di «accumulazione di accidenti»? Presumibilmente, nel caso di una probabilità piccola. Ma quando una probabilità è «*piccola*»? Possiamo ritenere che la proposta appena fatta metta fuori causa l'uso del metodo (discusso nel paragrafo precedente) consistente nel confezionare una probabilità arbitrariamente grande per mezzo di una probabilità piccola cambiando la formulazione del problema matematico. Ma, al fine di realizzare la decisione proposta, dobbiamo sapere che cosa dobbiamo considerare come *piccolo*.

Nelle pagine seguenti si farà vedere che la regola metodologica proposta concorda con la definizione del fisico e che le obiezioni sollevate dalle questioni 1′), 2) e 3) possono ricevere, col suo aiuto, una risposta. Tanto per cominciare, io ho in mente solo *un* caso tipico di applicazione del calcolo delle probabilità: penso, cioè, al caso di certi macroeffetti riproducibili che possono essere descritti con l'aiuto di (macro)

[*2] La decisione o regola metodologica, formulata qui restringe il concetto di probabilità, proprio come lo restringe la decisione di adottare come modelli matematici di sequenze empiriche le sequenze casuali *piú brevi*. Cfr. § 65, nota *1.

leggi precise – come quella della pressione dei gas – e che interpretiamo, o spieghiamo, come dovute a un'accumulazione molto grande di microprocessi, quali le collisioni molecolari. Altri casi tipici come le fluttuazioni statistiche, o la statistica dei processi casuali individuali, possono essere ridotti a questo senza troppe difficoltà [*3].

Prendiamo un macroeffetto di questo tipo, descritto da una legge ben corroborata, e riduciamolo a sequenze disordinate di microeventi. Supponiamo che la legge asserisca che in certe condizioni una grandezza fisica ha il valore p. Supponiamo altresí che l'effetto sia «preciso» cosicché non si presenti nessuna fluttuazione misurabile, cioè nessuna deviazione da p oltre quell'intervallo, $\pm\varphi$ (cioè l'intervallo di imprecisione; cfr. § 37) entro il quale le nostre misurazioni fluttueranno in ogni caso, a causa dell'imprecisione inerente alla tecnica di misurazione prevalente. Proponiamo ora l'ipotesi che p è una probabilità all'interno di una sequenza α di microeventi; e inoltre, che n microeventi contribuiscono a produrre l'effetto. Allora (cfr. § 61), per ogni valore prescelto, δ, possiamo calcolare la probabilità ${}_{\alpha n}F(\Delta p)$, cioè la probabilità che il valore misurato cada all'interno dell'intervallo Δp. La probabilità complementare può essere denotata da «ε». Abbiamo cosí: ${}_{\alpha n}F(\overline{\Delta p}) = \varepsilon$. Secondo il teorema di Bernoulli, quando n cresce illimitatamente, ε tende a zero.

Supponiamo che ε sia cosí «piccola» da poter essere trascurata. (Tratteremo presto della questione 1′) che riguarda il significato di «piccolo» in quest'ipotesi). È chiaro che il Δp, deve essere interpretato come l'intervallo nel quale le misurazioni si approssimano al valore p. Vediamo di qui che le tre quantità, ε, n, e Δp, corrispondono alle tre questioni 1′), 2), e 3). Δp o δ possono essere scelte arbitrariamente, e ciò restringe l'arbitrarietà della scelta di ε e di n. Poiché è nostro compito dedurre il macroeffetto esatto $p(\pm\varphi)$ non assumeremo che δ sia maggiore di φ. Per ciò che riguarda l'effetto riproducibile p, la deduzione sarà soddisfacente se potremo compierla per qualche valore $\delta \leq \varphi$. (Qui φ è dato, dal momento che è determinato dalla tecnica di misurazione).

[*3] Ora sono un po' in dubbio sulle parole «senza molta difficoltà»; infatti, in tutti i casi, eccettuati quelli dei macroeffetti estremi, discussi in questo paragrafo, si devono usare metodi statistici molto sottili. Cfr. anche appendice *IX, specialmente la mia Terza nota.

Ora scegliamo δ in modo che sia (approssimativamente) eguale a φ. Dunque abbiamo ridotto la questione 3) alle due altre questioni, 1') e 2).

Con la scelta di δ (cioè di Δp) abbiamo stabilito una relazione fra n ed ε, perché a ogni n corrisponde ora univocamente un valore di ε. Cosí la 2), cioè la questione: quando n è sufficientemente lungo? è stata ridotta alla 1'), cioè alla questione: quando è piccola ε? (e viceversa).

Ma questo significa che si potrebbe rispondere a *tutte e tre le questioni*, se solo si potesse decidere *quale particolare valore di* ε si debba lasciar da parte come «trascurabilmente piccolo». Ora, la nostra regola metodologica equivale alla decisione di trascurare i *piccoli* valori di ε; ma difficilmente saremo preparati ad impegnarci per sempre per un valore definito di ε.

Se proponiamo questa questione ad un fisico, cioè se gli chiediamo quale ε egli sia preparato a trascurare: 0,001 o 0,000001 o...? risponderà presumibilmente che ε non lo interessa affatto; che non ha scelto ε ma n, e che ha scelto n in modo tale da rendere la correlazione tra n e Δp largamente *indipendente da qualsiasi cambiamento* possiamo scegliere di fare nel valore di ε.

La risposta del fisico è giustificata dalle particolarità matematiche della distribuzione bernoulliana: per ogni n è possibile determinare la dipendenza funzionale tra ε e Δp [*4]. L'esame di questa funzione mostra che per *ogni n* («grande»)

[*4] Le osservazioni che seguono in questo capoverso (e alcune delle discussioni condotte piú avanti, in questo paragrafo) sono, io credo, chiarite e superate dalle considerazioni che si trovano nell'appendice *IX (si vedano specialmente i punti 8 sgg. della mia Terza nota). Con l'aiuto dei metodi usati colà si può mostrare che quasi tutti i possibili campioni statistici di grandi dimensioni n, mettono in forte pericolo una data ipotesi probabilistica, vale a dire, forniscono un alto grado *negativo* di corroborazione, che noi possiamo decidere di interpretare come confutazione o falsificazione. La maggior parte dei campioni rimanenti sosterranno l'ipotesi, cioè a dire, daranno un alto grado *positivo* di corroborazione. Relativamente pochi campioni di larga dimensione n forniranno a un'ipotesi probabilistica un grado di corroborazione (positivo o negativo) non decisivo. Dunque possiamo aspettarci di essere in grado di confutare un'ipotesi probabilistica nel senso indicato qui; e possiamo aspettarcelo forse con confidenza ancor maggiore che non nel caso di un'ipotesi non-probabilistica. La regola di decisione metodologica di considerare, per n grande, un grado negativo di corroborazione come falsificazione è, naturalmente, un caso specifico della regola metodologica o decisione discussa nel presente paragrafo: la regola consistente nel trascurare certe improbabilità estreme.

esiste un valore caratteristico di Δp, tale che, negli intorni di questo valore, Δp è altamente refrattario ai cambiamenti di ε. Questa refrattarietà cresce col crescere di n. Se prendiamo un n dell'ordine di grandezza che ci aspetteremmo di ottenere nel caso di fenomeni massicci estremi, allora negli intorni del suo valore caratteristico, Δp sarà cosí altamente refrattario ai mutamenti di ε che difficilmente cambierà anche se cambia l'ordine di grandezza di ε. Ora, il fisico non attribuirà molto valore alle definizioni piú rigorose degli intorni di Δp. E ricordiamo che nel caso dei fenomeni massicci tipici, ai quali è ristretta questa analisi, Δp può essere preso in modo da corrispondere all'intervallo di precisione $\pm\varphi$ che dipende dalla nostra tecnica di misurazione; e questa non ha limiti rigorosi, ma soltanto quelli che nel § 37 ho chiamato «limiti di condensazione». Diremo perciò che n è grande quando la refrattarietà di Δp negli intorni del suo valore caratteristico, che possiamo determinare, è almeno tanto grande che anche i cambiamenti nell'ordine di grandezza di ε fanno fluttuare il valore di Δp soltanto entro i limiti di condensazione di $\pm\varphi$. (Se $n \rightarrow \infty$, allora Δp diventa completamente refrattario). Ma se cosí è, non è piú necessario che ci interessiamo alla determinazione esatta di ε: *è sufficiente la decisione di trascurare un* ε *piccolo*, anche se non abbiamo stabilito con esattezza che cosa si debba considerare «piccolo». Tale decisione equivale alla decisione di lavorare con i valori caratteristici di Δp, sopra menzionati, che sono refrattari ai cambiamenti di ε.

La regola secondo cui si devono trascurare le improbabilità estreme (regola che diventa sufficientemente esplicita soltanto alla luce di quanto si è detto sopra) concorda con l'esigenza dell'*oggettività scientifica.* Infatti è chiaro che l'ovvia obiezione alla nostra regola è che anche la piú grande improbabilità è pur sempre una probabilità, per quanto piccola, e che di conseguenza anche i processi piú improbabili – cioè quelli che ci proponiamo di trascurare – un giorno o l'altro avranno luogo. Ma di questa obiezione ci si può liberare richiamando *l'idea di effetto fisico riproducibile*: idea che è strettamente connessa con quella di oggettività (cfr. § 8). Non nego la possibilità che gli eventi improbabili possano accadere. Per esempio, non asserisco che le molecole di un piccolo volume di gas non possano, per un breve tempo e spontaneamente, concentrarsi tutte in una parte del volume, o che in un volume maggiore di gas non avrà mai luogo una variazione spontanea della pressione. Quello che asserisco è che tali accadimenti non sarebbero effetti fisici, perché, a causa della loro immensa improbabilità, *non sono riproducibili a piacere*. Anche se a un fisico fosse successo di osservare un processo siffatto, sarebbe assolutamente incapace di riprodurlo, e perciò non sarebbe mai in grado di decidere che cosa sia realmente accaduto in questo caso, e se non possa aver commesso un errore di osservazione. Comunque, se troviamo deviazioni *riproducibili* da un macroeffetto che è stato dedotto, nel modo indicato, da una stima probabilistica, dobbiamo assumere che la stima probabilistica è *falsificata*.

Considerazioni simili ci aiutano a comprendere prese di posizione come la seguente, di Eddington, in cui egli distingue due tipi di leggi fisiche: «Alcune cose non accadono mai nel mondo fisico perché sono *impossibili*; altre perché sono troppo improbabili. Le leggi che vietano le une sono leggi primarie; le leggi che vietano le altre sono leggi secondarie»[2]. Sebbene questa formulazione non vada forse del tutto esente da critiche (io preferirei astenermi da asserzioni incontrollabili riguardanti l'accadere o il non accadere di cose estremamente improbabili) essa concorda con l'applicazione che il fisico fa della teoria della probabilità.

Altri casi a cui si può applicare la teoria della probabilità, quali le fluttuazioni statistiche o la statistica degli eventi individuali a carattere casuale, sono riducibili al caso che abbiamo discusso: al caso, cioè, dei macroeffetti misurabili con precisione. Per fluttuazioni statistiche intendo fenomeni come il moto browniano. Qui l'intervallo di precisione della misurazione ($\pm\varphi$), è piú piccolo dell'intervallo Δp caratteristico del numero n dei microeventi che contribuiscono a creare l'effetto; quindi dobbiamo aspettarci, come altamente probabili, deviazioni misurabili da p. Il fatto che abbiano luogo tali deviazioni sarà controllabile, perché la fluttuazione stessa diventa un effetto riproducibile; e a questo effetto riproducibile si applicano i miei ragionamenti di prima: secondo le mie richieste metodologiche, oltre una certa

[2] A. S. EDDINGTON, *The Nature of the Physical World* [La natura del mondo fisico], 1928, p. 75.

grandezza (oltre un certo intervallo Δp) le fluttuazioni non devono essere riproducibili, né devono esserlo lunghe sequenze di fluttuazioni in una sola e medesima direzione, ecc. Argomenti corrispondenti valgono per la statistica degli eventi casuali.

Posso ora riassumere le mie argomentazioni riguardanti il problema della decidibilità.

Il nostro problema era: Come possono le ipotesi probabilistiche – che, come abbiamo visto, non sono falsificabili – avere, nella scienza empirica, la parte di leggi naturali? La nostra risposta è: le asserzioni probabilistiche, in quanto non sono falsificabili, sono metafisiche e senza alcun significato empirico; e nella misura in cui vengono usate come asserzioni empiriche sono usate come asserzioni falsificabili.

Ma questa risposta solleva un'altra questione: *Com'è possibile* che asserzioni probabilistiche – che non sono falsificabili – possano essere *usate* come asserzioni falsificabili? (Non c'è dubbio che possano essere usate cosí: il fisico sa abbastanza bene quando considerare falsificata un'ipotesi probabilistica). Vediamo che questa questione ha due aspetti: per un verso dobbiamo rendere comprensibile, in termini di forma logica, la possibilità di usare asserzioni probabilistiche; per l'altro, dobbiamo analizzare le regole che governano l'uso di queste asserzioni in quanto asserzioni falsificabili.

Secondo il § 66, le asserzioni-base accettate possono concordare piú o meno con qualche stima probabilistica data; possono rappresentare meglio, o meno bene, un segmento tipico di una sequenza probabilistica. Ciò fornisce l'opportunità per l'applicazione di qualche specie di *regola metodologica*; ad esempio, di una regola che richieda che l'accordo tra le asserzioni-base e la stima probabilistica si conformi a qualche standard di minimo. Cosí, la regola potrebbe tracciare qualche linea di demarcazione arbitraria e decretare che siano «permessi» soltanto segmenti ragionevolmente rappresentativi (o «campioni ragionevolmente grandi») mentre segmenti atipici o non-rappresentativi vengono «vietati».

Un'analisi piú serrata di questo suggerimento ci ha mostrato che la linea che separa ciò che è permesso da ciò che è vietato non deve necessariamente essere arbitraria, come a tutta prima si sarebbe potuto pensare. E, in particolare, che non c'è alcun bisogno di tracciarla «in modo tollerante». Infatti è possibile formulare la regola in modo tale che la linea di demarcazione tra ciò che è permesso e ciò che è vietato sia determinata, proprio come nel caso di altre leggi, dalla precisione raggiungibile dalle nostre misurazioni.

La nostra regola metodologica, proposta in accordo col criterio di demarcazione, non vieta l'occorrenza di segmenti atipici; e non vieta neppure la ricorrenza ripetuta di deviazioni (che, naturalmente, sono tipiche delle sequenze probabilistiche). Ciò che questa regola vieta è l'occorrenza prevedibile e riproducibile di deviazioni sistematiche, quali le deviazioni in una direzione particolare, o l'occorrenza di segmenti che sono atipici in un modo ben definito. Dunque essa richiede, non un accordo semplicemente approssimativo, ma il miglior accordo possibile *per tutto ciò che è riproducibile e controllabile*; in breve, per tutti gli *effetti riproducibili.*

69. *Legge e caso.*

Si sente dire, talvolta, che i movimenti dei pianeti obbediscono a leggi rigorose, mentre la caduta di un dado è fortuita, o soggetta al caso. Dal mio punto di vista la differenza consiste nel fatto che finora siamo stati in grado di predire con successo i movimenti dei pianeti, ma non i risultati dei singoli lanci di un dado.

Per fare predizioni, sono necessarie leggi e condizioni iniziali; se non disponiamo di leggi opportune, o se non si possono accertare le condizioni iniziali, la predizione scientifica fallisce. Nel caso del lancio di un dado, è chiaro che manchiamo di una conoscenza sufficiente delle condizioni iniziali. Disponendo di misurazioni sufficientemente precise delle condizioni iniziali sarebbe possibile far predizioni anche in questo caso; ma le regole per giocare correttamente ai dadi (scuotere la scatola dei dadi) sono scelte in modo da impedirci di misurare le condizioni iniziali. Chiamerò «*condizioni di contorno*» le regole del giuoco e le altre regole che determinano le condizioni nelle quali devono aver luogo i vari eventi di una sequenza disordinata. Tali regole consistono di richieste, come ad esempio quella che i dadi non siano «truccati» (siano fatti, cioè, di materiale omogeneo), che vengano scossi bene, ecc.

Ci sono altri casi in cui la predizione può fallire. Forse finora non è stato possibile formulare leggi appropriate; forse tutti i tentativi di formulare una legge sono falliti, e tutte le predizioni sono state falsificate. In casi del genere possiamo disperare di trovare mai una legge soddisfacente. (Ma è improbabile che rinunceremo a tentare, a meno che il problema non cessi di interessarci, cosa che può accadere, ad esempio, se siamo soddisfatti delle predizioni frequenziali). In nessun caso, comunque, possiamo affermare in modo definitivo che in un campo particolare non esistono leggi. (Questa è una conseguenza dell'impossibilità della verificazione). Ciò significa che secondo il mio punto di vista il concetto di caso diventa *soggettivo* [*1]. Parlo di «caso» quando la nostra conoscenza è insufficiente per la predizione; come nel caso del gioco dei dadi in cui parliamo di «caso» perché non abbiamo alcuna conoscenza delle condizioni iniziali. (Si può pensare che un fisico dotato di buoni strumenti possa predire un lancio mentre altre persone non possono predirlo).

Contro questo punto di vista soggettivistico è stata spesso sostenuta una dottrina oggettivistica. Siccome tale dottrina fa uso dell'idea metafisica che gli eventi sono, o non sono, determinati in se stessi, non l'esaminerò qui ulteriormente (cfr. §§ 71 e 78). Se la nostra predizione ha successo possiamo parlare di «leggi»; altrimenti non possiamo sapere nulla sull'esistenza o la non-esistenza di leggi o di irregolarità [*2].

Forse piú di quest'idea metafisica vale la pena di prendere in considerazione il seguente punto di vista. Si può dire che incontriamo «caso» in senso oggettivistico quando le

[*1] Questo non significa che io faccia, qui, concessioni a un'interpretazione soggettivistica della *probabilità*, o del *disordine* o *casualità*.

[*2] In questo paragrafo ho ignorato, a causa del suo carattere metafisico, una teoria metafisica che ora, nel *Postscript*, raccomando fortemente, perché mi sembra aprire nuove prospettive, suggerire la risoluzione di serie difficoltà, e perché mi sembra che, forse, sia vera. Quando scrivevo questo libro ero ben consapevole di sostenere credenze metafisiche, e mettevo anche in evidenza il valore di suggerimento che le idee metafisiche hanno per la scienza; tuttavia non ero sensibile al fatto che alcune dottrine metafisiche possono essere dibattute razionalmente, e, pur essendo inconfutabili, possono essere esaminate criticamente. Si veda specialmente l'ultimo paragrafo del mio *Postscript* cit.

nostre stime probabilistiche sono corroborate; proprio come incontriamo regolarità causali quando sono corroborate le previsioni dedotte da leggi.

La definizione di caso implicita in questo punto di vista può essere non del tutto inutile, ma si dovrebbe mettere fortemente in evidenza che il concetto cosí definito non è opposto al concetto di legge: per questa ragione, ho chiamato «*casuali*» [*chance-like*] le sequenze probabilistiche. In generale, una sequenza di risultati sperimentali sarà casuale se le condizioni di contorno che definiscono la sequenza differiscono dalle condizioni iniziali; quando gli esperimenti singoli, compiuti sotto identiche condizioni di contorno, procederanno sotto condizioni iniziali differenti, e daranno cosí risultati differenti. Non so se esistano sequenze casuali i cui elementi non possano essere predetti in alcun modo. Dal fatto che una sequenza è casuale non possiamo neppure inferire che non è possibile predire i suoi elementi, o che essi sono «dovuti al caso» nel senso soggettivistico di conoscenza insufficiente; e, meno che mai, possiamo inferire, da questo fatto, il fatto «oggettivo» che non ci sono leggi [*3].

Non soltanto dal carattere casuale della sequenza non è possibile inferire nulla intorno alla conformità a leggi, o, per dirla altrimenti, nulla degli *eventi individuali*: non è neppure possibile inferire, dalla corroborazione delle stime probabilistiche, che la *sequenza stessa* sia completamente irregolare. Infatti, sappiamo che esistono sequenze casuali che sono costruite secondo una regola matematica (cfr. l'appendice IV). Il fatto che una sequenza abbia una distribuzione bernoulliana non è un sintomo dell'assenza di una legge e tanto meno è identico «per definizione» all'assenza di leggi [1]. Nel

[*3] Penso che la cosa sarebbe stata piú chiara se avessi ragionato nel modo seguente. Non possiamo mai ripetere un esperimento con precisione: tutto quello che possiamo fare è tenere *certe* condizioni costanti entro certi limiti. Il fatto che certi aspetti dei nostri risultati si ripetano, mentre altri variano in modo irregolare non costituisce perciò un valido argomento in favore della fortuità oggettiva, o del caso, o dell'assenza di legge, specialmente se le condizioni dell'esperimento (come accade quando si butta in aria una moneta) sono progettate in modo da far sí che certe condizioni varino. Fin qui sono ancora d'accordo con quello che ho detto. Ma possono esserci *altri* argomenti in favore della fortuità oggettiva, ed uno di questi, dovuto ad Alfred Landé («lama di Landé»), è estremamente importante in questo contesto. Tale argomento è discusso, ora, nel *Postscript*, §§ *90 sg.

[1] Come dice SCHLICK in *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik* cit., p. 157.

successo delle predizioni probabilistiche non dobbiamo vedere nulla piú che un sintomo dell'assenza di leggi *semplici* nella struttura della *sequenza* (cfr. §§ 43 e 58) – in quanto contrapposta agli eventi che la costituiscono. È corroborata l'assunzione di libertà da retroeffetti, che è equivalente all'ipotesi che tali leggi *semplici* non possono essere scoperte: ma questo è tutto.

70. *La deducibilità delle macroleggi dalle microleggi.*

C'è una dottrina che è quasi diventata un pregiudizio, sebbene in questi ultimi tempi sia stata severamente criticata: si tratta della dottrina secondo cui *tutti* gli eventi osservabili devono essere spiegati come macroeventi, cioè a dire, come medie, o accumulazioni, o sommazioni di certi microeventi. (Per certi aspetti tale dottrina è simile a certe forme di materialismo). Come altre dottrine del suo genere, questa sembra l'ipostatizzazione di una regola metodologica che in se stessa è del tutto irreprensibile. Voglio dire, la regola secondo cui si dovrebbe vedere se sia possibile semplificare o generalizzare o unificare le nostre teorie impiegando ipotesi esplicative del tipo menzionato (cioè a dire, ipotesi che spiegano gli effetti osservabili come sommazioni o integrazioni di microeventi). Nel valutare i successi di tali tentativi, sarebbe un errore il pensare che le ipotesi *non-statistiche* intorno ai microeventi e alle loro leggi di interazione possano mai bastare a spiegare i macroeventi. Infatti, oltre ad esse, sarebbero necessarie *stime* ipotetiche *di frequenza*, perché le conclusioni statistiche possono essere derivate soltanto da premesse statistiche. Queste stime di frequenza sono sempre ipotesi indipendenti che talvolta possono bensí venirci in mente mentre siamo impegnati nello studiare le leggi relative a microeventi, ma che non possono mai essere derivate da queste leggi. Le stime di frequenza formano una classe speciale di ipotesi: sono proibizioni che, per cosí dire, riguardano l'irregolarità nel grande [1]. Von Mises lo ha stabilito molto chiaramente: «Nep-

[1] Come ben dice A. MARCH, *Die Grundlagen der Quantenmechanik* [I fondamenti della meccanica quantistica], 1931, p. 250, le particelle di un gas

pure il piú piccolo e insignificante teorema della teoria cinetica dei gas segue dalla sola fisica classica senza assunzioni addizionali di carattere statistico»[2].

Le stime statistiche, o asserzioni di frequenza, non possono mai essere derivate semplicemente da leggi di tipo «deterministico» per la ragione che, allo scopo di dedurre da tali leggi una qualsiasi predizione, sono necessarie condizioni iniziali. Al loro posto, in ogni deduzione in cui da microassunzioni di carattere deterministico o «preciso»[*1] si ottengono leggi statistiche, entrano assunzioni intorno alla *distribuzione* statistica delle condizioni iniziali, cioè a dire, assunzioni statistiche specifiche.

È sorprendente che le assunzioni di frequenza della fisica teorica siano in larga misura *ipotesi di chances eguali*, ma ciò non implica affatto che esse siano «autoevidenti» o valide a priori. Che siano ben lontane dall'essere tali, si può vedere dalle grandi differenze che intercorrono tra la statistica classica, la statistica di Bose-Einstein e la statistica di Fermi-Dirac. Tali differenze mostrano come si possano combinare assunzioni speciali con ipotesi di chances eguali, che portano in ciascun caso a definizioni differenti delle sequenze-riferimento e delle proprietà primarie per le quali si assuma distribuzione eguale.

non possono comportarsi «... a loro piacimento; ciascuna deve comportarsi d'accordo con il comportamento dell'altra. Il fatto che il tutto è qualcosa di piú che non la semplice somma delle parti dev'essere considerato come uno dei princípî piú fondamentali della teoria quantistica».

[2] VON MISES, *Über kausale und statistische Gesetzmässigkeiten in der Physik* [Regolarità causale e regolarità statistica in fisica], in «Erkenntnis», I (1930), p. 207 (cfr. «Die Naturwissenschaften», 18, 1930).

[*1] La tesi avanzata qui da von Mises e accettata da me, è stata contestata da vari fisici, tra i quali P. Jordan (cfr. *Anschauliche Quantentheorie* [Teoria quantistica intuitiva], 1936, p. 282, dove Jordan usa, come argomento contro la mia tesi, il fatto che recentemente sono state provate alcune forme di ipotesi ergodiche). Ma nella forma secondo cui *le conclusioni probabilistiche devono necessariamente fondarsi su premesse probabilistiche* – ad esempio premesse di teoria della misura in cui entrano certe assunzioni equiprobabilistiche – la mia tesi mi sembra convalidata, piuttosto che infirmata, dagli esempi di Jordan. Un altro critico di questa tesi è stato Albert Einstein, che l'attaccò in un'interessante lettera, qui riprodotta nell'appendice *XII. Io credo che a quell'epoca Einstein avesse in mente un'interpretazione soggettivistica della probabilità, e un principio di indifferenza (che nella teoria soggettivistica sembra non essere un'assunzione circa le equiprobabilità). Molto piú tardi Einstein adottò, almeno in via di tentativo, una interpretazione frequenzialistica (della teoria quantistica).

Il seguente esempio può forse illustrare il fatto che le assunzioni di frequenza sono indispensabili anche quando possiamo essere propensi a farne a meno.

Immaginiamo una cascata. Possiamo distinguere alcuni strani tipi di regolarità: la grandezza delle correnti che compongono la cascata varia; e di tanto in tanto uno schizzo viene scagliato fuori della corrente principale; tuttavia, attraverso tutte queste variazioni, è visibile una certa regolarità che suggerisce fortemente un effetto statistico. Lasciando da parte alcuni problemi non risolti di idrodinamica (riguardanti la formazione dei vortici, ecc.) possiamo, in linea di principio, predire il cammino percorso da un certo volume d'acqua – ad esempio da un gruppo di molecole – con qualsiasi grado di precisione desideriamo, purché ci siano date condizioni iniziali sufficientemente precise. Cosí possiamo assumere che per ogni molecola sia possibile predire, molto a monte della cascata, in qual punto passerà sull'orlo della cascata stessa, dove raggiungerà il fondo, ecc. In questo modo è possibile calcolare, in linea di principio, il cammino di un qualsiasi numero di particelle; e, date condizioni iniziali sufficienti, dovremmo essere in grado, in linea di principio, di dedurre ciascuna delle fluttuazioni statistiche individuali della cascata. Ma in questo modo potremo ottenere soltanto questa o quella fluttuazione *individuale*, non le regolarità statistiche ricorrenti che abbiamo descritto, e ancor meno la distribuzione statistica generale in quanto tale. Al fine di spiegare queste cose, abbiamo bisogno di stime statistiche; o, almeno, dell'assunzione che certe condizioni iniziali ricorreranno sempre di nuovo per molti gruppi differenti di particelle (e ciò equivale ad un'asserzione universale). Otteniamo un risultato statistico se, e solo se, facciamo assunzioni statistiche specifiche di questo tipo – ad esempio, assunzioni che concernano la distribuzione di frequenza di condizioni iniziali ricorrenti.

71. *Asserzioni probabilistiche formalmente singolari.*

Dico che una asserzione probabilistica è «formalmente singolare» quando assegna una probabilità a un accadimento singolo, o a un elemento singolo di una certa classe di accadimenti [*1]; ad esempio, «la probabilità che al prossimo lancio di questo dado venga cinque è 1/6» oppure «la probabilità di ottenere cinque ad ogni singolo lancio (di questo dado) è 1/6». Dal punto di vista della teoria frequenziale, asserzioni siffatte vengono di regola considerate come non del tutto corrette quanto alla loro formulazione, perché le probabilità non possono essere assegnate ai singoli accadimenti, ma soltanto a sequenze infinite di accadimenti o di eventi. È facile, tuttavia, interpretare queste asserzioni come asserzioni corrette, definendo appropriatamente le probabilità formalmente singolari con l'aiuto del concetto di probabilità oggettiva o frequenza relativa. Uso «${}_{\alpha}P_k(\beta)$» per denotare la probabilità formalmente singolare che un certo accadimento k abbia la proprietà β, nel suo ufficio di elemento di una sequenza α; in simboli [1]: $k \epsilon \alpha$; e definiscono perciò la probabilità formalmente singolare come segue:

Def $$ {}_{\alpha}P_k(\beta) = {}_{\alpha}F(\beta) \quad (k \epsilon \alpha). $$

Questo può essere espresso, in parole, cosí: la probabilità formalmente singolare che l'evento k abbia la proprietà β – dato che k sia un elemento della sequenza α – è, per definizione, eguale alla probabilità della proprietà β entro la sequenza-riferimento α.

Questa semplice, quasi ovvia definizione, si dimostra sorprendentemente utile. Essa può anche aiutarci a chiarire alcuni intricati problemi della moderna teoria quantistica. (Cfr. §§ 75 e 76).

Come mostra la definizione, un'asserzione probabilistica formalmente singolare sarebbe incompleta se non definisse

[*1] Il termine «*formalistisch*» nel testo tedesco doveva suggerire l'idea di una asserzione singolare quanto alla forma (o «formalmente singolare») nonostante il suo significato possa in realtà essere definito da asserzioni statistiche.

[1] Il segno «... ε ...», detto anche copula, significa «... è un elemento della classe ...» oppure, «... è un elemento della sequenza ...»

esplicitamente una classe-riferimento. Ma sebbene spesso α non sia menzionata esplicitamente, di solito sappiamo, in tali casi, quale α si intenda. Cosí il primo esempio dato sopra non specifica nessuna sequenza-riferimento α, ma nondimeno è sufficientemente chiaro che si riferisce a tutte le sequenze di lanci con un dado non truccato.

In molti casi, per un evento k possono esserci parecchie sequenze-riferimento. In questi casi è forse fin troppo ovvio che intorno allo stesso evento si possono fare differenti asserzioni probabilistiche formalmente singolari. Cosí, la probabilità che un individuo k muoia in un dato periodo di tempo può assumere valori differenti secondo che consideriamo quest'individuo come membro di un gruppo definito dall'età, o come membro di un gruppo definito dall'occupazione, e cosí via. Non è possibile formulare una regola generale che dica quali delle molte classi-riferimento possibili si debbano scegliere. (Spesso si rivela piú adatta la classe-riferimento piú stretta, purché sia abbastanza numerosa da permettere alla stima di probabilità di basarsi su una ragionevole estrapolazione statistica e sia sostenuta da una quantità sufficiente di prove che la corroborino).

Non pochi dei cosiddetti paradossi della probabilità scompaiono appena ci rendiamo conto che a un solo e medesimo accadimento o evento, in quanto elemento di differenti classi-riferimento, possono essere assegnate probabilità differenti. Per esempio, qualche volta si è detto che la probabilità ${}_{\alpha}P_k(\beta)$ di un evento, *prima che questo accada*, è differente dalla probabilità dello stesso evento dopo che è accaduto: prima, tale probabilità può essere eguale a $1/6$, dopo può essere soltanto eguale a 1 o a 0. Naturalmente, questo punto di vista è completamente errato. ${}_{\alpha}P_k(\beta)$ è sempre la stessa sia prima sia dopo che l'evento è accaduto. Non è cambiato nulla, tranne che, sulla base dell'informazione $k \in \beta$ (o $k \in \bar{\beta}$) – informazione che possiamo ottenere osservando l'accadimento – possiamo scegliere una nuova classe-riferimento, cioè β (o $\bar{\beta}$) e poi chiederci quale sia il valore di ${}_{\beta}P_k(\beta)$. Il valore di questa probabilità è, naturalmente 1, proprio come ${}_{\bar{\beta}}P_k(\beta) = 0$. Le asserzioni che ci dànno informazioni sull'aver luogo effettivo dei singoli accadimenti – asserzioni che non riguardano una frequenza ma, piuttosto, la forma «$k \in \varphi$» – non possono cambiare la probabilità di questi accadimenti; comunque, possono suggerirci la scelta di un'altra classe-riferimento.

Il concetto di asserzione probabilistica formalmente singolare getta una specie di ponte verso la teoria *soggettivistica*, e perciò anche, come mostreremo nel paragrafo successivo, verso la teoria del campo. Infatti, seguendo Keynes, potremmo metterci d'accordo per interpretare la probabilità formalmente singolare come «grado di credenza razionale» purché ammettiamo che le nostre «credenze razionali» sono guidate da un'*asserzione* oggettiva *di frequenza*. È questa, dunque, l'informazione dalla quale dipendono le nostre credenze. In altre parole, può accadere che non sappiamo nulla di un evento, se non che appartiene a una certa classe-riferimento in cui è stata controllata con successo qualche stima probabilistica. Quest'informazione non ci mette in grado di predire quale sarà la proprietà dell'evento in questione; ma ci mette in grado di esprimere tutto ciò che sappiamo di essa mediante un'asserzione probabilistica formalmente singolare, che ha l'apparenza di una *predizione indefinita riguardante l'evento particolare in questione* [*2].

Dunque non faccio obiezioni all'interpretazione soggettivistica delle asserzioni probabilistiche concernenti eventi singoli, cioè alla loro interpretazione come predizioni indefinite: come confessioni, per cosí dire, della nostra insufficiente conoscenza del particolare evento in questione (circa il quale, peraltro, nulla segue da un'asserzione di frequenza). Non faccio alcuna obiezione finché si riconosca chiaramente che *le asserzioni di frequenza oggettiva sono fondamentali, perché sono le sole ad essere controllabili empiricamente*. Tuttavia rifiuto qualsiasi interpretazione di queste asserzioni probabilistiche formalmente singolari – di queste predizioni indefinite – come di asserzioni intorno a uno *stato di*

[*2] Attualmente io penso che la questione della relazione tra le varie interpretazioni della teoria della probabilità possa essere affrontata in un modo molto piú semplice: fornendo un sistema formale di assiomi o postulati, e provando che esso è soddisfatto dalle varie interpretazioni. Pertanto ritengo superate la maggior parte delle considerazioni fatte nel resto di questo capitolo (§§ 71 e 72). Cfr. appendice *IV, e i capitoli *II, *III, e *V del *Postscript* cit. Tuttavia, sono ancora d'accordo con la maggior parte di ciò che ho scritto, purché le mie «*classi-riferimento*» siano determinate dalle condizioni che definiscono l'esperimento, cosí che le «frequenze» possano essere considerate come il risultato di propensioni.

cose oggettivo, diverso dallo stato di cose statistico oggettivo. Mi riferisco qui al punto di vista secondo cui un'asserzione intorno alla probabilità $1/6$ nel giuoco dei dadi non è semplicemente una confessione che non conosciamo nulla di definito (teoria soggettivistica) ma è piuttosto un'asserzione sul lancio successivo – l'asserzione che il risultato di questo lancio è, al medesimo tempo, determinato e indeterminato. Qualcosa che, per il momento, è ancora *sub judice* [*3]. Considero errati tutti i tentativi di sostenere questo tipo di interpretazione oggettivistica (discussi esaurientemente, tra gli altri, da Jeans). Per quante arie indeterministiche si diano, tutte queste interpretazioni implicano l'idea metafisica che non soltanto possiamo dedurre e controllare predizioni, ma che, in aggiunta a ciò, la natura è piú o meno «determinata» (o «indeterminata»), cosicché il successo (o il fallimento) delle predizioni, dev'essere spiegato non già mediante le leggi dalle quali sono dedotte, ma al di là di queste, dal fatto che la natura è effettivamente costituita (o non costituita) in conformità con queste leggi [*4].

72. *La teoria del campo.*

Nel § 34 ho detto che un'asserzione falsificabile ad un grado piú alto di quello a cui è falsificabile un'altra asserzione, può essere descritta come la piú *improbabile* logicamente, mentre l'asserzione meno falsificabile può essere descritta come la piú *probabile* logicamente. L'asserzione meno probabile logicamente implica [*entails*] [1] quella logicamente piú

[*3] Ora non ho piú obiezioni da fare alla teoria secondo cui un evento può rimanere completamente indeterminato, e credo addirittura che la teoria della probabilità possa essere meglio interpretata come *teoria delle propensioni degli eventi* ad accadere in un modo o nell'altro. (Si veda il *Postscript* cit.). Tuttavia obietterei ancora al punto di vista secondo cui la teoria della probabilità *deve* essere interpretata cosí. Vale a dire, considero l'interpretazione in termini di propensione come una congettura intorno alla struttura del mondo.

[*4] Questa caratterizzazione, in certo senso denigratoria, si attaglia perfettamente alle mie proprie vedute, che ora discuto nell'«epilogo metafisico» del *Postscript*, sotto il titolo «L'interpretazione della probabilità in termini di propensione».

[1] Di solito (cfr. § 35).

probabile. Tra questo concetto di *probabilità logica* e quello di *probabilità numerica* oggettiva o formalmente singolare sussistono alcune affinità. Alcuni dei filosofi della probabilità (Bolzano, von Kries, Waismann) hanno tentato di basare il calcolo della probabilità sul concetto di campo [*range*] logico, e dunque sopra un concetto che (cfr. § 37) coincide con quello di probabilità logica; nel far ciò, hanno anche tentato di elaborare le affinità tra probabilità logica e probabilità numerica.

Waismann[2] ha proposto di misurare il grado di interrelazione tra i campi logici delle varie asserzioni (per cosí dire, i loro rapporti) per mezzo delle frequenze relative ad essi corrispondenti e di trattare cosí le frequenze come determinanti un *sistema di misura per i campi.* Penso che su questo fondamento sia possibile erigere una teoria della probabilità. In realtà possiamo dire che questo progetto equivale al correlare frequenze relative con certe «predizioni indefinite», come abbiamo fatto noi nel paragrafo precedente quando abbiamo definito le asserzioni probabilistiche formalmente singolari.

Si deve dire, tuttavia, che questo metodo di definire la probabilità è praticabile soltanto quando sia già stata costruita una teoria frequenziale. Altrimenti ci si dovrebbe chiedere in qual modo siano state a loro volta definite le frequenze usate nel definire il sistema di misura. Se tuttavia abbiamo già a nostra disposizione una teoria frequenziale, allora l'introduzione della teoria del campo diventa davvero superflua. Ma nonostante quest'obiezione io penso che la praticabilità della proposta di Waismann non sia affatto priva di significato. È soddisfacente trovare che una teoria piú comprensiva può colmare le lacune – che a prima vista apparivano incolmabili – tra i vari tentativi di affrontare il problema, specialmente tra l'interpretazione soggettivistica e quella oggettivistica. Tuttavia, la proposta di Waismann richiede una leggera modificazione. Il suo concetto di rapporto fra campi (cfr. § 48, nota 2) non presuppone soltanto che i campi possano essere confrontati con l'aiuto delle loro relazioni di sottoclasse (o con le loro relazioni di implicazione); essa presuppone anche, piú in generale, che anche i campi sovrapposti soltanto

[2] WAISMANN, *Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffes* cit., pp. 128 sg.

parzialmente (campi di asserzioni non-confrontabili) possano essere resi confrontabili. Quest'ultima asserzione, comunque, che implica considerevoli difficoltà, è superfiua. È possibile mostrare che nei casi in considerazione (quali i casi di disordine) il confronto tra le sottoclassi e quello tra le frequenze devono portare a risultati analoghi. Ciò giustifica la procedura consistente nel correlare frequenze a campi allo scopo di misurare questi ultimi. Nel far ciò rendiamo confrontabili le asserzioni in parola (che non sono confrontabili mediante il metodo della sottoclasse). Indicherò approssimativamente in qual modo si possa giustificare la procedura descritta.

Se tra due classi-proprietà, γ e β, vige la relazione di sottoclasse

$$\gamma \subset \beta$$

abbiamo:

$$(k)(Fsb(k \in \gamma) \geq Fsb(k \in \beta)) \qquad \text{(cfr. § 33)}$$

cosicché la probabilità logica o campo dell'asserzione $(k \in \gamma)$ sarà minore di, o eguale a, quella di $(k \in \beta)$. Sarà eguale soltanto se esiste una classe-riferimento α (che può essere la classe universale) rispetto alla quale vige la seguente regola, che si può dire abbia la forma di una «legge di natura»:

$$(x)((x \in (\alpha \,.\, \beta)) \rightarrow (x \in \gamma)).$$

Se non vale questa «legge di natura», cosicché da questo punto di vista possiamo assumere l'esistenza di disordine, allora vale la diseguaglianza. Ma in questo caso, purché α sia numerabile e possa essere accettata come sequenza-riferimento, otterremo

$${}_{\alpha}F(\gamma) < {}_{\alpha}F(\beta).$$

Ciò significa che, nel caso del disordine, un confronto tra campi deve necessariamente condurre alla stessa diseguaglianza a cui conduce un confronto tra frequenze relative. Di conseguenza, se abbiamo disordine, possiamo mettere in relazione le frequenze relative con i campi, allo scopo di rendere i campi misurabili. Ma questo è esattamente ciò che abbiamo fatto sia pure in modo indiretto nel § 71 quando abbiamo definito l'asserzione probabilistica formalmente singolare. In realtà, dalle assunzioni fatte, avremmo potuto immediatamente inferire che

$$ {}_{\alpha}P_{k}(\gamma) < {}_{\alpha}P_{k}(\beta). $$

Siamo cosí tornati al nostro punto di partenza: il problema dell'interpretazione della probabilità. Ed ora troviamo che il conflitto fra teorie oggettivistiche e teorie soggettivistiche, che all'inizio sembrava cosí ostinato, può essere eliminato completamente mediante una definizione abbastanza ovvia della probabilità formalmente singolare.

Capitolo nono

Alcune osservazioni sulla teoria dei quanti

La nostra analisi del problema della probabilità ci ha messo a disposizione strumenti che ora possiamo sottoporre a controllo, applicandoli a uno dei problemi-chiave della scienza moderna; con l'aiuto di questi strumenti tenterò di analizzare e di chiarificare alcuni dei punti piú oscuri della moderna teoria dei quanti.

Il mio tentativo, piuttosto audace, di affrontare con metodi filosofici o logici uno dei problemi centrali della fisica, è destinato a risvegliare i sospetti del fisico. Ammetto che il suo scetticismo è salutare e che i suoi sospetti sono ben fondati, ma nutro qualche speranza di poterli vincere. Frattanto, vale la pena di ricordare che in ogni branca della scienza possono spuntare nozioni che sono principalmente logiche. È un fatto che i fisici quantistici sono andati partecipando avidamente alle discussioni epistemologiche. Questo può essere un indizio del fatto che anche loro si rendono conto che la soluzione di alcuni dei problemi ancora insoluti della teoria dei quanti dev'essere cercata in quella terra di nessuno che giace tra la logica e la fisica.

Comincerò coll'enunciare anticipatamente le principali conclusioni che emergeranno dalla mia analisi.

1) Nella teoria dei quanti ci sono alcune formule matematiche che Heisenberg ha interpretato in termini del suo principio di indeterminazione, cioè come asserzioni intorno agli intervalli dell'indeterminazione dovuta ai limiti della precisione che possiamo ottenere con le nostre misurazioni. Tenterò di mostrare che queste formule devono essere interpretate come asserzioni probabilistiche formalmente singolari (cfr. § 71), e ciò significa che devono a loro volta venire interpretate statisticamente. Cosí interpretate, le formule in

questione asseriscono che *certe relazioni reggono tra certi intervalli di «distribuzione», o «varianza» o «dispersione» statistica.* (Le chiameremo, qui «relazioni statistiche di distribuzione»).

2) Tenterò anche di mostrare che misurazioni dotate di un grado di precisione piú alto di quello ammesso dal principio di indeterminazione non sono incompatibili con il sistema di formule della teoria dei quanti, o con la sua interpretazione statistica. Cosí, se mai dovessero diventare possibili misurazioni dotate di una tale precisione, non necessariamente la teoria dei quanti risulterebbe confutata.

3) L'esistenza di limiti della precisione che possiamo ottenere, esistenza che era stata asserita da Heisenberg, non sarebbe quindi una conseguenza logica deducibile dalle formule della teoria, ma, piuttosto, un'assunzione separata, o un'assunzione aggiunta.

4) Inoltre, come tenterò di mostrare, quest'assunzione aggiunta di Heisenberg *contraddice* di fatto le formule della teoria dei quanti, quando queste si interpretino statisticamente. Infatti, non solo con la teoria dei quanti sono compatibili misurazioni piú precise, ma è addirittura possibile descrivere esperimenti immaginari che mostrano la possibilità di misurazioni piú esatte. Secondo me, proprio questa contraddizione crea tutte quelle difficoltà che intralciano l'ammirevole struttura della moderna fisica quantistica al punto che Thirring poté dire che la teoria dei quanti «è rimasta un mistero impenetrabile per i suoi creatori, per loro stessa ammissione» [1].

Ciò che segue può forse essere descritto come un'indagine sui fondamenti della teoria dei quanti [2]. In quest'indagine e-

[1] H. THIRRING, *Die Wandlung des Begriffssystems der Physik* [La trasformazione del sistema concettuale della fisica] (in *Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften. Fünf Wiener Vorträge* [Crisi e ricostruzione nelle scienze esatte. Cinque conferenze viennesi], di Mark, Thirring, Hahn, Nobeling, Menger, Verlag Deuticke, Wien und Leipzig 1933, p. 30).

[2] Nelle pagine che seguono mi limiterò alla discussione dell'interpretazione della fisica quantistica, ma tralascerò i problemi riguardanti i campi d'onda (la teoria, dovuta a Dirac, dell'emissione e dell'assorbimento; la «seconda quantizzazione» delle equazioni di campo di Maxwell-Dirac). Menziono questa restrizione, perché ci sono qui problemi, come l'interpretazione dell'equivalenza tra un campo d'onda quantizzato e un gas corpuscolare, per cui i miei ragionamenti valgono (se valgono) solo se vengono adattati a questi problemi con molta cura.

viterò tutti i ragionamenti matematici e, con una sola eccezione, tutte le formule matematiche. La cosa è possibile perché non metterò in questione la correttezza del sistema delle formule matematiche della teoria dei quanti: mi occuperò soltanto delle conseguenze logiche della sua interpretazione fisica, che si deve a Born.

Per quanto riguarda la controversia sulla «causalità», mi propongo di dissentire dalla metafisica indeterministica, oggi cosí in voga. Ciò che la distingue dalla metafisica deterministica, in voga tra i fisici fino a poco tempo fa, non è tanto la sua maggiore lucidità, quanto piuttosto la sua maggiore sterilità.

Spesso le mie critiche sono severe, nell'interesse della chiarezza. Tanto vale, dunque, dire subito che considero i risultati raggiunti dai creatori della moderna teoria dei quanti, come uno dei piú grandi successi di tutta la storia della scienza [*1].

73. *Il programma di Heisenberg e le relazioni di indeterminazione.*

Quando tentò di fondare la teoria atomica su una base nuova, Heisenberg partí da un programma epistemologico [1]. Tale programma consisteva nello sbarazzare la teoria dagli «inosservabili», cioè dalle grandezze inaccessibili all'osservazione sperimentale; nello sbarazzarla, si potrebbe dire, da elementi metafisici. Tali grandezze inosservabili si trovavano davvero nella teoria di Bohr, che precedette la teoria dello stesso Heisenberg: alle orbite degli elettroni non corrispondeva nulla di osservabile sperimentalmente, e neppure alle

[*1] Né su questo punto, né sui punti principali della mia critica, ho cambiato opinione. Ma ho cambiato la mia interpretazione della teoria dei quanti, insieme con la mia interpretazione della teoria della probabilità. I miei punti di vista attuali si possono trovare nel *Postscript* cit., dove ragiono, indipendentemente dalla teoria quantistica, in favore dell'*indeterminismo*. Tuttavia, con l'eccezione del § 77 (che è fondato su un errore) considero ancora importante questo capitolo, e specialmente il § 76.

[1] W. HEISENBERG, in «Zeitschrift für Physik», 33 (1925), p. 879. Nelle pagine che seguono mi riferisco soprattutto all'opera di HEISENBERG, *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* [I princípi fisici della teoria dei quanti], 1930.

frequenze delle loro rivoluzioni (infatti le frequenze emesse, che si potevano osservare sotto forma di linee dello spettro, non si potevano identificare con le frequenze delle rivoluzioni degli elettroni). Eliminando queste grandezze inosservabili, Heisenberg sperava di riuscire a curare la teoria di Bohr dalle sue deficienze.

Tra questa situazione e quella che Einstein si trovò ad affrontare nel tentativo di reinterpretare l'ipotesi della contrazione di Lorentz-Fitzgerald, c'è una certa somiglianza. L'ipotesi della contrazione tentava di spiegare i risultati negativi dell'esperimento di Michelson e Morley facendo uso di grandezze inosservabili, quali i moti relativi all'etere immobile di Lorentz: facendo uso, cioè, di grandezze inaccessibili al controllo sperimentale. Sia in questo caso, sia in quello della teoria di Bohr, le teorie bisognose di riforma spiegavano certi processi naturali osservabili, ma entrambe facevano uso dell'assunzione, insoddisfacente, che esistono eventi fisici e grandezze definite fisicamente che la natura riesce a nasconderci rendendoli inaccessibili per sempre ai controlli dell'osservazione.

Einstein mostrò in qual modo fosse possibile eliminare gli elementi inosservabili contenuti nella teoria di Lorentz. Si potrebbe essere propensi a dire lo stesso della teoria di Heisenberg o, almeno, del suo contenuto matematico, ma sembra che ci sia ancora posto per alcuni miglioramenti. Neanche dal punto di vista dell'interpretazione che lo stesso Heisenberg ha dato della sua teoria sembra che questo programma sia stato portato a compimento. La natura riesce ancora a nasconderci, in modo estremamente astuto, alcune delle grandezze incorporate nella teoria.

Questo stato di cose è connesso con il cosiddetto *principio d'indeterminazione* enunciato da Heisenberg. Questo principio può forse essere spiegato nel modo che segue: ogni misurazione fisica implica uno scambio di energia tra l'oggetto misurato e l'apparato di misura (che può essere costituito dallo stesso osservatore). Ad esempio, se si dirige un raggio di luce sull'oggetto, può accadere che parte della luce dispersa, riflessa dall'oggetto, sia assorbita dall'apparato di misura. Qualsiasi scambio d'energia di questo genere altererà lo stato dell'oggetto che, dopo essere stato misurato, si troverà in uno stato differente da quello in cui si trovava prima di esserlo. Dunque la misurazione ci fornisce, per cosí dire, la conoscenza di uno stato che è stato appena distrutto dallo stesso processo di misurazione. Quest'interferenza del processo di misurazione coll'oggetto misurato può essere trascurata nel caso di oggetti macroscopici, ma non nel caso di oggetti atomici, perché questi ultimi possono essere fortemente influenzati, ad esempio, dal fatto di essere colpiti da raggi luminosi. Dai risultati della misurazione è dunque impossibile inferire lo stato preciso di un oggetto atomico immediatamente *dopo* che l'oggetto è stato misurato. *Dunque la misurazione non può servire come base per fare predizioni.* Indubbiamente è sempre possibile accertare, per mezzo di nuove misurazioni, lo stato dell'oggetto dopo la misurazione precedente, ma in questo modo si interferisce di nuovo con il sistema in un modo che non può essere calcolato. E indubbiamente è sempre possibile disporre le nostre misurazioni in maniera tale che certe caratteristiche dello stato che si deve misurare – ad esempio l'impulso della particella – non vengano disturbate. Ma ciò si può fare solo al prezzo di interferire ancor piú pesantemente con certe altre grandezze caratteristiche dello stato che si deve misurare (in questo caso con la posizione della particella). Se due grandezze stanno in questa relazione reciproca allora per esse vale il teorema che non possono essere misurate simultaneamente con precisione, anche se ciascuna di esse può essere misurata separatamente. Cosí, se aumentiamo la precisione di una delle due misurazioni – ad esempio, della misurazione dell'impulso p_x riducendo, in questo modo, l'intervallo di errore Δp_x – non possiamo fare a meno di rendere minore la precisione della misurazione della coordinata della posizione, x, cioè di allargare l'intervallo Δx. In questo modo la massima precisione ottenibile è, secondo Heisenberg, limitata dalla relazione di indeterminazione[2],

$$\Delta x . \Delta p_x \geq h/4\pi.$$

Relazioni simili valgono per le altre coordinate. La formula ci dice che il prodotto fra i due intervalli d'errore è almeno dell'ordine di grandezza di h, dove h è il quanto d'azione di Planck. Segue da questa formula che una misurazione com-

[2] Per la derivazione di questa formula cfr. § 75, nota 2.

pletamente precisa di una delle due grandezze si può ottenere solo al prezzo della completa indeterminazione dell'altra.

Secondo le relazioni d'indeterminazione di Heisenberg, ogni misurazione della posizione interferisce con la misurazione della componente corrispondente dell'impulso. Dunque è in linea di principio impossibile predire *la traiettoria di una particella.* «Nella nuova meccanica il concetto "traiettoria" non ha alcun significato definito...»[3].

Ma a questo punto sorge la prima difficoltà. La relazione di indeterminazione vale soltanto per le grandezze (caratteristiche di stati fisici) che appartengono alla particella dopo che è stata compiuta la misurazione. La posizione e l'impulso di un elettrone *fino all'istante della misurazione* possono, in linea di principio, essere accertati con precisione illimitata. Ciò segue dallo stesso fatto che, dopo tutto, è possibile eseguire in successione parecchie operazioni di misurazione. Di conseguenza, combinando tra loro i risultati di: *a*) due misurazioni della posizione, *b*) una misurazione della posizione preceduta dalla misurazione dell'impulso e, *c*) una misurazione della posizione, seguita dalla misurazione dell'impulso, sarebbe possibile calcolare, con l'aiuto dei dati ottenuti, le coordinate precise della posizione e dell'impulso per l'intiero periodo di tempo che intercorre *tra* le due misurazioni. (Per cominciare, possiamo limitare le nostre considerazioni soltanto a questo periodo[4]). Ma, secondo Heisenberg, questi calcoli precisi non servono a far previsioni: è perciò impossibile sottoporli a controllo. Ciò accade perché i calcoli sono validi, per la traiettoria percorsa fra i due esperimenti, solo se il secondo è il successore immediato del primo, nel senso che tra il primo e il secondo non ha avuto luogo nessuna interferenza. Qualsiasi controllo si possa disporre, allo scopo di riscontrare la traiettoria percorsa fra i due esperimenti, è destinato a disturbare la traiettoria al punto che il calcolo della traiettoria esatta diventa non valido. Di questi calcoli esatti Heisenberg dice: «... è una pura e semplice questione

[3] MARCH, *Die Grundlagen der Quantenmechanik* cit., p. 55.

[4] Nel § 77 e nell'appendice VI mostrerò dettagliatamente che in certe circostanze il caso *b*) ci metterà in grado di calcolare il passato dell'elettrone *prima* che sia eseguita la prima misurazione. (La citazione successiva di Heisenberg sembra alludere a questo fatto). * Ora considero errata questa nota, come del resto il § 77.

di gusti, se si debba attribuire o no una qualsiasi realtà fisica alla storia passata, che si è calcolata, dell'elettrone»[5]. Con ciò intende chiaramente dire che questi calcoli incontrollabili della traiettoria sono privi di ogni significato dal punto di vista del fisico. Schlick commenta questo passo di Heisenberg come segue: «Io mi sarei espresso con forza ancora maggiore, in completo accordo con i punti di vista fondamentali degli stessi Bohr e Heisenberg, punti di vista che ritengo incontestabili. Se un'asserzione riguardante la posizione di un elettrone a livello delle dimensioni atomiche non è verificabile, allora non possiamo attribuirle alcun senso: diventa impossibile parlare della "traiettoria" di una particella fra due punti nei quali è stata osservata»[6]. (Osservazioni simili si possono trovare in March[7], Weyl[8], e in altri autori).

Tuttavia, secondo quanto siamo appena venuti a sapere, *è possibile calcolare*, nei termini del nuovo formalismo, una simile traiettoria «insensata» o metafisica. E ciò mostra che Heisenberg non è riuscito a completare il proprio programma. Questo stato di cose, infatti, consente solo due interpretazioni. La prima sarebbe che la particella ha una posizione e un impulso esatti (e perciò ha anche una traiettoria esatta) ma che è impossibile per noi calcolarli entrambi simultaneamente. Se le cose stanno cosí, la natura è ancora decisa a nascondere ai nostri occhi certe grandezze fisiche: non la posizione, e neppure l'impulso della particella, ma la combinazione di queste due grandezze: la «*posizione piú l'impulso*», ossia la «traiettoria». Quest'interpretazione considera il principio d'indeterminazione come una limitazione della nostra conoscenza: è dunque un'interpretazione *soggettivistica.* L'altra interpretazione possibile, che è l'interpretazione *oggettivistica*, asserisce che è inammissibile, o scorretto, o metafisico, attribuire alla particella qualcosa come una «posizione piú impulso», o «traiettoria» esattamente definita: semplicemente, la particella non *ha* traiettoria, ma solo o una posizione esatta combinata con un impulso inesatto, o un im-

[5] HEISENBERG, *Physikalischen Prinzipien* cit., p. 15.

[6] SCHLICK, *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik* cit., p. 159.

[7] MARCH, *Die Grundlagen der Quantenmechanik* cit., *passim* (ad esempio, pp. 1 sg. e 57).

[8] WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* cit., 1931^2, p. 68 (cfr. l'ultima citazione del § 75: «... il significato di questi concetti...»)

pulso esatto combinato con una posizione inesatta. Ma se accettiamo quest'interpretazione, allora il formalismo della teoria contiene di nuovo elementi metafisici, perché, come abbiamo visto, una «traiettoria», o «posizione piú impulso», della particella è calcolabile esattamente per quei periodi di tempo durante i quali è in linea di principio impossibile controllare il calcolo mediante l'osservazione.

È illuminante vedere come i campioni della relazione d'indeterminazione oscillino tra l'approccio soggettivistico e quello oggettivistico. Ad esempio Schlick, immediatamente dopo aver sostenuto (come abbiamo visto) il punto di vista oggettivistico, scrive: «Degli eventi naturali in se stessi è impossibile asserire sensatamente cose come "nebulosità" o "inaccuratezza". Cose di questo genere possono andar bene solo per i nostri pensieri (piú in particolare, se non sappiamo quali asserzioni... siano vere)»: è chiaro che quest'obiezione è diretta *contro* quella stessa interpretazione oggettivistica la quale assume che ad essere «confuso» o «imbrattato»[*1] dal fatto che se ne misuri la posizione con esattezza, non è la nostra conoscenza, ma l'impulso della particella. Oscillazioni simili sono evidenti anche in molti altri autori. Ma sia che si decida in favore del punto di vista oggettivistico, sia che si decida in favore di quello soggettivistico, rimane il fatto che il programma di Heisenberg non è stato portato a termine, e che Heisenberg stesso non è riuscito nel compito, che si era imposto, di espellere tutti gli elementi metafisici dalla teoria atomica. Pertanto non si guadagnerà proprio nulla tentando, come fa Heisenberg, di fondere tra loro le due interpretazioni opposte mediante un'osservazione del genere: «... una fisica "oggettiva" in questo senso – nel senso cioè di una netta distinzione del mondo in oggetto e soggetto – non è piú possibile»[9]. Finora Heisenberg non è riuscito a portare a termine il compito che si era imposto: non ha ancora purificato la teoria dei quanti dai suoi elementi metafisici.

*1 L'espressione «imbrattato» è dovuta a Schrödinger. Il problema dell'esistenza o della non esistenza obiettive di una «traiettoria» – sia questa «imbrattata», o sia semplicemente conosciuta in modo incompleto – è, credo, fondamentale. La sua importanza è stata messa in evidenza dall'esperimento di Einstein, Podolsky e Rosen, discusso nelle appendici *XI e *XII.

9 HEISENBERG, *Physikalischen Prinzipien* cit., p. 49.

74. *Breve schizzo dell'interpretazione statistica della teoria dei quanti.*

Nella sua derivazione delle relazioni di indeterminazione, Heisenberg segue Bohr quando fa uso dell'idea secondo cui i processi atomici possono essere rappresentati egualmente bene sia dall'«immagine di una particella nel senso della teoria dei quanti», sia «dall'immagine di un'onda, nel senso della teoria dei quanti».

Quest'idea è connessa col fatto che la moderna teoria dei quanti è progredita lungo due strade differenti. Heisenberg partí dalla teoria corpuscolare classica dell'elettrone, che reinterpretò secondo la teoria dei quanti, mentre Schrödinger prese le mosse dalla (altrettanto classica) teoria ondulatoria di de Broglie: fece corrispondere a ciascun elettrone un «pacco d'onde», cioè un gruppo di oscillazioni che, per interferenza, si rafforzano vicendevolmente in una piccola regione, e si smorzano a vicenda fuori di essa. Piú tardi Schrödinger mostrò che la sua meccanica ondulatoria conduceva a risultati matematicamente equivalenti a quelli della meccanica corpuscolare di Heisenberg.

Il paradosso dell'equivalenza di due immagini cosí fondamentalmente differenti come quella corpuscolare e quella ondulatoria fu risolto dall'interpretazione statistica delle due teorie, interpretazione che è opera di Born. Born mostrò che anche la teoria ondulatoria può essere considerata come una teoria corpuscolare: infatti l'equazione d'onda di Schrödinger può essere interpretata in modo tale che ci dia la *probabilità di trovare la particella* in una qualsiasi regione data dello spazio. (La probabilità è determinata dal quadrato dell'ampiezza d'onda: è grande all'interno del pacco d'onde dove le onde si rafforzano vicendevolmente, e si annulla fuori di essa).

Che la teoria dei quanti dovesse essere interpretata *statisticamente*, era suggerito da vari aspetti dell'orizzonte dei suoi problemi. Il suo compito piú importante – la deduzione degli spettri atomici – dovette essere considerato come un compito *statistico* fin dai tempi dell'ipotesi einsteiniana dei fotoni (o quanti di luce); infatti quest'ipotesi interpretava gli effetti osservati della luce come fenomeni di massa: come fenomeni, cioè, dovuti all'incidenza di molti fotoni. «Sotto la guida dell'esperienza, i metodi sperimentali della fisica atomica sono... giunti ad occuparsi esclusivamente di questioni statistiche. La meccanica quantistica, che fornisce la teoria sistematica delle regolarità osservate, corrisponde per tutti gli aspetti allo stato presente della fisica sperimentale, perché fin dall'inizio si limita a questioni statistiche e a risposte statistiche»[1].

Solo nella sua applicazione a problemi di fisica atomica la teoria quantistica ottiene risultati che differiscono da quelli della meccanica classica. Nella sua applicazione a processi macroscopici, le sue formule dànno risultati che si approssimano strettamente a quelli della meccanica classica. «Secondo la teoria quantistica, le leggi della meccanica classica sono valide se vengono considerate come asserzioni intorno alle relazioni fra due medie statistiche», dice March[2]. In altre parole le formule classiche possono essere dedotte sotto forma di macroleggi.

In certe esposizioni si tenta di *spiegare* l'interpretazione statistica della teoria dei quanti col fatto che la precisione che si può ottenere nel misurare grandezze fisiche è limitata dalle relazioni di indeterminazione di Heisenberg. Si conclude che, *a causa di questa indeterminazione* delle misurazioni relative a qualsiasi esperimento atomico, «... il risultato non sarà, in generale, determinato: cioè che se l'esperimento sarà ripetuto parecchie volte in condizioni identiche, si potranno ottenere parecchi risultati differenti. Se l'esperimento verrà ripetuto un gran numero di volte si troverà che ciascun risultato particolare si ottiene in una frazione definita del numero totale delle volte, cosí che si può dire che tutte le volte che si compie l'esperimento c'è una probabilità definita di ottenerlo» (Dirac)[3]. Anche March scrive, riferendosi alla relazione di indeterminazione: «tra il presente e il futuro val-

[1] BORN e JORDAN, *Elementare Quantenmechanik* cit., pp. 322 sg.

[2] MARCH, *Die Grundlagen der Quantenmechanik* cit., p. 170.

[3] DIRAC, *Quantum Mechanics* cit., p. 10. * (Dalla 1ª ed.). Un passo parallelo, un po' piú enfatico, si trova a p. 14 della 3ª ed.: «... in generale il risultato non sarà determinato; cioè: se si ripete l'esperimento diverse volte, in condizioni identiche, si potranno ottenere parecchi risultati differenti. È però una legge di natura che se si ripete l'esperimento per un gran numero di volte, ciascun risultato particolare sarà ottenuto in una frazione definita del numero totale di volte, cosicché c'è una *probabilità* ben definita di ottenere il risultato».

gono... solo relazioni di probabilità; da ciò diventa chiaro che il carattere della nuova meccanica dev'essere quello di una teoria statistica»[4].

Non penso che quest'analisi delle relazioni fra le formule d'indeterminazione e l'interpretazione statistica della teoria quantistica sia accettabile. Mi sembra che la relazione logica sia esattamente contraria, dal momento che possiamo derivare le formule d'indeterminazione dall'equazione d'onda di Schrödinger (che dev'essere interpretata statisticamente), ma non possiamo derivare quest'ultima dalle formule d'indeterminazione. Se vogliamo tenere nel conto dovuto queste relazioni di derivabilità, dobbiamo rivedere l'interpretazione delle formule d'indeterminazione.

75. *Una reinterpretazione statistica delle formule d'indeterminazione.*

Dopo Heisenberg si accetta come un fatto incontestabile che qualsiasi misurazione simultanea di posizione e d'impulso dotata di una precisione superiore a quella permessa dalle relazioni d'indeterminazione contraddica la teoria quantistica. Si crede che la «proibizione» di misurazioni esatte possa essere derivata logicamente dalla teoria dei quanti o dalla meccanica ondulatoria. Da questo punto di vista la teoria dovrebbe considerarsi falsificata se si potessero portare a termine esperimenti che dessero come risultato misurazioni di «accuratezza vietata»[1].

Io credo che questo punto di vista sia falso. È innegabilmente vero che le formule di Heisenberg ($\Delta x . \Delta p_x \geq h/4\pi$,

[4] MARCH, *Die Grundlagen der Quantenmechanik* cit., p. 3.

[1] Mi astengo dal criticare qui il punto di vista, molto diffuso e piuttosto ingenuo, secondo cui le argomentazioni di Heisenberg forniscono la prova conclusiva dell'impossibilità di tutte queste misurazioni. Cfr. ad esempio, JEANS, *The New Background of Science* [Il nuovo sfondo della scienza], 1933, p. 233; 1934², p. 237: «La scienza non ha trovato vie d'uscita da questo dilemma. Al contrario: ha provato che non c'è via d'uscita». Naturalmente, è chiaro che una prova del genere non potrà mai essere fornita, e che il principio di indeterminazione potrebbe, nel migliore dei casi, essere deducibile dalle ipotesi della meccanica quantistica e della meccanica ondulatoria, e potrebbe essere confutato empiricamente insieme con tali ipotesi. In una questione come questa, è facile essere indotti in errore da asserzioni plausibili come quella fatta da Jeans.

ecc.) risultano, come conclusioni logiche, dalla teoria[2]; ma l'*interpretazione* di queste formule come regole che limitano la precisione raggiungibile nelle misurazioni, nel senso di Heisenberg, non segue dalla teoria. Perciò non è possibile che misurazioni piú esatte di quelle permesse secondo Heisenberg contraddicano logicamente la teoria quantistica, o la meccanica ondulatoria. Di conseguenza traccerò una netta linea di distinzione tra le *formule,* che chiamerò per brevità le «formule di Heisenberg», e la loro *interpretazione* – anch'essa dovuta a Heisenberg – come relazioni d'indeterminazione, cioè come asserzioni che impongono *limitazioni alla precisione che possiamo raggiungere nelle nostre misurazioni.*

Nel dedurre matematicamente le formule di Heisenberg si deve impiegare l'equazione d'onda o qualche assunzione equivalente: un'assunzione, cioè, che (come abbiamo visto nel paragrafo precedente) possa essere *interpretata statisticamente.* Ma se si adotta quest'interpretazione, non c'è dubbio che la descrizione di una particella singola per mezzo di un pacco d'onde non è altro che un'*asserzione probabilistica formalmente singolare* (cfr. § 71). Come abbiamo visto l'ampiezza d'onda determina la probabilità di captare la particella in un certo luogo: e proprio questa specie di asserzioni probabilistiche – quella specie, cioè, che fa riferimento a una singola particella (o a un singolo evento) – abbiamo chiamato «formalmente singolari». Se si accetta l'interpretazione statistica della teoria quantistica, allora si è costretti ad interpretare a loro volta quelle asserzioni che, come le formule di Heisenberg, possono essere derivate dalle asserzioni di probabilità formalmente singolari della teoria, come asserzioni di probabilità, e nel caso che valgano per una singola particella, ancora come asserzioni formalmente singolari. Anch'esse, perciò, devono essere interpretate in ultima analisi come *asserzioni statistiche.*

Contro l'interpretazione soggettivistica: «Quanto maggiore è la precisione con cui misuriamo la posizione di una particella, tanto meno sappiamo del suo impulso», propongo di accettare, come interpretazione fondamentale delle relazioni di indeterminazione, un'interpretazione oggettivistica e

[2] Weyl fornisce una deduzione logica rigorosa: *Gruppentheorie und Quantenmechanik* cit., pp. 68 e 345.

statistica. Tale interpretazione può essere espressa, piú o meno, nel modo che segue. Dato un aggregato di particelle e una selezione (nel senso di separazione fisica) di quelle particelle che, in un certo istante e con un certo grado di precisione dato, hanno una certa posizione x, troveremo che i loro impulsi p_x mostrano una distribuzione a casaccio; l'intervallo di dispersione Δp_x sarà perciò tanto maggiore quanto minore avremo reso l'intervallo di dispersione, o di imprecisione, permesso alle posizioni. E, viceversa: se selezioniamo, o separiamo, quelle particelle i cui impulsi p_x cadono tutti all'interno di un intervallo prefissato, Δp_x, troveremo che le loro posizioni si distribuiscono a casaccio, all'interno di un intervallo Δx che sarà tanto maggiore quanto piú piccolo avremo reso Δp_x, cioè l'intervallo di dispersione o di imprecisione concesso agli impulsi. E infine, se tentiamo di selezionare quelle particelle che hanno sia la proprietà Δx, sia la proprietà Δp_x, avremo la possibilità fisica di compiere tale selezione – la possibilità cioè di separare fisicamente le particelle – solo se entrambi gli intervalli saranno resi sufficientemente grandi da soddisfare l'equazione $\Delta x . \Delta p_x \geq h/4\pi$. Secondo quest'interpretazione oggettivistica, le formule di Heisenberg asseriscono che certe relazioni reggono tra certi intervalli di dispersione; quando vengano interpretate in questo modo, mi riferirò a queste formule come alle «*relazioni statistiche di dispersione*» [*1].

Finora, nella mia interpretazione statistica, non ho fatto menzione della *misurazione*: mi sono riferito ad essa solo come alla *selezione fisica* [3]. È ora necessario chiarificare la relazione fra questi due concetti.

Parlo di selezione o di separazione fisica se, ad esempio, da una corrente di particelle escludiamo, per mezzo di uno

[*1] Sostengo ancora l'interpretazione oggettivistica spiegata qui, ma con un importante cambiamento. Dove, in questo capoverso, parlo di «un aggregato di particelle», parlerei ora di un «aggregato – o sequenza – di ripetizioni di un esperimento intrapreso con *una sola* particella (o *un solo* sistema di particelle)». Analogamente, nei capoversi seguenti: ad esempio, il «raggio» di particelle dovrebbe essere reinterpretato come consistente di ripetuti esperimenti con una (o piú d'una) particella, selezionata escludendo con uno schermo, o chiudendo fuori, le particelle indesiderate.

[3] Tra gli altri, anche Weyl parla di «selezioni»; cfr. *Gruppentheorie und Quantenmechanik* cit., pp. 67 sgg., ma, a differenza di quanto faccio io, non contrappone misurazione e selezione.

schermo, tutte le particelle eccetto quelle che passano attraverso una stretta apertura Δx, cioè attraverso un intervallo Δx, concesso alla loro posizione. E dirò che le particelle appartenenti al raggio cosí isolato sono state selezionate fisicamente, o tecnicamente, secondo la loro proprietà Δx. Solo questo processo, o il suo risultato, il raggio di particelle isolato fisicamente o tecnicamente, descrivo col nome di «selezione fisica», per distinguerla da una selezione puramente «mentale» o «immaginaria», come quella che compiamo quando parliamo della classe di tutte quelle particelle che sono passate, o passeranno, attraverso l'intervallo Δp; cioè, di una classe che rientra in una classe di particelle piú larga, da cui non è stata esclusa fisicamente mediante uno schermo.

Ora, ogni selezione fisica può essere naturalmente considerata come una *misurazione* e può essere di fatto usata come tale[4]. Se ad esempio selezioniamo un raggio di particelle escludendo o chiudendo fuori mediante uno schermo tutte quelle particelle che non passano attraverso un intervallo di posizione («selezione secondo il luogo») e se in seguito misuriamo l'impulso di una di queste particelle, possiamo considerare la selezione secondo il luogo come una misurazione di posizione, perché da essa veniamo a sapere che la particella è passata attraverso una certa posizione (anche se può darsi che qualche volta non sappiamo, o impariamo soltanto da un'altra misurazione, *quando* la particella si trovasse in quel luogo). D'altra parte, non dobbiamo considerare ogni misurazione come una selezione fisica. Immaginiamo, ad esempio un raggio monocromatico di elettroni che viaggia nella direzione x. Usando un contatore Geiger possiamo registrare quegli elettroni che arrivano a una certa posizione. Mediante gli intervalli di tempo che intercorrono fra gli impatti degli elettroni sul contatore possiamo anche misurare intervalli spaziali: cioè a dire, misuriamo la posizione degli elettroni nella direzione x fino al momento dell'impatto. Ma quando prendiamo queste misure non compiamo una selezione fisica delle particelle secondo la loro posizione nella direzione x. (E in realtà queste misurazioni daranno in generale co-

[4] Per «misurazione» intendo, in conformità coll'uso linguistico accettato dai fisici, non soltanto le operazioni dirette di misurazione, ma anche misurazioni ottenute in via indiretta, per mezzo del calcolo (in fisica queste sono, praticamente, le uniche misurazioni che incontriamo).

me risultato una distribuzione completamente casuale delle posizioni nella direzione x).

Dunque, nella loro applicazione fisica, le nostre relazioni statistiche di dispersione mettono capo a questo. Se si tenta, con qualsiasi mezzo fisico, di ottenere *un aggregato di particelle il piú omogeneo possibile*, questo tentativo incontrerà una barriera ben definita in queste relazioni di dispersione. Ad esempio, per mezzo di una selezione fisica possiamo ottenere un raggio monocromatico piano, cioè un raggio composto di elettroni di eguale impulso. Ma se tentiamo di rendere ancor piú omogeneo questo aggregato di elettroni – ad esempio escludendone una parte mediante uno schermo – in modo da ottenere elettroni che non solo hanno il medesimo impulso, ma sono anche passati attraverso qualche stretta fessura che determina un intervallo di posizione Δx, siamo destinati a fallire. E falliamo perché qualsiasi selezione secondo la posizione delle particelle equivale a un'interferenza col sistema, interferenza che avrà come risultato un aumento nella dispersione delle componenti dell'impulso p_x, cosicché la dispersione aumenterà (d'accordo con la legge espressa dalla formula di Heisenberg) con il restringersi della fessura. E inversamente: dato un raggio che è stato selezionato secondo la posizione facendolo passare attraverso una fessura, se tentiamo di renderlo «parallelo» (o «piano») e monocromatico, dobbiamo distruggere la selezione secondo la posizione, dal momento che non possiamo evitare di aumentare la larghezza del raggio. (Nel caso ideale, ad esempio se i componenti p_x delle particelle devono diventare tutti eguali a 0, la larghezza dovrebbe diventare infinita). Se l'omogeneità di una selezione è stata accresciuta fin dove è possibile (cioè, fin dove lo permettono le formule di Heisenberg, in modo che il segno d'eguaglianza in queste formule diventa valido) allora questa selezione può essere chiamata *un caso puro*[5].

[5] Il termine è dovuto a Weyl (in «Zeitschrift für Physik», 46, 1927, p. 1) e a J. von Neumann (in «Göttinger Nachrichten», 1927, p. 245). Se, seguendo Weyl (*Gruppentheorie und Quantenmechanik* cit., p. 70; cfr. anche BORN e JORDAN, *Elementare Quantenmechanik* cit., p. 315) caratterizziamo il caso puro come un caso «... che è impossibile produrre mediante una combinazione di due collezioni statistiche differenti da esso», allora non necessariamente i casi puri che soddisfano questa descrizione devono essere selezioni pure secondo l'impulso o il luogo. Si potrebbero produrre, ad esempio, se si effettuasse una selezione secondo il luogo con qualche grado scelto di

Usando questa terminologia possiamo formulare cosí la relazione statistica di dispersione: «Non esiste aggregato di particelle piú omogeneo di un caso puro» *2.

Fino ad oggi non è stato tenuto sufficientemente conto del fatto che alla derivazione matematica delle formule di Heisenberg dalle equazioni fondamentali della teoria dei quanti deve corrispondere, precisamente, una derivazione dell'*interpretazione* delle formule di Heisenberg dall'*interpretazione* di queste equazioni fondamentali. Ad esempio, March ha descritto la situazione nel modo esattamente contrario (come è stato indicato nel paragrafo precedente): l'interpretazione statistica della teoria dei quanti appare, nella sua presentazione, come una conseguenza della limitazione imposta da Heisenberg sulla precisione che possiamo raggiungere. D'altra parte Weyl fornisce una rigorosa derivazione delle formule di Heisenberg dall'equazione d'onda, che egli interpreta in termini statistici. Tuttavia interpreta le formule di Heisenberg – che ha appena derivato da una premessa interpretata statisticamente – come limitazioni della precisione che possiamo ottenere. E ciò, nonostante si renda conto del fatto che per certi aspetti la sua interpretazione delle formule va contro l'interpretazione statistica di Born. Infatti, secondo Weyl, l'interpretazione di Born è sottoposta a «una correzione» alla luce delle relazioni di indeterminazione. «Non è che la posizione e la velocità di una particella siano sottoposte alle leggi statistiche mentre le si determina con precisione in ogni caso singolo. Piuttosto, lo stesso significato di questi concetti dipende dalle misurazioni necessarie per accertarli, e la misurazione esatta della posizione ci priva della possibilità di accertare la velocità» [6].

Il conflitto, di cui Weyl si è reso conto, tra l'interpretazione statistica della teoria dei quanti e le limitazioni imposte da Heisenberg sulla precisione raggiungibile, esiste davvero,

precisione, e quella secondo l'impulso fosse compiuta col massimo di precisione che ci è dato di ottenere.

*2 Nel senso della nota *1 questa formulazione dovrebbe, naturalmente, essere riespressa nel modo seguente: «Non esiste disposizione sperimentale capace di produrre un aggregato, o una sequenza di esperimenti che risulti piú omogenea di un caso puro».

[6] WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* cit., p. 68. * Il capoverso citato qui sembra essere stato omesso nella traduzione inglese.

ma è piú acuto di quanto non pensi Weyl. Non solo è impossibile derivare, dall'equazione d'onda interpretata statisticamente, le limitazioni della precisione ottenibile, ma il fatto (che io devo ancora dimostrare) che né gli esperimenti possibili, né i risultati sperimentali effettivamente ottenuti, concordino con l'interpretazione di Heisenberg, può essere considerato come un argomento decisivo, come una specie di *experimentum crucis* in favore dell'interpretazione statistica della teoria dei quanti.

76. *Tentativo di eliminare gli elementi metafisici invertendo il programma di Heisenberg. Applicazioni.*

Se partiamo dal presupposto che le formule peculiari alla teoria dei quanti siano ipotesi probabilistiche, e perciò asserzioni statistiche, è difficile vedere come da una teoria statistica che abbia questo carattere sia possibile dedurre proibizioni degli eventi singoli (tranne forse che nei casi in cui la probabilità è eguale a uno o a zero). La credenza secondo cui misurazioni singole possono contraddire le formule della fisica quantistica sembra insostenibile logicamente, tanto insostenibile quanto la credenza che un giorno si potrà scoprire una contraddizione fra un'asserzione probabilistica formalmente singolare ${}_{\alpha}P_k(\beta) = p$ (cioè, «la probabilità che il lancio k darà come risultato un cinque è eguale a $\frac{1}{6}$») e una delle due asserzioni seguenti: $k \in \beta$ («il lancio ha dato, di fatto, un cinque») o $k \in \overline{\beta}$ («il lancio non ha dato, di fatto, un cinque»).

Queste semplici considerazioni ci forniscono un mezzo per confutare qualsiasi delle cosiddette prove escogitate per mostrare che misurazioni esatte di posizione e di impulso contraddirebbero la teoria quantistica; o, forse, escogitate per mostrare che la semplice assunzione che misurazioni di questo genere siano fisicamente possibili conduce necessariamente a contraddizioni nell'ambito della teoria. Infatti qualsiasi prova del genere deve far uso di considerazioni di teoria dei quanti applicate a particelle *singole*, il che significa che deve far uso di asserzioni probabilistiche formalmente singolari e, inoltre, che dev'essere possibile tradurre la prova – per cosí dire parola per parola – nel linguaggio statistico. Se ci proviamo a farlo, troviamo che non c'è contraddizione fra le singole misurazioni, che si assume siano precise, e la teoria quantistica nella sua interpretazione statistica. C'è solo una contraddizione apparente fra queste misurazioni precise e certe asserzioni probabilistiche formalmente singolari della teoria. (Nell'appendice v prenderemo in esame un esempio di questo tipo di prova).

Ma mentre è sbagliato dire che la teoria dei quanti *esclude* misurazioni esatte, è tuttavia corretto dire che dalle formule caratteristiche della teoria dei quanti – purché le si interpreti statisticamente – *non si può derivare nessuna predizione singolare precisa.* (Tra le formule peculiari alla teoria dei quanti non annovero né la legge di conservazione dell'energia né la legge di conservazione dell'impulso).

Ciò accade perché, se teniamo conto delle relazioni di dispersione, non possiamo non fallire, piú in particolare, nel tentativo di produrre condizioni iniziali precise manipolando sperimentalmente il sistema (cioè, compiendo quella che abbiamo chiamato una selezione fisica). Ora, è vero che la tecnica normale dello sperimentatore consiste nel *produrre* o *costruire* condizioni iniziali; e questo ci permette di derivare dalle nostre relazioni statistiche di dispersione il teorema – che, comunque, vale soltanto per questa tecnica sperimentale «*costruttiva*» – che dalla teoria dei quanti non possiamo ottenere predizioni singolari, ma soltanto predizioni frequenziali [1].

Questo teorema riassume il mio atteggiamento nei confronti di tutti quegli esperimenti immaginari discussi da Heisenberg (che in questo caso segue largamente Bohr) allo scopo di provare che è impossibile compiere misurazioni dotate di una precisione che sia vietata dal suo principio di indeterminazione. Il punto è, in ogni caso, il medesimo: la dispersione statistica rende impossibile *predire* quale sarà la traiettoria della particella dopo l'operazione di misurazione.

Potrebbe certo sembrare che con la nostra reinterpretazione del principio di indeterminazione non si sia guadagnato gran che. Perché, nelle linee generali, anche Heisenberg non asserisce (come ho tentato di mostrare) niente di piú se non

[1] Il termine «tecnica sperimentale costruttiva» è usato da WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* cit., p. 67.

che le nostre *predizioni* sono sottoposte al suo principio; e poiché su questo argomento io sono, fino a un certo punto, d'accordo con lui, potrebbe sembrare che invece di dibattere qualche punto sostanziale io non faccia altro che litigare sulle parole. Ma ciò non renderebbe affatto giustizia alla mia argomentazione. In verità, io penso che il punto di vista di Heisenberg e il mio siano diametralmente opposti. Ciò verrà mostrato diffusamente nel prossimo paragrafo. Nel frattempo tenterò di risolvere le tipiche difficoltà inerenti all'interpretazione di Heisenberg, e tenterò di chiarire in che modo, e perché, queste difficoltà sorgano.

In primo luogo dobbiamo esaminare la difficoltà per la quale, come abbiamo visto, il programma di Heisenberg vacilla. È il fatto che nel formalismo compaiono asserzioni precise di posizione piú impulso, o, in altre parole, calcoli esatti di una traiettoria (cfr. § 73) la cui realtà fisica Heisenberg è costretto a lasciare in dubbio, mentre altri, come Schlick, la negano senz'altro. Ma gli esperimenti in questione, *a*), *b*) e *c*) (cfr. § 73), possono essere interpretati tutti in termini statistici. Ad esempio, la combinazione *c*) – cioè una misurazione di posizione seguita da una misurazione d'impulso – può essere realizzata da un esperimento come il seguente. Selezioniamo un raggio, secondo la posizione, con l'aiuto di un diaframma dotato di una stretta fenditura (misurazione di posizione). Poi misuriamo l'impulso di quelle particelle che, passando dalla fenditura, viaggiano in una direzione definita. (Naturalmente questa seconda misurazione produrrà una nuova dispersione di posizioni). I due esperimenti, insieme, determineranno con precisione la traiettoria di tutte quelle particelle che appartengono alla seconda selezione, in quanto questa traiettoria giace tra le due misurazioni: sia la posizione sia l'impulso fra le due misurazioni possono essere calcolati con precisione.

Ora, secondo l'interpretazione che io dò della teoria, queste misurazioni e questi calcoli, che corrispondono precisamente agli elementi che l'interpretazione di Heisenberg considera superflui, sono tutt'altro che superflui. Ammetto che non servano come condizioni iniziali o come base per la derivazione di predizioni, ma sono nondimeno indispensabili:

sono necessari per il controllo delle nostre predizioni, che sono *predizioni statistiche*. Infatti, le nostre relazioni statistiche di dispersione asseriscono che quando le posizioni sono determinate piú esattamente, gli impulsi devono disperdersi, e viceversa. Questa è una predizione che non sarebbe controllabile, o falsificabile, se non fossimo nella posizione di misurare e calcolare, con l'aiuto di esperimenti del genere descritto, i vari impulsi dispersi che hanno luogo immediatamente dopo ogni selezione secondo la posizione [*1].

Pertanto la teoria, interpretata statisticamente, non solo non esclude la possibilità di misurazioni singole esatte, ma sarebbe incontrollabile, e perciò «metafisica», se tali misurazioni fossero impossibili. Cosí il programma di Heisenberg – l'eliminazione degli elementi metafisici – viene portato a compimento, ma grazie a un metodo che è esattamente l'opposto del suo. Infatti, mentre Heisenberg tentava di escludere grandezze che considerava inammissibili (senza riuscirci del tutto), io capovolgo per cosí dire il suo tentativo mostrando che il formalismo che contiene queste grandezze è corretto proprio perché *le grandezze non sono grandezze metafisiche*. Una volta che si sia rinunciato al dogma incorpora-

[*1] Considero questo capoverso (e anche la prima frase del capoverso seguente) come uno dei piú importanti di questa discussione, e ancor oggi mi sento di concordare completamente con esso. Poiché i fraintendimenti continuano, spiegherò la faccenda piú estesamente. Le *relazioni di dispersione* asseriscono che, se disponiamo una selezione precisa della posizione (poniamo mediante una fenditura in uno schermo) la conseguenza sarà la dispersione degli impulsi. (Invece di diventare «indeterminati», i singoli impulsi diventano «impredicibili», in un senso che ci permette di prevedere che si disperderanno). Questa è una predizione che dobbiamo controllare *misurando i singoli impulsi* in modo da determinare la loro distribuzione statistica. Queste misurazioni dei singoli impulsi (che condurranno a una nuova dispersione, ma di questo non è necessario discutere) daranno in ciascun caso singolo risultati precisi a piacere, e a ogni modo molto piú precisi di Δp, cioè, dell'ampiezza media della regione della dispersione. Ora queste misurazioni dei vari impulsi singoli ci permettono di calcolare i loro valori, risalendo fino al luogo in cui la posizione è stata selezionata, e misurata mediante la fessura. E questo «calcolo della storia passata» della particella (cfr. § 73, nota 3) è essenziale; senza di esso non potremmo asserire che stavamo misurando gli impulsi immediatamente dopo che si erano scelte le posizioni, e dunque non potremmo asserire che stavamo controllando le relazioni di dispersione, cosa che facciamo effettivamente con ogni esperimento che mostri un aumento di dispersione come conseguenza della diminuzione della larghezza di una fessura. Cosí, solo la precisione della *predizione* risulta «confusa» o «imbrattata» in conseguenza delle relazioni di dispersione, mai la precisione di una *misurazione*.

to nella limitazione imposta da Heisenberg alla precisione che possiamo ottenere, non ci sono piú ragioni per cui dobbiamo dubitare del significato fisico di queste grandezze. Le relazioni di dispersione sono predizioni frequenziali riguardanti traiettorie, e perciò, se dobbiamo essere in grado di controllare le nostre predizioni frequenziali riguardanti queste traiettorie (o i lanci di un dado), queste devono essere misurabili esattamente nello stesso modo in cui devono essere accertabili empiricamente i risultati, poniamo di un cinque, dei lanci di un dado.

Il rifiuto di Heisenberg del concetto di traiettoria, e il suo parlare di «grandezze non osservabili», mostrano chiaramente l'influenza di idee filosofiche, in particolare positivistiche. Sotto la medesima influenza, March scrive: «Si può dire, forse senza timore di essere fraintesi,... che per il fisico un corpo ha una realtà solo nell'istante in cui il fisico l'osserva. Naturalmente nessuno è tanto pazzo da asserire che un corpo cessa di esistere nel momento in cui gli voltiamo la schiena; ma è vero che in quel momento esso cessa di essere un oggetto di ricerca per il fisico, perché non esiste la minima possibilità di dire, intorno ad esso, qualcosa che sia basato sull'esperimento»[2]. In altre parole, l'ipotesi che un corpo si muove secondo questa o quell'altra traiettoria mentre nessuno lo sta osservando, è *non-verificabile*. Naturalmente questo è ovvio, ma privo di interesse. Ciò che è importante, comunque, è il fatto che quest'ipotesi e le altre simili sono *falsificabili*: sulla base dell'ipotesi che il corpo si muove seguendo una certa traiettoria, siamo in grado di predire che il corpo sarà osservabile in questa o in quest'altra posizione, e questa è una predizione che può essere confutata. Che la teoria dei quanti *non* escluda questo genere di procedimento, si vedrà nel prossimo paragrafo. Ma in realtà, quello che abbiamo detto qui è perfettamente sufficiente [*2], perché elimina tutte le dif-

[2] MARCH, *Die Grundlagen der Quantenmechanik* cit., p. 1. * La posizione di Reichenbach è simile e viene criticata nel *Postscript* cit., § *13.

[*2] L'inizio di questa frase (da «Ma in realtà» a «sufficiente») non era nel testo originale. L'ho inserita perché non credo piú nell'argomento del «paragrafo successivo» (77) a cui facevo riferimento nella frase precedente, e perché, in realtà, quello che segue è completamente indipendente dal paragrafo successivo: è basato sull'argomento appena addotto, secondo il quale i calcoli delle traiettorie passate dell'elettrone sono necessari per controllare le predizioni statistiche della teoria, cosicché questi calcoli sono ben lontani dall'essere «privi di significato».

ficoltà connesse con l'«insignificanza» del concetto di traiettoria. Quanto ciò contribuisca a purificare l'atmosfera si vedrà meglio ricordando le drastiche conclusioni che furono tratte dal supposto fallimento del concetto di traiettoria. Schlick le formula cosí: «Forse il modo piú conciso per descrivere la situazione di cui ci stiamo occupando consiste nel dire (come fanno i piú eminenti ricercatori dei problemi dei quanti) che la validità dei concetti spazio-temporali ordinari è limitata alla sfera di ciò che è osservabile macroscopicamente, e che questi concetti non sono applicabili alle dimensioni atomiche»[3]. Qui Schlick allude probabilmente a Bohr, il quale scrive: «Perciò si può assumere che dove si tratti del problema generale della teoria dei quanti, la questione non riguarda semplicemente un mutamento nelle teorie meccaniche ed elettrodinamiche, mutamento che può essere descritto nei termini dei concetti fisici ordinari, ma il fallimento, che ha radici profonde, delle immagini spazio-temporali che abbiamo usato finora nella descrizione dei fenomeni naturali»[4]. Heisenberg adottò come base del suo programma di ricerca quest'idea di Bohr, consistente nella rinuncia alle descrizioni spazio-temporali. Il suo successo sembrò mostrare che si trattava di una rinunzia fruttuosa. Ma in realtà il suo programma non fu mai portato a termine. L'uso frequente e inevitabile, anche se surrettizio, di concetti spazio-temporali sembra ora giustificabile alla luce della nostra analisi. Essa infatti ha mostrato che le relazioni statistiche di dispersione sono asserzioni intorno alla dispersione di posizione-piú-impulso, e perciò asserzioni intorno a traiettorie.

Ora che abbiamo mostrato che le relazioni di indeterminazione sono asserzioni probabilistiche formalmente singolari, possiamo anche sbrogliare l'intricata rete delle loro interpretazioni oggettivistiche e soggettivistiche. Nel § 71 abbiamo imparato che ogni asserzione probabilistica formalmente singolare può essere interpretata in modo soggettivistico, come una predizione indefinita, come un'asserzione che riguarda l'indeterminatezza della nostra conoscenza. Abbiamo anche visto sotto quali ipotesi il tentativo, giustificato e indispensabile, di interpretare in modo oggettivistico un'asserzione

[3] SCHLICK, *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik* cit., p. 159.
[4] BOHR, in «Die Naturwissenschaften», 14 (1926), p. 1.

di questo genere sia destinato a fallire. È destinato a fallire se tentiamo di sostituire all'interpretazione oggettivistica statistica un'interpretazione oggettivistica singolare, attribuendo l'indeterminazione direttamente al singolo evento [*3]. Tuttavia se si interpretano le formule di Heisenberg (direttamente) in senso soggettivistico, la posizione della fisica come scienza oggettiva viene messa in pericolo: infatti, per essere coerenti, si dovrebbero interpretare in termini soggettivistici anche le onde di probabilità di Schrödinger. Questa conclusione è stata tratta da Jeans, che scrive [5]: «In breve, l'immagine corpuscolare ci dice che la nostra conoscenza di un elettrone è indeterminata; l'immagine ondulatoria, che l'elettrone stesso è indeterminato, indipendentemente dal fatto che su di esso si facciano o no esperimenti. Tuttavia il contenuto del principio d'indeterminazione dev'essere esattamente il medesimo nei due casi. C'è solo un modo per renderlo tale: dobbiamo supporre che l'immagine ondulatoria fornisca una rappresentazione, non già della natura oggettiva, ma della nostra conoscenza della natura...» Le onde di Schrödinger sono dunque, per Jeans, *onde di probabilità soggettiva*, onde della nostra conoscenza. E cosí l'intera teoria soggettivistica della probabilità invade il regno della fisica. Gli argomenti che ho rigettato – l'uso del teorema di Bernoulli come «ponte» dall'ignoranza alla conoscenza statistica, e tutti gli argomenti simili (cfr. § 62) – diventano irrenunciabili. Jeans formula nel modo seguente l'atteggiamento soggettivistico della fisica moderna: «Heisenberg ha aggredito l'enigma dell'universo fisico rinunciando all'enigma principale – la natura dell'universo oggettivo – come a un enigma insolubile, e concentrando la propria attenzione sul rompicapo secondario della coordinazione delle nostre osservazioni dell'universo. Cosí non deve sorprendere che l'immagine ondulatoria, che ne è emersa alla fine, si dimostri impegnata sol-

[*3] Questo è uno dei punti sui quali in seguito ho cambiato opinione. Cfr. *Postscript* cit., cap. *V. Ma l'argomento principale in favore di un'interpretazione oggettivistica rimane inalterato. Secondo il mio punto di vista attuale, la teoria di Schrödinger può e deve essere interpretata, non solo come oggettiva e singolare, ma, al medesimo tempo, come una teoria probabilistica.

[5] JEANS, *The New Background of Science* cit., p. 236 (1934[2], p. 240). Nel testo di Jeans, con la seconda frase – cioè, con le parole «Ma il contenuto» – ha inizio un nuovo capoverso. Per la citazione che segue alla fine di questo capoverso cfr., p. 237 (2ª ed., p. 241).

tanto con la nostra conoscenza dell'universo, in quanto ottenuta attraverso le nostre osservazioni».

Non c'è dubbio che conclusioni di questo genere appariranno altamente accettabili ai positivisti. Tuttavia le mie opinioni sull'oggettività rimangono intatte. Le asserzioni statistiche della teoria dei quanti devono essere controllabili intersoggettivamente nello stesso modo in cui dev'esserlo qualsiasi altra asserzione della fisica. E la mia semplice analisi salva non soltanto la possibilità di descrizioni spazio-temporali, ma anche il carattere oggettivo della fisica.

È interessante che a questa interpretazione soggettivistica delle onde di Schrödinger esista una controparte: un'interpretazione non-statistica e perciò direttamente oggettivistica (cioè, singolare). Lo stesso Schrödinger, nei suoi famosi *Collected Papers on Wave-Mechanics* ha proposto un'interpretazione in qualche modo simile della sua equazione d'onda (che, come abbiamo visto, è un'asserzione probabilistica formalmente singolare). Egli tentò d'identificare immediatamente la particella con lo stesso pacco d'onda. Ma il suo tentativo portò direttamente a quelle difficoltà che sono caratteristiche del suo genere d'interpretazione: voglio dire all'attribuzione del carattere di indeterminazione agli stessi oggetti fisici (indeterminazioni oggettivate). Schrödinger fu costretto ad assumere che la carica dell'elettrone sia «oscurata» od «imbrattata» nello spazio (con una densità di carica determinata dall'ampiezza d'onda), assunzione, questa, che si rivelò incompatibile con la struttura atomica dell'elettricità [6]. L'interpretazione statistica di Born risolvette il problema, ma la connessione logica tra l'interpretazione statistica e l'interpretazione non statistica rimase oscura. Accadde cosí che il carattere peculiare di altre asserzioni probabilistiche formalmente singolari – quali le relazioni di indeterminazione – non fu riconosciuto, e tali relazioni poterono continuare a minare la base fisica della teoria.

Posso forse concludere con un'applicazione di quello che è stato detto in questo paragrafo, a un esperimento immagi-

[6] Cfr. ad esempio WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* cit., p. 193.

nario proposto da Einstein[7] e definito da Jeans[8] come «una delle parti piú difficili della nuova teoria dei quanti»: io penso però che la nostra interpretazione lo renda perfettamente chiaro, se non addirittura banale [*4].

Si immagini uno specchio semi-traslucido, cioè, uno specchio che riflette parte della luce e parte ne lascia passare. La probabilità formalmente singolare che un dato fotone (o quanto di luce) passi attraverso lo specchio, ${}_{\alpha}P_k(\beta)$, si può considerare eguale alla probabilità che il fotone sarà riflesso: avremo perciò

$$ {}_{\alpha}P_k(\beta) = {}_{\alpha}P_k(\bar{\beta}) = \tfrac{1}{2}. $$

Come sappiamo, questa stima di probabilità è definita da probabilità statistiche oggettive: cioè a dire, è equivalente all'ipotesi che la metà di una data classe, α, di quanti di luce passerà attraverso lo specchio, mentre l'altra metà ne sarà riflessa. Supponiamo ora che un fotone k cada sullo specchio e che in seguito venga accertato sperimentalmente che questo fotone è stato riflesso: allora sembra che le probabilità cambino, per cosí dire, improvvisamente e in modo discontinuo. È come se, prima dell'esperimento, queste probabilità fossero state entrambe eguali a ½, mentre dopo che il fatto della riflessione è diventato noto, si fossero cambiate, rispettivamente, in 0 e 1. È chiaro che questo esempio è in realtà lo stesso che abbiamo dato nel § 71 [*5]. E non si riesce affatto a chiarificare la situazione se, come fa Heisenberg[9], si descrive

[7] Cfr. HEISENBERG, *Physikalische Prinzipien* cit., p. 29.

[8] JEANS, *The New Background of Science* cit., p. 242 (2ª ed., p. 246).

[*4] Il problema che segue qui è in seguito diventato famoso col nome di «problema della *riduzione* (discontinua) *del pacco d'onda*». Nel 1934 alcuni eminenti fisici mi dissero di essere d'accordo con la mia soluzione banale, ma, dopo piú di vent'anni il problema esercita ancora una funzione estremamente fuorviante nella discussione della teoria dei quanti. L'ho di nuovo discusso diffusamente nei §§ *100 e *115 del *Postscript*.

[*5] Cioè a dire, le probabilità «cambiano» soltanto nella misura in cui ad α si sostituisca $\bar{\beta}$. Cosí ${}_{\alpha}P(\beta)$ rimane immutata, ½, ma ${}_{\bar{\beta}}P(\beta)$ diventa, naturalmente, eguale a 0 proprio come ${}_{\bar{\beta}}P(\bar{\beta})$ diventa eguale a 1.

[9] HEISENBERG, *Physikalischen Prinzipien* cit., p. 29. D'altra parte, VON LAUE, in *Korpuskular- und Wellentheorie* [Teoria corpuscolare e teoria ondulatoria], *Handbuch der Radiologie* [Manuale di radiologia], 6 (2ª ed., p. 79 della ristampa) dice, molto giustamente: «Ma è forse del tutto sbagliato mettere in relazione un'onda con un singolo corpuscolo? Se assumiamo che in linea di principio l'onda è in relazione con un aggregato di corpi eguali ma tra loro indipendenti, allora la conclusione paradossale svanisce». * In uno dei suoi ultimi scritti Einstein adottò un'interpretazione simile. Cfr. § 77, nota *1.

l'esperimento in termini come questi: «mediante l'esperimento [cioè, mediante la misurazione per mezzo della quale troviamo il fotone che è stato riflesso] si esercita una specie di azione fisica (una riduzione del pacco d'onde) dal luogo in cui si è trovata la metà riflessa del pacco d'onda su un altro luogo – distante a nostro piacere – in cui accade che si trovi l'altra metà del pacco d'onda». A questa descrizione Heisenberg aggiunge: «quest'azione fisica si diffonde con velocità superiore a quella della luce». Questo non è di nessun aiuto, dal momento che le nostre probabilità originali, ${}_{\alpha}P_k(\beta)$ e ${}_{\alpha}P_k(\bar{\beta})$, rimangono eguali a ½. Tutto quello che è accaduto è la scelta di una nuova classe di riferimento – β o $\bar{\beta}$ invece di α – scelta che ci è fortemente suggerita dal risultato dell'esperimento, cioè dall'informazione $k \in \beta$ o $k \in \bar{\beta}$, rispettivamente. Il dire, delle conseguenze logiche di questa scelta (o, forse, delle conseguenze logiche di quest'informazione) che «si diffondono con velocità superiore a quella della luce» è quasi tanto utile quanto il dire che due volte due diventa quattro con velocità superiore a quella della luce. Un'ulteriore osservazione di Heisenberg, a proposito del fatto che questa specie di propagazione di un'azione fisica non può essere usata per trasmettere segnali, sarà forse vera, ma non migliora affatto la situazione.

Il destino di quest'esperimento immaginario è quello di ricordarci l'urgente bisogno di distinguere e di definire i concetti statistico e formalmente singolare di probabilità. Mostra anche che il problema interpretativo a cui ha dato origine la teoria dei quanti, può essere avvicinato solo attraverso un'analisi logica dell'interpretazione delle asserzioni probabilistiche.

77. *Esperimenti decisivi***.

Ora ho completato la prima delle due parti del programma da me delineato nell'introduzione che precede il § 73. Ho mostrato: 1) che le formule di Heisenberg possono essere in-

** L'esperimento immaginario descritto in questo paragrafo, pp. 264-69, è fondato su un errore. (Cfr. anche le note *3 e *4). I primi a notare quest'errore furono von Weizsäcker (in «Die Naturwissenschaften», 22, 1934, p. 807), Heisenberg (che me lo comunicò per mezzo di lettere) e Einstein, in terpretate statisticamente e, perciò, 2) che la loro interpretazione come limitazioni imposte sulla precisione che possiamo ottenere non segue logicamente dalla teoria dei quanti, che perciò non potrebbe essere contraddetta semplicemente dal fatto che nelle nostre misurazioni si ottiene un grado di precisione piú alto *1.

«Fin qui va tutto bene, – qualcuno potrebbe replicare. – Non negherò che sia possibile considerare in questo modo la meccanica quantistica. Ma tuttavia non mi sembra ancora che il vero e proprio nocciolo fisico della teoria di Heisenberg, l'impossibilità di fare *predizioni* singolari esatte, sia stato toccato dalle tue argomentazioni».

Se gli chiedessero di elaborare la sua tesi per mezzo di un esempio fisico, il mio oppositore potrebbe procedere nel modo che segue: «Immagina un fascio di elettroni, come quello che si forma in un tubo catodico. Supponi che la direzione di questo fascio sia la direzione x. Da questo fascio possiamo ottenere svariate selezioni fisiche. Ad esempio, possiamo selezionare, o separare, un gruppo di elettroni secondo la loro posizione nella direzione x (cioè, secondo le loro coordinate x in un certo istante); ciò si potrebbe fare, forse, per mezzo di un otturatore che apriamo per un istante brevissimo. In questo modo otterremmo un gruppo di elettroni la cui estensione nella direzione x è molto piccola. Secondo le relazioni di dispersione, gli impulsi dei vari elettroni di questo gruppo differirebbero largamente nella direzione x (e perciò differirebbero anche le loro energie). Come hai giustamente affermato, possiamo controllare queste asserzioni intorno alla dispersione. Possiamo farlo misurando gli impulsi delle energie dei singoli elettroni; e poiché conosciamo la posizione otterremo in questo modo sia la posizione sia l'impulso. Una mi-

una lettera qui riprodotta nell'appendice *XII. Ho perciò ripudiato quest'esperimento e non lo considero piú «decisivo». Tuttavia, non solo le mie argomentazioni fino a p. 264 non ne risultano influenzate, ma possiamo addirittura sostituire al mio esperimento, non valido, il famoso esperimento immaginario descritto da Einstein, Podolsky e Rosen in «Physical Review», 47, pp. 777-80. Mi sembra che la risposta di Niels Bohr a questo esperimento sposti il problema: cfr. l'appendice *IX e il mio articolo *Quantum Mechanics Without «The Observer»* [Meccanica quantistica senza «l'osservatore»], in *Quantum Theory and Reality* [Teoria dei quanti e realtà], a cura di Mario Bunge, 1967, pp. 7-44.

*1 In realtà anche il punto 3) del mio programma è stato portato a termine.

surazione di questo genere si può eseguire, ad esempio, lasciando che gli elettroni urtino contro una lastra, eccitandone gli atomi: troveremo allora, tra l'altro, alcuni atomi eccitati, per eccitare i quali è necessaria energia in eccesso rispetto all'energia media di questi elettroni. Dunque, io ammetto che tu avevi perfettamente ragione quando mettevi l'accento sul fatto che tali misurazioni sono allo stesso tempo possibili e significanti. Ma – e qui arriva la mia obiezione – quando compiamo misurazioni di questo genere non possiamo non disturbare il sistema che stiamo esaminando, cioè, o i singoli elettroni o, se ne misuriamo molti (come nel mio esempio), l'intero fascio di elettroni. Sono pronto ad ammettere che la teoria non risulterebbe contraddetta logicamente se potessimo conoscere gli impulsi dei vari elettroni del gruppo prima di disturbarlo (naturalmente, nella misura in cui ciò non ci mettesse in grado di usare la nostra conoscenza in modo tale da effettuare una selezione proibita). Ma non c'è nessun modo per ottenere una conoscenza del genere, riguardante i singoli elettroni, senza disturbarli. Per concludere, resta vero che le singole predizioni precise sono impossibili».

A quest'obiezione risponderei, prima di tutto, che non sarebbe sorprendente se fosse corretta. Dopo tutto, è ovvio che da una teoria statistica non si possono mai derivare predizioni singolari esatte, ma si possono derivare soltanto predizioni singole «indefinite» (cioè, formalmente singolari). Ma ciò che io affermo a questo punto è che, sebbene non fornisca predizioni di questo genere, la teoria *non le esclude* neppure. Si potrebbe parlare dell'impossibilità di predizioni singolari solo se si potesse asserire che il disturbare il sistema, o l'interferire con esso, impedisce necessariamente ogni genere di misurazione predittiva.

«Ma questo è proprio quello che io asserisco, – dirà il mio oppositore. – Asserisco, precisamente, che è impossibile misurare l'energia di uno di questi elettroni in movimento senza forzarlo fuori della sua traiettoria e fuori del gruppo di elettroni. *Questa* è l'assunzione che io considero insostenibile. Infatti, assumendo di essere in possesso di un apparato col quale potrei eseguire tali misurazioni, dovrei essere in grado, mediante quest'apparato, di *produrre* aggregati di elettroni i quali tutti *a*) fossero limitati quanto alla loro posizione e *b*) avessero lo stesso impulso. Naturalmente, anche tu sei dell'opinione che l'esistenza di tali aggregati contraddirebbe la teoria dei quanti, perché tale esistenza è esclusa dalle tue "relazioni di dispersione", come le chiami tu. Dunque potresti solo rispondere che è possibile concepire un apparato che ci permetterebbe di eseguire misurazioni, ma non di compiere selezioni. Ammetto che questa risposta è logicamente ammissibile, ma, come fisico, posso solo dire che il mio istinto si ribella all'idea che possiamo misurare gli impulsi degli elettroni e pure non siamo in grado di eliminare, ad esempio, tutti quegli elettroni i cui impulsi superano (o sono inferiori a) una certa quantità data».

La mia prima risposta a questa controobiezione sarebbe che essa suona estremamente convincente in ogni sua parte, ma che una *prova* rigorosa della pretesa che, se è possibile una misurazione predittiva, dev'essere anche possibile la selezione fisica corrispondente, non è stata data (e, come vedremo fra breve, non può essere data). Nessuno di questi argomenti prova che le predizioni precise contraddirebbero la teoria dei quanti. Esse introducono tutte un'*ipotesi addizionale.* Infatti l'asserzione (che corrisponde al punto di vista di Heisenberg) che sono impossibili previsioni singole esatte, si rivela equivalente all'ipotesi che *misurazioni predittive e selezioni fisiche sono legate inseparabilmente.* E in realtà la mia concezione non può non collidere con questo nuovo sistema di teorie: la congiunzione della teoria dei quanti con «*l'ipotesi ausiliaria del legame*»[1].

Con questo il punto 3) del programma che mi ero proposto è stato portato a termine. Ma il punto 4) dev'essere ancora dimostrato. In altre parole, dobbiamo ancora mostrare che il sistema che combina la teoria dei quanti interpretata statisticamente (comprese, assumiamo, le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia) con «l'ipotesi del legame» è autocontradditorio. Esiste, suppongo, una presunzione, profondamente radicata, che misurazione predittiva e selezione fisica siano sempre legate. Il prevalere di questa presunzione può forse spiegare perché non siano mai state ela-

[1] L'ipotesi ausiliaria discussa qui può naturalmente apparire sotto forma diversa. La ragione per cui ho scelto questa particolare forma per l'analisi e la discussione critiche è che l'obiezione, che asserisce la connessione di misurazione e di selezione fisica, fu effettivamente sollevata (in conversazioni e in lettere) contro il punto di vista avanzato qui.

borate le semplici argomentazioni che dimostrerebbero il contrario.

Vorrei mettere l'accento sul fatto che le principali considerazioni fisiche che dobbiamo esporre a questo punto non fanno parte delle assunzioni o premesse della mia analisi logica delle relazioni di indeterminazione, anche se potrebbero essere descritte come il suo frutto. In realtà, l'analisi che abbiamo compiuto fino a questo momento è *perfettamente indipendente* da quello che segue: è indipendente, in modo speciale, dall'esperimento fisico immaginario che descriveremo piú sotto [*2] e che è destinato a dimostrare la possibilità di predire, con precisione arbitraria, la traiettoria delle singole particelle.

Come introduzione a quest'esperimento immaginario discuterò, prima di tutto, alcuni esperimenti piú semplici. Questi esperimenti sono destinati a mostrare che possiamo senza difficoltà fare predizioni precise a piacere di traiettorie, e possiamo anche controllarle. A questo punto prendo in considerazione solo predizioni che non si riferiscano a particelle singole definite, ma a (tutte le) particelle all'interno di una piccola regione spazio-temporale definita ($\Delta x \,.\, \Delta y \,.\, \Delta z \,.\, \Delta t$). In ciascun caso c'è solo una certa *probabilità* che in quella regione siano presenti particelle.

Immaginiamo di nuovo un fascio (un fascio di elettroni o un fascio di luce) di particelle che viaggiano nella direzione x. Ma questa volta assumiamo che sia monocromatico, cosicché tutte le particelle viaggino lungo traiettorie parallele nella direzione x con lo stesso impulso noto. Le componenti nelle altre direzioni dell'impulso saranno anche note: cioè si saprà che sono eguali a zero. Ora, invece di determinare la posizione nella direzione x di un gruppo di particelle per mezzo di una selezione *fisica* – cioè, invece di isolare il gruppo di particelle dal resto del fascio con mezzi tecnici (come abbiamo fatto piú sopra) – ci accontenteremo di differenziare questo gruppo dal resto semplicemente concentrando la nostra attenzione su di esso. Ad esempio, possiamo concentrare la nostra attenzione su quelle particelle che (con una precisione data) hanno, in un istante dato, la coordinata locale x, e che

[*2] Quelli dei miei critici che giustamente rigettarono l'idea di questo esperimento immaginario sembrano credere di aver confutato, con ciò, anche l'analisi precedente, e ciò a dispetto dell'avvertimento dato qui.

perciò non si diffondono oltre un intervallo Δx piccolo a piacere. Di ciascuna di queste particelle conosciamo con esattezza l'impulso. Per ciascun istante futuro sappiamo perciò con precisione dove sarà questo gruppo di particelle. (È chiaro che la semplice esistenza di tale gruppo non contraddice la teoria dei quanti; solo la loro esistenza separata, cioè la possibilità di selezionarlo fisicamente, contraddirebbe la teoria). Possiamo eseguire lo stesso genere di selezione immaginaria in connessione con le altre coordinate spaziali. Il fascio monocromatico, selezionato fisicamente, dovrà essere molto largo nelle direzioni y e z (infinitamente largo nel caso di un fascio monocromatico ideale) perché in queste direzioni si suppone che l'impulso sia stato selezionato con precisione, cioè sia eguale a 0, cosicché le posizioni in questa direzione devono essere diffuse largamente. Nondimeno, possiamo di nuovo concentrare la nostra attenzione su un raggio parziale molto stretto. Anche qui, conosceremo non soltanto la posizione ma anche l'impulso di ogni particella del raggio. Perciò, per ogni particella, di questo stretto raggio (che abbiamo, per così dire, selezionato nella nostra immaginazione) saremo in grado di predire in quale punto, e con quale impulso, colpirà una lastra fotografica posta sulla sua traiettoria, e naturalmente potremo controllare empiricamente questa predizione (come accadeva nell'esperimento precedente).

Si possono fare selezioni immaginarie, analoghe a quella appena fatta da un «caso puro» di un tipo particolare, partendo da altri tipi di aggregati. Ad esempio, possiamo prendere un fascio monocromatico da cui è stata fatta una selezione fisica per mezzo di una fessura molto stretta, Δy (prendendo così come punto di partenza fisico una selezione fisica corrispondente alla selezione puramente immaginaria dell'esempio precedente). Di nessuna delle particelle sappiamo in quale direzione si avvierà dopo essere passata attraverso la fenditura; ma se consideriamo una sola direzione definita possiamo calcolare con precisione la componente dell'impulso di tutte le particelle che si sono avviate in questa direzione particolare. Così, le particelle che, dopo essere passate attraverso la fenditura, viaggiano in una direzione definita, formano di nuovo una selezione immaginaria. Siamo in grado di predire la loro posizione e il loro impulso, o, in breve, le loro traiettorie; e di nuovo, mettendo sulla loro traiettoria una lastra fotografica, possiamo controllare le nostre predizioni.

In linea di principio la situazione è la stessa (anche se i controlli empirici sono in certo modo piú difficili) nel caso del primo esempio che abbiamo preso in considerazione, cioè nel caso della selezione di particelle compiuta in base alla loro posizione nella direzione nella quale viaggiano. Se produciamo una selezione fisica corrispondente a questo caso, allora particelle differenti viaggeranno con velocità differenti per via della diffusione degli impulsi. Man mano che procede, il gruppo di particelle si diffonderà cosí su un intervallo che cresce nella direzione x. (Il pacco diventerà piú largo). Possiamo allora calcolare l'impulso di un gruppo parziale di queste particelle (scelte idealmente) che, in un istante dato, si troveranno in una posizione data nella direzione x: l'impulso sarà tanto piú grande quanto piú avanti si trova il gruppo parziale selezionato (e viceversa). Il controllo empirico della predizione fatta in questo modo potrebbe essere eseguito sostituendo alla lastra fotografica un nastro di pellicola fotografica in movimento. Siccome di ciascun punto del nastro potremmo conoscere il tempo d'esposizione all'impatto degli elettroni, per ciascun punto del nastro potremmo anche *predire* quale sarà l'impulso con cui avrà luogo l'impatto. Queste predizioni si potrebbero *controllare*, ad esempio, inserendo un filtro davanti al nastro in movimento, o forse davanti al contatore Geiger (un filtro nel caso di raggi luminosi; nel caso degli elettroni, invece, un campo elettrico disposto ortogonalmente alla direzione del raggio) seguito da una selezione secondo la direzione, che consenta il passaggio solo a quelle particelle che posseggono un impulso minimo dato. Potremmo allora accertare se queste particelle sono davvero arrivate al tempo che avevamo predetto, oppure non sono arrivate.

La precisione delle misurazioni implicate in questi controlli non è limitata dalle relazioni di indeterminazione. Come abbiamo visto si intende che queste valgano soltanto per quelle misurazioni usate per dedurre predizioni e non per controllarle. Si intende che valgano, per cosí dire, per «*misurazioni predittive*» e non per «*misurazioni non-predittive*». Nei §§ 73 e 76 ho esaminato tre casi di tali misurazioni «non predittive», e cioè: *a*) misurazione di due posizioni, *b*) misurazione di posizione preceduta o, *c*) seguita, da una misurazione d'impulso. La misurazione sopra discussa, eseguita per mezzo di un filtro posto davanti a un nastro di pellicola fotografica di un contatore Geiger, esemplifica il caso *b*), cioè una selezione secondo l'impulso seguita da una misurazione di posizione. Questo è, presumibilmente, proprio il caso che secondo Heisenberg (cfr. § 73) permette «un calcolo del passato dell'elettrone». Infatti, mentre nei casi *a*) e *c*) sono possibili soltanto calcoli del tempo intercorso *tra* le due misurazioni, nel caso *b*) è possibile calcolare la traiettoria *prima* della prima misurazione, purché questa misurazione sia una selezione compiuta secondo un impulso dato; tale selezione infatti non disturba la posizione della particella [*3]. Come sappiamo, Heisenberg mette in dubbio la «realtà fisica» di questa misurazione, perché essa ci permette di calcolare l'impulso della particella solo al momento del suo arrivo in una posizione misurata con precisione, e in un istante misurato con precisione: la misurazione sembra mancare di contenuto predittivo, perché da essa non si può derivare nessuna conclusione controllabile. Tuttavia io baserò il mio esperimento immaginario, che dovrebbe stabilire la possibilità di predire con precisione la posizione e l'impulso di una particella definita, su questo particolare dispositivo per la misurazione, che a prima vista è chiaramente non-predittivo.

Siccome dall'assunzione che sono possibili misurazioni «non predittive» precise di questo tipo sto per derivare conseguenze di cosí grande portata, mi sembra appropriato discutere l'ammissibilità di questa assunzione. Questa discussione viene condotta nell'appendice VI.

Con l'esperimento immaginario che segue intendo lanciare una sfida diretta al metodo di ragionamento che Bohr e Heisenberg hanno usato allo scopo di giustificare l'interpretazione delle formule di Heisenberg come limitazioni impo-

[*3] Quest'asserzione (che ho tentato di basare sulla mia discussione nell'appendice VI e fu efficacemente criticata da Einstein – cfr. appendice *XII) è falsa e con essa cade il mio esperimento immaginario. Il punto principale è che le misurazioni non-predittive determinano la traiettoria di una particella solo *tra* due misurazioni, quali una misurazione d'impulso seguita da una misurazione di posizione (o viceversa); secondo la teoria dei quanti non è possibile proiettare ulteriormente all'indietro la traiettoria, cioè fino alla regione di tempo anteriore alla prima di queste misurazioni. Cosí, l'ultimo capoverso dell'appendice VI è errato; e non possiamo sapere se la particella che arriva ad x (si veda piú sotto) sia venuta da P o se sia venuta da qualche altro posto. Si veda anche la nota ** a p. 257.

ste sulla precisione che possiamo ottenere. Infatti Bohr e Heisenberg tentarono di giustificare quest'interpretazione mostrando che non è possibile escogitare esperimenti immaginari che producano misurazioni predittive piú esatte. Ma è chiaro che questo metodo di ragionare non può escludere la possibilità che qualche giorno si possa escogitare un esperimento immaginario che (usando effetti e leggi fisiche noti) mostri che, dopo tutto, tali misurazioni sono possibili. Si era preso come incontestabilmente certo che qualsiasi esperimento di questo genere avrebbe contraddetto il formalismo della teoria dei quanti, e sembra che quest'idea abbia determinato la direzione in cui si è incamminata la ricerca di tali esperimenti. La mia analisi – l'esecuzione dei punti 1) e 2) del mio programma – ha tuttavia sgombrato la strada lungo la quale si deve escogitare un esperimento che mostri, *in pieno accordo* con la teoria dei quanti, che le misurazioni precise in questione sono possibili.

Per eseguire quest'esperimento, farò uso, come prima, di una «selezione immaginaria», ma sceglierò una disposizione tale che, se davvero esiste una particella caratterizzata dalla selezione, saremo capaci di accertare il fatto.

In un certo senso il mio esperimento costituisce una specie di idealizzazione degli esperimenti di Compton-Simon e di Bothe-Geiger[2]. Poiché vogliamo ottenere predizioni singolari, non possiamo operare soltanto con assunzioni statistiche. Dovremo usare le leggi non statistiche della conservazione dell'energia e dell'impulso. Possiamo sfruttare il fatto che queste leggi ci permettono di calcolare che cosa accade quando le particelle si urtano, purché ci siano date due delle quattro grandezze che descrivono la collisione (cioè, degli impulsi $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{b}_1$ prima, e $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{b}_2$ dopo la collisione) e una componente[3] di una terza grandezza. (Il metodo di calcolo è ben noto, come parte della teoria dell'effetto Compton)[4].

Immaginiamo ora la seguente disposizione sperimentale

[2] A. COMPTON e A. W. SIMON, in «Physical Review», 25 (1924), p. 439; W. BOTHE e H. GEIGER, in «Zeitschrift für Physik», 32 (1925), p. 639. Cfr. anche COMPTON, *X-Rays and Electrons* [Raggi X ed elettroni], New York 1927; e in «Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften», 5 (1926), pp. 267 sgg.; A. HAAS, *Atomtheorie* [Teoria dell'atomo], 1929, pp. 229 sgg.

[3] Qui «componente» dev'essere inteso nel senso piú largo (sia come direzione sia come grandezza assoluta).

[4] Cfr. HAAS, *Atomtheorie* cit.

(cfr. fig. 2). Facciamo intersecare due fasci di particelle (dei quali al massimo uno può essere un raggio luminoso, e uno al massimo può essere elettricamente non-neutro [5]) che sono entrambi «*casi puri*» nel senso che il fascio *A* è monocromatico, cioè è una selezione secondo l'impulso $\mathbf{a}_1$, mentre il fascio *B* passa attraverso una stretta fenditura, *F*, ed è perciò sottoposto a una selezione fisica secondo la posizione. Si può supporre che le particelle *B* abbiano l'impulso (assoluto) $\mathbf{b}_1$. Alcune delle particelle di questi due fasci si urteranno. *Immaginiamo* ora due stretti raggi parziali, [*A*] e [*B*] che si intersecano al posto *P*. L'impulso di [*A*] è noto: è $\mathbf{a}_1$. L'impulso del raggio parziale [*B*] diventa calcolabile non appena abbiamo deciso di dargli una direzione definita: sia quest'impulso $\mathbf{b}_1$. Ora scegliamo una direzione *PX*. Facendo attenzione a quelle particelle del raggio parziale [*A*] che dopo la collisione viaggiano nella direzione *PX*, possiamo calcolare il loro impulso $\mathbf{a}_2$, e anche $\mathbf{b}_2$, cioè, l'impulso dopo l'urto delle particelle con cui sono entrate in collisione. A ogni particella di [*A*] che era stata deviata al punto *P* con l'impulso $\mathbf{a}_2$ nella direzione *X* deve corrispondere una seconda particella, di [*B*], che è stata deviata in *P* con l'impulso $\mathbf{b}_2$, nella direzione

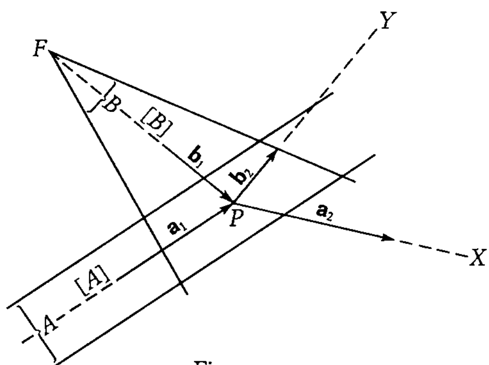


Figura 2.

[5] Penso a un raggio di luce e a qualsiasi specie di raggio corpuscolare (negatone, positone o neutrone); in linea di principio, comunque, si potrebbero usare due raggi corpuscolari, almeno *uno* dei quali è un raggio di neutroni. (Sia detto fra parentesi, le parole «negatrone» e «positrone», che stanno ora entrando nell'uso corrente, mi sembrano mostruosità linguistiche: dopo tutto, non diciamo né «positrivo» né «protrone»).

calcolabile PY. Ora mettiamo in X un apparecchio – ad esempio, un contatore Geiger o un nastro di pellicola in movimento – che registra gli impatti delle particelle che arrivano, da P, nella regione X, resa stretta a nostro piacere. Possiamo allora dire: quando notiamo una qualsiasi di tali registrazioni di una particella, veniamo a sapere, nel medesimo tempo, che da P deve star viaggiando, verso Y, una seconda particella dotata dell'impulso $\mathbf{b}_2$. E dalla registrazione veniamo anche a sapere dove si trovi questa seconda particella in un qualsiasi istante dato, perché, dal tempo in cui è avvenuto l'impatto in X della prima particella, e dalla sua velocità nota, possiamo calcolare l'istante della sua collisione in P. Usando un altro contatore Geiger in Y (o il nastro di pellicola in movimento), possiamo controllare le nostre predizioni relative alla seconda particella [*4].

La precisione di queste predizioni, e cosí pure quella delle misurazioni intraprese per controllarle, *non è, in linea di principio, sottoposta a nessuna delle limitazioni dovute al principio di indeterminazione*, sia per quanto riguarda la coordinata della posizione, sia per quanto riguarda la componente dell'impulso nella direzione PY. Infatti il mio esperimento immaginario riduce la questione della precisione con cui possiamo fare predizioni intorno a una particella B deviata in P, alla questione della precisione che possiamo raggiungere nel compiere misurazioni in X. A tutta prima queste misurazioni sembravano misurazioni non-predittive di

[*4] Einstein, Podolsky e Rosen usano un'argomentazione *piú debole*, ma *valida*: supponiamo che l'interpretazione di Heisenberg sia corretta, cosicché possiamo misurare a nostro piacere soltanto: *o* la posizione *o* l'impulso della prima particella in X. Allora, se *misuriamo* la posizione della prima particella, possiamo *calcolare* la posizione della seconda particella; e se *misuriamo* l'impulso della prima particella, possiamo *calcolare* l'impulso della seconda particella. Ma poiché possiamo fare la nostra scelta – se misurare la posizione oppure l'impulso – in qualsiasi momento, anche dopo che è avvenuta la collisione delle due particelle, sarà irragionevole assumere che la seconda particella sia stata modificata, in qualche modo, o abbia subito qualche interferenza, dal cambiamento delle disposizioni sperimentali che risultano dalla nostra scelta. Di conseguenza, possiamo calcolare, con qualsiasi precisione vogliamo, *o* la posizione *o* l'impulso della seconda particella, *senza interferire* con essa, fatto, questo, che si può esprimere dicendo che la seconda particella «*ha*» sia una posizione precisa sia un impulso preciso. (Einstein ha espresso ciò dicendo che sia la posizione sia l'impulso sono «reali», e per questo fu attaccato come un «reazionario»). Cfr. anche la nota a p. 257 e le appendici *XI e *XII.

istante, posizione e impulso della prima particella corrispondente [*A*]. L'impulso di questa particella nella direzione *PX*, e cosí pure l'istante del suo impatto in *X*, cioè, della sua posizione nella direzione *PF*, possono essere misurati con qualsiasi grado di precisione, a nostro piacere (cfr. appendice VI), se compiamo una selezione secondo l'impulso interponendo, ad esempio, un campo elettrico o un filtro davanti al contatore Geiger, prima di misurare la posizione. Ma in conseguenza di ciò (e lo mostreremo in modo piú completo nell'appendice VII) possiamo fare predizioni, dotate di qualsiasi grado di precisione vogliamo, intorno alla particella *B* che viaggia nella direzione *PY*.

Quest'esperimento immaginario ci consente di vedere non solo che possiamo fare predizioni singole precise, ma anche in quali condizioni possiamo farle, o, meglio ancora, in quali condizioni tali predizioni siano compatibili con la teoria dei quanti. Possiamo farle soltanto se riusciamo ad ottenere la conoscenza relativa allo stato della particella, senza essere in grado di creare questo stato a volontà. Cosí, in realtà, otteniamo la nostra conoscenza dopo l'evento, per cosí dire, perché nel momento in cui l'otteniamo la particella avrà già assunto il suo stato di moto. Tuttavia possiamo ancora fare uso di questa conoscenza per dedurre da essa predizioni controllabili. (Ad esempio, se la particella in questione è un fotone potremo essere in grado di calcolare il suo arrivo sulla stella Sirio). Gli impatti delle particelle che arrivano in *X* si succederanno a intervalli di tempo irregolari, e ciò significa che anche le particelle del raggio parziale *B*, intorno alle quali stiamo facendo predizioni, si succederanno secondo intervalli di tempo irregolari. Se potessimo alterare questo stato di cose, ad esempio rendendo eguali fra loro questi intervalli di tempo, la cosa contraddirebbe la teoria dei quanti. Dunque possiamo, per cosí dire, prendere la mira e predeterminare la forza del proiettile; possiamo anche (e questo *prima* che il proiettile colpisca il bersaglio *Y*) calcolare l'istante esatto in cui il colpo è stato sparato in *P*. Tuttavia non possiamo scegliere liberamente il momento in cui sparare, ma dobbiamo aspettare che il fucile spari da sé; né possiamo impedire che dagli intorni di *P* si sparino colpi incontrollati nella direzione del nostro bersaglio.

È chiaro che il nostro esperimento e l'interpretazione di

Heisenberg sono incompatibili. Ma poiché la possibilità di eseguire quest'esperimento può essere dedotta dall'interpretazione statistica della fisica quantistica (con l'aggiunta delle leggi dell'energia e dell'impulso), è anche chiaro che, contraddicendolo, l'interpretazione di Heisenberg deve anche contraddire l'interpretazione statistica della teoria dei quanti. Se si tengono presenti gli esperimenti di Compton-Simon e di Bothe-Geiger, sembrerebbe possibile eseguire il nostro esperimento. Tale esperimento può essere considerato come una specie di *experimentum crucis* per decidere tra la concezione di Heisenberg e un'interpretazione, coerentemente statistica, della teoria dei quanti.

78. *Metafisica indeterministica.*

Compito dello scienziato della natura è il cercare leggi che lo mettano in grado di dedurre predizioni. Questo compito può essere diviso in due parti. Da un lato, lo scienziato deve tentare di scoprire leggi tali che lo mettano in grado di dedurre predizioni singole (leggi «causali» o «deterministiche», o «asserzioni di precisione»). D'altra parte, deve tentare di avanzare ipotesi intorno a frequenze, cioè, a leggi che asseriscono probabilità, allo scopo di dedurre predizioni di frequenza. In questi due compiti non c'è nulla che li renda incompatibili l'uno con l'altro. È chiaro che non si dà il caso che tutte le volte che facciamo asserzioni di precisione non dobbiamo fare ipotesi di frequenza: infatti, come abbiamo visto, alcune asserzioni di precisione sono macroleggi derivabili da assunzioni di frequenza. E neppure si dà il caso che, quando in un campo particolare certe asserzioni di frequenza risultano ben confermate, siamo autorizzati a concludere che in questo campo *non si possono fare asserzioni di precisione*. Questa situazione sembra abbastanza pacifica. Tuttavia, la seconda delle conclusioni che abbiamo rigettato è stata tratta piú e piú volte. Sempre di nuovo ci imbattiamo nella credenza che, dove domina il caso, la regolarità viene esclusa. Ho esaminato criticamente questa credenza nel § 69.

A giudicare dallo stato attuale dello sviluppo della scienza, non sarà facile superare il dualismo tra macroleggi e microleggi – voglio dire, il fatto che operiamo con le une e con le altre. Tuttavia, ciò che forse sarà logicamente possibile sarà la riduzione di tutte le asserzioni di precisione note – interpretate come macroleggi – ad asserzioni di frequenza. La riduzione inversa non è possibile. Come abbiamo visto nel § 70 le asserzioni di frequenza non potranno mai essere dedotte dalle asserzioni di precisione. Le asserzioni di frequenza hanno bisogno delle loro proprie assunzioni, che devono essere specificamente statistiche. Le probabilità si possono calcolare soltanto partendo da stime di probabilità [*1].

Questa è la situazione logica. Essa non incoraggia né il punto di vista deterministico né il punto di vista indeterministico. E se mai dovesse diventar possibile il lavorare, in fisica, soltanto con asserzioni di frequenza, neanche allora saremmo autorizzati a trarre conclusioni indeterministiche; il che vuol dire che non saremmo ancora autorizzati ad asserire che «in natura non ci sono leggi precise, non ci sono leggi dalle quali si possano dedurre predizioni intorno al corso di processi singoli o elementari». Nella ricerca di leggi, comprese le leggi di questo tipo, lo scienziato non si lascerà arrestare da nulla. E per quanto successo possiamo avere quando operiamo con stime di probabilità, non dobbiamo concludere che la ricerca di leggi di precisione è vana.

Queste riflessioni non sono affatto il risultato dell'esperimento immaginario che abbiamo descritto nel § 77: al contrario. Assumiamo che in base a questo esperimento non risultino confutate le relazioni di indeterminazione (e ciò per qualsivoglia ragione, poniamo, perché l'*experimentum crucis* descritto nell'appendice VI ci farebbe decidere in sfavore della teoria dei quanti): anche in questo caso tali relazioni potrebbero essere controllate solo in quanto asserzioni di frequenza, e potrebbero essere corroborate solo in quanto asserzioni di frequenza. Dunque, in nessun caso saremmo autorizzati a trarre conclusioni indeterministiche dal fatto che le relazioni di indeterminazione sono ben corroborate [*2].

[*1] A questo punto di vista si oppone Einstein alla fine della lettera riprodotta nell'appendice *XII. Ma io penso ancora che sia vero.

[*2] Io credo ancora che quest'analisi sia sostanzialmente corretta: dal successo delle predizioni di frequenza riguardanti i lanci di una moneta non possiamo concludere che i singoli lanci della moneta sono indeterminati. Ma possiamo ragionare in favore, poniamo, di un punto di vista metafisico indeterministico, mettendo in evidenza le difficoltà e le contraddizioni che questo punto di vista potrebbe essere in grado di appianare.

Il mondo è o non è regolato da leggi rigorose? Io ritengo che questa sia una questione metafisica. Le leggi che scopriamo sono sempre ipotesi: e ciò significa che possono sempre essere soppiantate, e possono essere dedotte da stime di probabilità. Tuttavia, negare la causalità sarebbe lo stesso che tentar di persuadere il teorico a rinunciare alla sua ricerca: e che tale tentativo non possa appoggiarsi a nulla che somigli a una prova, l'abbiamo appena fatto vedere. Il cosiddetto «principio causale», o «legge causale», lo si formuli come si vuole, ha un carattere molto differente da quello di una legge di natura, e io non posso dichiararmi d'accordo con Schlick, quando dice «... la verità della legge causale può essere controllata *esattamente nello stesso senso* in cui si può controllare la verità di qualsiasi altra legge di natura» [1].

La credenza nella causalità è metafisica [*3]. Non è nient'altro che una tipica ipostatizzazione metafisica di una regola metodologica ben giustificata: la decisione dello scienziato di non abbandonare mai la ricerca di leggi. Dunque la credenza metafisica nella causalità sembra piú fertile, nelle sue varie manifestazioni, della metafisica indeterministica del tipo difeso da Heisenberg. In realtà, possiamo vedere che i commenti di Heisenberg hanno avuto l'effetto di azzoppare la ricerca. È molto facile trascurare connessioni che si potrebbero trovare senza andar molto lontano, quando ci si sente continuamente ripetere che la ricerca di tali connessioni è «priva di significato».

[1] SCHLICK, *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik* cit., p. 155, scrive (cito tutto il passo; cfr. anche § 4, note 7 e 8): «I nostri tentativi di trovare un'asserzione controllabile, equivalente al principio di causalità sono falliti: i nostri tentativi di formularne una hanno condotto soltanto a pseudo-asserzioni. Tuttavia, dopo tutto, questo risultato non arriva di sorpresa, perché abbiamo già osservato che la verità della legge causale può essere controllata *nello stesso senso* in cui può essere controllata la verità di qualsiasi altra legge di natura; ma abbiamo anche indicato che a loro volta queste leggi di natura, quando siano analizzate rigorosamente, non sembrano avere il carattere di asserzioni vere o false, ma si rivelano nient'altro che regole per la (tras)formazione di tali asserzioni». In precedenza, Schlick aveva già sostenuto che il principio causale dev'essere messo sullo stesso piano delle leggi naturali. Ma siccome a quel tempo considerava le leggi di natura come asserzioni genuine, considerava anche «il principio causale... come un'ipotesi empiricamente controllabile». Cfr. *Allgemeine Erkenntnislehre* [Teoria generale della conoscenza], 1925^2, p. 374.

[*3] Si confronti, con i punti di vista espressi qui e nel resto di questo paragrafo, il cap. *IV del *Postscript*.

Le formule di Heisenberg – come le asserzioni simili che possono solo essere corroborate dalle loro conseguenze statistiche – non conducono necessariamente a conclusioni indeterministiche. Ma questo non prova, di per se stesso, che non possono esserci altre asserzioni empiriche che giustifichino queste conclusioni, o conclusioni simili: ad esempio, la conclusione che la regola metodologica menzionata – la decisione di non abbandonare mai la ricerca di leggi – non può adempiere il proprio scopo, magari perché è futile, o privo di significato, o «impossibile» (cfr. § 12, nota 2) l'andare alla ricerca di leggi e di predizioni singolari. Ma un'asserzione empirica dotata di conseguenze metodologiche, che potesse costringerci ad abbandonare la ricerca di leggi, non potrebbe esistere. Infatti un'asserzione che si suppone sia libera da elementi metafisici può avere conclusioni indeterministiche soltanto se queste conclusioni sono falsificabili [*4]. Ma si può mostrare che dette conclusioni sono false solo se riusciamo a formulare leggi, e a dedurre da esse predizioni, che siano corroborate. Di conseguenza, se assumiamo che queste conclusioni indeterministiche siano *ipotesi empiriche*, dovremmo tentare con tutte le nostre forze di controllarle, cioè di falsificarle. E questo significa che dovremmo *andare alla ricerca* di leggi e di predizioni. Dunque, non possiamo obbedire all'esortazione di abbandonare questa ricerca, senza ripudiare il carattere empirico di queste ipotesi. Ciò mostra che sarebbe autocontraddittorio pensare che possa esistere una qualsiasi ipotesi empirica la quale possa costringerci ad abbandonare la ricerca di leggi.

Non intendo qui mostrare in dettaglio come tanti tentativi di dimostrare l'indeterminismo rivelino un modo di pensare che può essere descritto soltanto come deterministico, nel senso metafisico del termine. (Ad esempio, Heisenberg tenta di dare una spiegazione causale del perché le spiegazioni causali sono impossibili [*5]). Non posso far altro che ricordare al lettore i tentativi di mostrare che le relazioni d'inde-

*4 Pur essendo valida *come replica a un positivista*, quest'affermazione, così com'è, è ingannevole: infatti un'asserzione falsificabile può avere ogni genere di conseguenze logicamente deboli, comprese conseguenze non-falsificabili. (Cfr. il quarto capoverso del § 66).

*5 La sua argomentazione è, in breve, che la causalità va all'aria a cagione della nostra interferenza coll'oggetto osservato, cioè a cagione di una certa interazione causale.

terminazione sbarrano alcune strade di ricerca possibile; cosí fa il principio della costanza della velocità della luce: l'analogia tra le due costanti *c* ed *h* – velocità della luce e costante di Planck – è stata interpretata dicendo che entrambe pongono un limite, in linea di principio, alle possibilità di ricerca. Delle questioni sollevate nel tentativo di andare alla ricerca, sia pure a tentoni, di quello che sta al di là di questa barriera, ci si liberò col ben noto metodo consistente nello sbarazzarsi dei problemi sgradevoli qualificandoli come «pseudo». Secondo me, un'analogia tra le costanti *c* e *h* c'è davvero, ma si tratta di un'analogia che, sia detto per inciso, assicura che la costante *h* non rappresenta una barriera per la ricerca piú di quanto non la rappresenti la costante *c*. Il principio della costanza della velocità della luce (e dell'impossibilità di superare tale velocità) non ci impedisce di cercare velocità che siano maggiori di quella della luce, perché si limita ad asserire che di tali velocità non ne troveremo: cioè a dire, che non saremo in grado di produrre segnali che viaggino piú velocemente della luce. E analogamente, le formule di Heisenberg non dovrebbero essere interpretate come formule che impediscono la ricerca di casi «super-puri». Esse, infatti asseriscono semplicemente che non ne troveremo, e in particolare che non potremo produrne. Le leggi che proibiscono velocità maggiori di quella della luce, e casi «super-puri», sfidano il ricercatore, cosí come lo sfidano altre asserzioni empiriche, a cercare ciò che è proibito. Perché solo tentando di falsificarle il ricercatore può controllare le asserzioni empiriche.

Da un punto di vista storico l'emergere della metafisica indeterministica è abbastanza comprensibile. Per lungo tempo i fisici credettero nella metafisica deterministica. E poiché la situazione logica non era pienamente compresa, il fallimento dei vari tentativi di dedurre gli spettri luminosi – che sono effetti statistici – da un modello meccanico dell'atomo, era destinato a produrre la crisi del determinismo. Oggi vediamo chiaramente che questo fallimento era inevitabile, perché è impossibile dedurre leggi statistiche da un modello atomico non statistico (cioè meccanico). Ma a quel tempo (intorno al 1924, al tempo cioè della teoria di Bohr, Kramers e Slater) non poteva non sembrare che, nel meccanismo di ciascun singolo atomo, le probabilità stessero prendendo il posto di leggi rigorose. L'edificio del determinismo era crollato, soprattutto perché le asserzioni probabilistiche erano espresse sotto forma di asserzioni formalmente singolari. Sulle rovine del determinismo nacque l'indeterminismo, sostenuto dal principio di indeterminazione di Heisenberg. Ma, come siamo in grado di vedere adesso, saltò fuori dallo stesso fraintendimento del significato delle asserzioni probabilistiche formalmente singolari.

La lezione che possiamo ricavare da tutto ciò è che dovremmo tentar di scoprire leggi rigorose – proibizioni – che possano fondarsi sull'esperienza. Tuttavia, dovremmo astenerci dall'emettere proibizioni che pongano limiti alle possibilità di ricerca [*6].

[*6] Piú recentemente (dopo trentatre anni) ho riformulato i miei punti di vista su questi argomenti nel mio articolo *Quantum Mechanics Without «The Observer»* cit.

Capitolo decimo

La corroborazione, ossia: come una teoria regge ai controlli

Le teorie non sono verificabili, ma possono essere «corroborate».

Si è spesso fatto il tentativo di descrivere le teorie dicendo che non sono né *vere* né *false*, ma sono, invece, piú o meno *probabili*. Piú in particoltre, si è sviluppata la logica induttiva, come una logica che non solo può assegnare i due valori «vero» e «falso» alle asserzioni, ma può assegnar loro anche gradi di probabilità: si tratta di un tipo di logica che qui verrà chiamata «*logica della probabilità*». Stando a coloro che credono nella logica della probabilità, dovrebbe essere l'induzione a determinare il grado di probabilità di un'asserzione. E dovrebbe essere un principio d'induzione a *rendere sicuro* che l'asserzione indotta è «probabilmente valida» o a *renderlo probabile* a sua volta, perché a sua volta il principio di induzione potrebbe essere soltanto «probabilmente valido». Ma secondo me l'intero problema della probabilità delle ipotesi è stato mal concepito. Invece di discutere la «probabilità» di un'ipotesi, dovremmo tentare di valutare a quali controlli, a quali prove abbia resistito; cioè, dovremmo tentare di valutare fin dove sia stata in grado di dar prova della sua capacità a sopravvivere, reggendo ai controlli. In breve, dovremmo tentare di valutare fino a che punto sia stata «corroborata» [*1].

[*1] Ho introdotto nel mio libro i termini «*corroborazione*» (*Bewährung*) e specialmente «*grado di corroborazione*» (*«Grad der Bewährung»*, «*Bewährungsgrad*») perché volevo disporre di un termine *neutrale* per descrivere il grado al quale un'ipotesi ha passato controlli severi, provando cosí «il proprio valore». Dicendo «neutrale», intendo un termine che non pregiudica il problema: se, avendo superato i controlli, l'ipotesi sia diventata «piú probabile» nel senso del calcolo della probabilità. In altre parole, ho introdotto il termine «grado di corroborazione» soprattutto per essere in

79. *A proposito della cosiddetta verificazione delle ipotesi.*

Il fatto che le teorie non sono verificabili è stato spesso trascurato. Spesso si dice che una teoria è verificata quando sono state verificate alcune delle predizioni derivate da essa. Magari si ammette che da un punto di vista logico la verificazione non è del tutto impeccabile, o che verificando certe conseguenze di un'asserzione non si potrà mai verificare l'asserzione in modo definitivo. Ma si è disposti a considerare le obiezioni di questo genere come obiezioni dovute a qualche scrupolo tutto sommato superfluo. È ben vero, ed è addirittura banalmente ovvio, si dice, che non possiamo sapere con certezza che domani il sole sorgerà, ma quest'incertezza può essere trascurata: il fatto che le teorie possano essere non solo migliorate, ma anche *falsificate da nuovi esperimenti* mette lo scienziato di fronte a una seria possibilità che può attuarsi da un momento all'altro; tuttavia una teoria non è mai stata considerata falsificata solo perché è improvvisamente andata all'aria una legge ben confermata. Non accade mai che un bel giorno vecchi esperimenti diano risultati nuovi. Ciò che accade è soltanto che nuovi esperimenti fanno cade-

grado di discutere il problema se «grado di corroborazione» possa o no essere identificato con «probabilità» (sia nel senso frequenziale sia, ad esempio, nel senso di Keynes).

Carnap tradusse il mio termine «grado di corroborazione» («*Grad der Bewährung*»), che io per primo avevo introdotto nelle discussioni del Circolo di Vienna, con «grado di conferma». (Cfr. *Testability and Meaning* cit., specialmente p. 427) e cosí il termine «grado di conferma» divenne ben presto largamente accettato. Il termine non mi piacque per via di alcune sue associazioni («rendere fermo», «stabilire fermamente», «porre al di là di ogni dubbio», «provare», «verificare»; «confermare» corrisponde piú da vicino ai termini tedeschi «*erhärten*», «*bestätigen*», che non a «*bewähren*»). In una lettera a Carnap (scritta, credo, intorno al 1939) proposi perciò di usare il termine «corroborazione» (questo termine mi era stato suggerito dal professor H. N. Parton). Ma, avendo Carnap rifiutato la mia proposta, mi conformai al suo uso, pensando che le parole non contano. Ecco perché io stesso, per un certo tempo, usai la parola «conferma» in un buon numero di pubblicazioni.

Tuttavia venne fuori che mi sbagliavo: sfortunatamente le associazioni della parola «conferma» avevano il loro peso, e si facevano sentire: «grado di conferma» fu presto usato – dallo stesso Carnap – come sinonimo (o «explicans») di «probabilità». Perciò adesso ho abbandonato questo termine in favore di «grado di corroborazione». Cfr. anche appendice *IX e § *29 del *Postscript* cit.

re una vecchia teoria. Spesso la vecchia teoria, anche quando viene messa da parte, conserva la sua validità, come una specie di caso limite della teoria nuova; vale ancora, almeno con un alto grado di approssimazione, in quei casi in cui aveva successo prima. In breve, le regolarità che sono direttamente controllabili per mezzo di esperimenti non cambiano. Possiamo certo ammettere che sia concepibile, o logicamente possibile, che cambino, ma questa possibilità viene trascurata dalla scienza empirica, e non tocca i suoi metodi. Al contrario, il metodo scientifico presuppone l'*immutabilità dei processi naturali*, ossia il «principio dell'uniformità della natura».

In favore di quest'argomentazione c'è qualcosa da dire; ma quello che c'è da dire non modifica la mia tesi. L'argomentazione in parola esprime la fede metafisica nell'esistenza di regolarità nel nostro mondo (fede che io condivido, e senza la quale l'azione pratica è quasi inconcepibile) [*1]. Tuttavia la questione che dobbiamo affrontare – la questione cioè che rende significante in questo contesto la non-verificabilità delle teorie – è situata su di un piano completamente diverso. Coerentemente con il mio atteggiamento verso altre questioni metafisiche, mi asterrò dall'argomentare pro o contro la fede nell'esistenza di regolarità nel nostro mondo. Ma tenterò di mostrare che la *non-verificabilità delle teorie è importante dal punto di vista metodologico*. Su questo piano mi oppongo all'argomentazione che ho presentato.

Considererò pertanto rilevante solo uno dei punti di quest'argomentazione: il riferimento al cosiddetto «principio dell'uniformità della natura». Mi sembra che questo principio esprima in modo molto superficiale un'importante regola metodologica: una regola che potrebbe essere vantaggiosamente derivata proprio dalla considerazione della non-verificabilità delle teorie [*2].

Supponiamo che domani il sole non sorga (e che nonostante ciò continuiamo a vivere e a perseguire i nostri interessi scientifici). Se una cosa del genere dovesse accadere, la scienza dovrebbe tentare di *spiegarla*, cioè di derivarla da

[*1] Cfr. appendice *x, e anche il § *15 del mio *Postscript*.

[*2] Intendo riferirmi alla regola secondo cui qualsiasi nuovo sistema di ipotesi dovrebbe dare come risultato, o spiegare, le vecchie regolarità corroborate. Cfr. anche § *3 (terzo capoverso) del *Postscript* cit.

leggi. È presumibile che si dovrebbero rivedere in maniera drastica certe teorie esistenti; ma le teorie, dopo essere state rivedute, non dovrebbero solo rendere conto del nuovo stato di cose: dovrebbero essere tali che *da esse sia possibile derivare anche le nostre esperienze antecedenti*. Dal punto di vista metodologico si può vedere che qui al principio dell'uniformità della natura si sostituisce il postulato dell'*invarianza delle leggi di natura* rispetto sia al tempo sia allo spazio. Io penso, perciò, che sarebbe un errore asserire che le regolarità naturali non cambiano. (Questa sarebbe un'asserzione tale che non si potrebbe argomentare né in suo favore né in suo sfavore). Ciò che dovremmo dire, piuttosto, è che fa parte della nostra *definizione* delle leggi di natura il postulare che esse devono essere invarianti rispetto a spazio e tempo, ed anche il postulare che non devono avere eccezioni. Cosí, da un punto di vista metodologico, la possibilità di falsificare una legge corroborata non è affatto priva di significato. Ci aiuta a trovare che cosa esigiamo, e che cosa ci aspettiamo, dalle leggi di natura. E il «principio dell'uniformità della natura» può di nuovo essere considerato come un'interpretazione metafisica di una regola metodologica, proprio come il suo stretto parente, la «legge di causalità».

Un certo tentativo di sostituire alle asserzioni metafisiche di questo genere i principî del metodo conduce al «principio d'induzione», che dovrebbe governare il metodo dell'induzione, e quindi quello della verificazione delle teorie. Ma questo tentativo fallisce perché, a sua volta, il principio d'induzione ha un carattere metafisico. Come ho indicato nel § 1, l'assunzione che il principio d'induzione sia empirico conduce a un regresso infinito. Tale principio potrebbe perciò essere introdotto soltanto come una proposizione primitiva (o un postulato, o un assioma). Forse la cosa non importerebbe poi molto, se non fosse che il principio di induzione dovrebbe essere trattato in ogni caso come un'*asserzione non-falsificabile*. Infatti, se questo principio – che dovrebbe convalidare le inferenze delle teorie – fosse a sua volta falsificabile, allora sarebbe falsificato con la prima teoria che venisse falsificata, perché allora questa teoria sarebbe una conclusione derivata con l'aiuto del principio d'induzione; e naturalmente, in quanto premessa, questo principio sarebbe falsificato per il *modus tollens* ogni volta che risultasse falsificata una teoria che è stata derivata da esso [*3]. Ma ciò significa che un principio d'induzione falsificabile sarebbe falsificato sempre di nuovo, ad ogni passo in avanti fatto dalla scienza. Sarebbe perciò necessario introdurre un principio d'induzione di cui si assume che non sia falsificabile. Ma ciò equivarrebbe alla nozione, mal concepita, di asserzione sintetica valida a priori, cioè, di asserzione inconfutabile intorno alla realtà.

Cosí, se tentiamo di trasformare la nostra fede metafisica nell'uniformità della natura e nella verificabilità delle teorie, in una teoria della conoscenza basata sulla logica induttiva, non ci rimane altro che la scelta fra un regresso all'infinito e l'*apriorismo*.

80. *La probabilità di un'ipotesi e la probabilità degli eventi: critica della logica della probabilità.*

Anche ammesso che le teorie non siano mai verificate in modo definitivo, non può darsi che riusciamo a renderle sicure in misura piú o meno grande, che riusciamo a renderle piú o meno probabili? Dopo tutto, potrebbe ben darsi che la questione della *probabilità delle ipotesi* potesse essere ridotta, diciamo, a quella della *probabilità degli eventi*, e cosí essere resa suscettibile di trattamento logico e matematico [*1].

Come la logica induttiva in generale, la teoria della probabilità delle ipotesi sembra essere sorta da una confusione tra questioni psicologiche e questioni logiche. Indubbiamente, i nostri sentimenti soggettivi di convinzione sono di intensità differenti, e il grado di fiducia con cui aspettiamo l'adempimento di una predizione e l'ulteriore corroborazione di un'ipotesi, dipende probabilmente, tra l'altro, dal modo in cui quest'ipotesi ha finora retto ai controlli, cioè dalla sua cor-

[*3] Secondo il punto di vista induttivistico discusso qui, le premesse della derivazione della teoria consistono del principio di induzione *e* di asserzioni d'osservazione. Ma si assume tacitamente che queste ultime siano incrollabili e riproducibili, cosí che ad esse non può essere addossata la responsabilità per il fallimento della teoria.

[*1] Questo paragrafo contiene principalmente una critica del tentativo di Reichenbach di interpretare *la probabilità delle ipotesi* nei termini di *una teoria frequenziale della probabilità degli eventi*. Nel § 83 si trova una critica all'approccio di Keynes. ∗ Si noti che Reichenbach è ansioso di ridurre *la probabilità di un'asserzione o ipotesi* (che molti anni piú tardi Carnap avrebbe chiamato «probabilità [1]») a una frequenza («probabilità [2]»).

roborazione passata. Ma che queste questioni psicologiche non appartengano all'epistemologia o alla metodologia è ben riconosciuto anche da coloro che credono nella logica della probabilità. Essi sostengono, comunque, che in base a decisioni induttive è possibile assegnare gradi di probabilità alle *stesse ipotesi*, e, oltre a ciò, che è possibile ridurre questo concetto al concetto di probabilità degli eventi.

La probabilità di un'ipotesi è per lo piú considerata semplicemente come un caso speciale del problema generale della *probabilità di un'asserzione*, e questa a sua volta viene considerata come nient'altro che il problema della *probabilità di un evento*, espresso in una terminologia particolare. Cosí leggiamo, ad esempio in Reichenbach: «Che si ascriva la probabilità ad asserzioni o ad eventi è una faccenda soltanto terminologica. Finora abbiamo considerato come un caso della probabilità di eventi il fatto che all'uscire di una certa faccia di un dado sia stata assegnata la probabilità di 1/6. Ma potremmo dire altrettanto correttamente che proprio all'*asserzione* "uscirà la faccia dell'1" è stata assegnata la probabilità di 1/6»[1].

Quest'identificazione della probabilità degli eventi con la probabilità delle asserzioni può essere meglio compresa se ricordiamo quello che si è detto nel § 23. Qui il concetto «evento» è stato definito come una classe di asserzioni singolari. Deve perciò essere lecito il parlare della *probabilità delle asserzioni* in luogo della probabilità degli eventi. Cosí, possiamo considerare come un semplice cambiamento di terminologia il fatto che le sequenze-riferimento siano interpretate come sequenze di asserzioni. Se pensiamo a un'«alternativa», o, piuttosto, ai suoi elementi, come rappresentati da asserzioni, possiamo descrivere l'uscita di testa con l'asserzione «k è testa», e il fatto che non sia uscita testa con la negazione di quest'asserzione. In questo modo otteniamo una sequenza di asserzioni della forma $p_j, p_k, \bar{p}_l, p_m, \bar{p}_n, \ldots$, in cui un'asserzione p_i viene talvolta caratterizzata come «vera» e talvolta (mettendo un trattino sopra il suo nome) come «falsa». La probabilità all'interno di un'alternativa può cosí essere interpretata come la «*frequenza relativa di verità*»[2] *del-*

[1] REICHENBACH, in «Erkenntnis», 1 (1930), pp. 171 sg.

[2] Secondo KEYNES, *A Treatise on Probability* cit., pp. 101 sgg., l'espressione «frequenza di verità» è dovuta a Whitehead; cfr. la nota successiva.

le asserzioni entro una sequenza di asserzioni (e non come la frequenza relativa di una proprietà).

Volendo, possiamo chiamare «probabilità delle asserzioni» o «probabilità delle proposizioni» il concetto di probabilità cosí trasformato. E possiamo mostrare che esiste una strettissima connessione fra questo concetto e il concetto di «verità». Infatti, se la sequenza di asserzioni diventa sempre piú breve, e alla fine contiene un solo elemento, cioè *una sola* asserzione, allora la probabilità, o frequenza di verità, della sequenza, può assumere soltanto i valori 1 e 0, secondo che la singola asserzione sia vera o falsa. La verità o la falsità di un'asserzione può cosí essere considerata come un caso limite di probabilità, e, inversamente, la probabilità può essere considerata come una generalizzazione del concetto di verità, in quanto comprende quest'ultimo come caso limite. Infine, è possibile definire operazioni con frequenze di verità, in modo tale che le operazioni di verità usuali della logica classica diventano casi limite di queste operazioni. E il calcolo di queste operazioni può essere chiamato «*logica della probabilità*»[3].

Ma possiamo davvero identificare la *probabilità delle ipotesi* con la probabilità delle asserzioni, definita in questa maniera, e cosí, indirettamente, con la probabilità degli eventi? Io credo che quest'identificazione sia il risultato di una confusione. L'idea è che la probabilità di un'ipotesi, per il fatto che è ovviamente un genere di probabilità di un'asserzione, deve cadere sotto il titolo di «probabilità delle asserzioni» *nel senso appena definito*. Ma questa conclusione si rivela priva di garanzie, e perciò la terminologia è altamente inadatta. Forse, dopo tutto, sarebbe meglio non usare mai l'espressione «probabilità delle asserzioni» quando si ha in mente la probabilità degli eventi [*2].

[3] Nel testo presento nelle sue grandi linee la costruzione della logica della probabilità sviluppata da Reichenbach (*Wahrscheinlichkeitslogik* [Logica della probabilità], in «Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften», Physik.-Mathem. Klasse, 29, 1932, pp. 476 sgg.) che segue E. L. Post («American Journal of Mathematics», 43, 1921, p. 184) e, nel medesimo tempo, la teoria frequenziale di von Mises. La forma della teoria frequenziale discussa da KEYNES, *A Treatise on Probability* cit., pp. 101 sgg., è simile.

[*2] Penso ancora: *a*) che la cosiddetta «probabilità delle ipotesi» non possa essere interpretata mediante una frequenza di verità; *b*) che sia meglio chiamare «probabilità di un evento» la probabilità definita da una frequen-

Comunque sia, io affermo che le questioni che sorgono dal concetto di *probabilità delle ipotesi* non sono neppure sfiorate dalle considerazioni basate sulla logica della probabilità. Affermo che in nessuna circostanza l'asserzione di chi dice che un'ipotesi non è vera, ma «probabile», può essere tradotta in un'asserzione intorno alla probabilità di eventi.

Infatti, se si tenta di ridurre l'idea di probabilità delle ipotesi all'idea di frequenza di verità, che usa il concetto di sequenza di asserzioni, ci si trova subito a dover affrontare la questione: *in riferimento a quale sequenza* di asserzioni si può assegnare un valore di probabilità a un'ipotesi? Reichenbach identifica un'«asserzione della scienza naturale» – e con questo termine intende un'ipotesi scientifica – con una sequenza-riferimento di asserzioni. Dice: «... Le asserzioni della scienza naturale, che non sono mai asserzioni singolari, sono, in realtà, sequenze di asserzioni alle quali, rigorosamente parlando, dobbiamo assegnare, non il grado di probabilità 1, ma un valore di probabilità piú piccolo. Perciò solo la logica della probabilità fornisce la forma logica capace di rappresentare rigorosamente il concetto di conoscenza proprio della scienza naturale» [4]. Tentiamo ora di seguire il suggerimento che le ipotesi sono, in se stesse, sequenze di asserzioni. Un modo di interpretare questo suggerimento consisterebbe nel prendere, come elementi di una tale sequenza, le varie asserzioni singolari che possono contraddire l'ipotesi, o concordare con essa. La probabilità di quest'ipotesi sarebbe allora determinata dalla frequenza di verità di quelle tra le asserzioni che concordano con essa. Ma questo darebbe una probabilità di ½ all'ipotesi che fosse confutata in media da un'asserzione sí e una no della sequenza! Allo scopo di sfuggire a questa rovinosa conclusione possiamo tentare ancora due espedienti [*3]. Uno di questi espedienti consistereb-

za relativa, sia che si tratti di una frequenza di verità, sia che si tratti della frequenza di un evento; *c*) che la cosiddetta «probabilità di un'ipotesi» (nel senso della sua accettabilità) *non* sia un caso speciale della «probabilità delle asserzioni». Ed ora sarei propenso a considerare la «probabilità delle asserzioni come un'interpretazione (l'interpretazione logica) tra le varie interpretazioni possibili del calcolo formale delle probabilità, e non come una frequenza di verità. (Cfr. appendici *II, *IV e *IX, e il *Postscript* cit.).

[4] REICHENBACH, *Wahrscheinlichkeitslogik* cit., p. 488; p. 15 della ristampa.

[*3] Si suppone, qui, che a questo punto ci si sia già convinti che ogni volta che ci si trova di fronte a una netta falsificazione si attribuirà all'ipotesi la

be nell'assegnare all'ipotesi una certa probabilità – magari non molto precisa – sulla base di una stima del rapporto fra tutti i controlli che l'ipotesi ha superato e tutti i controlli che non sono ancora stati tentati. Ma anche questa strada non porta da nessuna parte. Infatti questa stima può proprio essere calcolata con precisione, e il risultato è sempre che la probabilità è zero. E infine potremmo tentare di basare la nostra stima sul rapporto fra quei controlli che hanno condotto a un risultato favorevole e quelli che hanno condotto a un risultato indifferente, cioè a un risultato che non ha dato luogo a una decisione ben definita. (In questo modo, in realtà, si potrebbe ottenere qualcosa che somiglia alla misura del sentimento soggettivo di fiducia con cui lo sperimentatore considera i suoi risultati). Ma neppure quest'ultimo espediente è destinato a funzionare, anche se trascuriamo il fatto che con questo genere di stima ci siamo allontanati di molto dal concetto di una frequenza di verità e da quello di probabilità di eventi. (Questi concetti sono basati sul rapporto in cui le asserzioni vere stanno con le asserzioni false, e naturalmente non dobbiamo mettere un'asserzione indifferente su un piano di eguaglianza con un'asserzione oggettivamente falsa). La ragione per cui anche quest'ultimo tentativo fallisce, è che la definizione suggerita renderebbe disperatamente soggettiva la probabilità di un'ipotesi: la probabilità di un'ipotesi dipenderebbe infatti dall'addestramento e dall'abilità dello sperimentatore e non da risultati oggettivamente riproducibili e controllabili.

Ma io credo che sia assolutamente impossibile accettare il suggerimento che un'ipotesi può essere considerata come una sequenza di asserzioni. La cosa sarebbe possibile se le asserzioni universali avessero la forma: «Per ogni valore di *k* è vero che al luogo *k* accade una certa cosa». Se le asserzioni universali avessero questa forma, potremmo considerare le asserzioni base (quelle che contraddicono l'asserzione universale, o concordano con essa) come elementi di una sequenza di asserzioni, cioè della sequenza che si deve prendere come asserzione universale. Ma, come abbiamo visto (§§ 15 e 28), le asserzioni universali non hanno questa forma. Le

probabilità zero, cosicché la discussione sarà ora confinata a quei casi in cui non si sia ottenuta nessuna falsificazione netta.

asserzioni-base non sono mai derivabili dalle sole asserzioni universali [*4], che pertanto non possono essere considerate come sequenze di asserzioni-base. Se comunque tentiamo di prendere in considerazione le sequenze di quelle negazioni di asserzioni-base che *sono* derivabili da asserzioni universali, allora per *ogni* ipotesi autocompatibile, la stima condurrà alla stessa probabilità, cioè alla probabilità 1. Infatti allora dovremmo considerare il rapporto fra le asserzioni-base negate *non falsificate* che si possono derivare (o altre asserzioni derivabili) e quelle *falsificate*. Ciò significa che invece di prendere in considerazione una frequenza di verità dovremmo prendere in considerazione il valore complementare di una frequenza di falsità. Comunque questo valore sarebbe eguale a 1. Infatti la classe delle asserzioni derivabili e perfino la classe delle negazioni derivabili delle asserzioni-base, sono entrambe infinite. D'altra parte, non può esistere, al massimo, che un numero finito di asserzioni-base falsificanti accettate. Cosí, neppure se trascuriamo il fatto che le asserzioni universali non sono mai sequenze di asserzioni, e neppure se tentiamo di interpretarle come qualcosa del genere e di mettere in correlazione con esse sequenze di asserzioni singolari completamente decidibili, neppure allora otteniamo un risultato accettabile.

Ma dobbiamo ancora esaminare un'altra possibilità, completamente diversa, di spiegare la probabilità di un'ipotesi in termini di sequenze di asserzioni. Si può ricordare che abbiamo detto che un accadimento singolare dato è «probabile» (nel senso di «asserzione probabilistica formalmente singolare») se è un *elemento di una sequenza* di accadimenti che hanno una certa probabilità. Analogamente potremmo tentare di chiamare «probabile» un'ipotesi che sia un *elemento*

[*4] Come ho spiegato nel § 28, le asserzioni singolari che *possono* essere dedotte da una teoria – le «asserzioni esemplificatorie» – non hanno il carattere di asserzioni-base, o asserzioni di osservazione. Tuttavia, se decidiamo di prendere la sequenza di queste asserzioni e di basare la nostra probabilità sulla frequenza della verità all'interno di questa sequenza, la probabilità sarà sempre eguale a 1, per quanto spesso la teoria possa essere stata falsificata; infatti, come abbiamo mostrato nel § 28, nota *1, quasi ogni teoria è «verificata» da quasi tutti gli esempi (cioè, in quasi tutti i posti k). La discussione che segue qui, nel testo, contiene un argomento molto simile – anch'esso basato su «asserzioni esemplificatorie» (cioè, su asserzioni-base negate) – progettato per mostrare che la probabilità di un'ipotesi, quando sia basata su queste asserzioni-base negate, sarà sempre eguale a uno.

di una sequenza di ipotesi che hanno una frequenza di verità ben definita. Ma questo tentativo fallisce di nuovo, del tutto indipendentemente dalla difficoltà di determinare la sequenza-riferimento (che può essere scelta in molti modi; cfr. § 71). Infatti non possiamo parlare di una frequenza di verità all'interno di una sequenza di ipotesi, semplicemente perché, di un'ipotesi, non possiamo mai sapere se è vera: se *potessimo* saperlo, non avremmo affatto bisogno del concetto di probabilità di un'ipotesi. Come abbiamo fatto prima, potremmo ora tentare di prendere come punto di partenza il complemento della frequenza di falsità all'interno di una sequenza di ipotesi. Ma se ad esempio definiamo la probabilità di un'ipotesi con l'aiuto del rapporto fra ipotesi non falsificate e ipotesi falsificate della sequenza, allora, come prima, la probabilità di *ogni* ipotesi in *ogni* sequenza di riferimento *infinita* sarà eguale a 1. E non saremmo in una posizione migliore neppure se scegliessimo una sequenza di riferimento *finita*. Assumiamo, infatti, d'accordo con questa procedura, di poter assegnare agli elementi di qualche sequenza (*finita*) di ipotesi un grado di probabilità compreso tra 0 e 1: ad esempio, il valore ¾. (Cosa che possiamo fare se otteniamo l'informazione che è stata falsificata questa o quell'ipotesi appartenente alla sequenza). Siccome queste ipotesi *falsificate* sono elementi della sequenza, dovremmo cosí assegnar loro, *proprio per via di quest'informazione*, non il valore 0, ma il valore ¾. E in generale, la probabilità di un'ipotesi decrescerebbe di $^1/_n$ in conseguenza dell'informazione che l'ipotesi è falsa: qui n è il numero dell'ipotesi nella sequenza-riferimento. Tutto ciò contraddice in modo lampante il programma che consiste nell'esprimere, in termini di una «*probabilità delle ipotesi*», il grado di credibilità che dobbiamo assegnare a un'ipotesi, tenuto conto delle prove che la convalidano o la invalidano.

Mi sembra che quest'analisi esaurisca le possibilità di fondare il concetto di probabilità di un'ipotesi sul concetto della frequenza delle asserzioni vere (o sulla frequenza delle asserzioni false) e quindi sulla teoria frequenziale della probabilità degli eventi [*5].

[*5] I miei tentativi precedenti, di estrarre qualche senso dall'asserzione piuttosto ermetica di Reichenbach, secondo cui la probabilità di un'ipotesi

Io credo che il tentativo di identificare la probabilità di un'ipotesi con la probabilità degli eventi debba essere considerato un completo fallimento. Questa conclusione è del tutto indipendente, sia dal fatto che si accetti la pretesa (avanzata da Reichenbach) che *tutte le ipotesi della fisica* sono «in

dev'essere misurata da una frequenza di verità, si potrebbero riassumere nel modo seguente. (Per un riassunto simile, seguito da una critica, si veda il penultimo capoverso dell'appendice *I).

Approssimativamente, possiamo tentare due possibili strade per definire la probabilità di una teoria. Una è quella che consiste nel contare il numero di asserzioni controllabili sperimentalmente che appartengono alla teoria e nel determinare la frequenza relativa di quelle che si rivelano vere; questa frequenza relativa può essere considerata come una misura della probabilità di una teoria. Possiamo chiamare questa probabilità *probabilità del primo genere*. In secondo luogo possiamo considerare la teoria come un elemento di una classe di entità ideali – cioè, di teorie proposte da altri scienziati – e possiamo quindi determinare le frequenze relative all'interno di questa classe. Possiamo dare a questa probabilità il nome di *probabilità del secondo genere*.

Nel testo ho inoltre tentato di mostrare che ciascuna di queste due possibilità di dare un senso all'idea, elaborata da Reichenbach, di frequenza di verità, conduce a risultati che non possono non essere assolutamente inaccettabili per i difensori della teoria probabilistica dell'induzione.

Reichenbach replicò alle mie critiche, non tanto difendendo i suoi punti di vista, ma attaccando i miei. Nella sua recensione al mio libro (in «Erkenntnis», 5, 1935, pp. 267-84) disse che «i risultati di questo libro sono completamente insostenibili», e spiegò la loro insostenibilità in base al fallimento del mio «metodo»: in base alla mia incapacità di «tirar fuori tutte le conseguenze» del mio sistema concettuale.

Il § IV della sua recensione (pp. 274 sg.) è dedicato al nostro problema: la probabilità delle ipotesi. Comincia cosí: «A questo proposito possiamo aggiungere alcune osservazioni sulla probabilità delle teorie, osservazioni che dovrebbero rendere piú completa la mia fin troppo breve comunicazione su quest'argomento, e potranno forse eliminare una certa oscurità che ancora circonda il problema». Dopo di ciò segue un passo che forma il secondo capoverso della presente nota, il capoverso, cioè, che comincia con la parola «approssimativamente» (la sola parola che ho aggiunto al testo di Reichenbach).

Reichenbach non dice nulla del fatto che il suo tentativo di eliminare «l'oscurità che ancora circonda il problema» non è altro che un sommario – e un sommario per sua stessa ammissione approssimativo – di alcune pagine dello stesso libro che sta criticando. Tuttavia, a dispetto di questo suo silenzio, ritengo di poter considerare un grande complimento il fatto che un autore cosí esperto in materia di probabilità (che al tempo in cui scrisse la sua replica al mio libro poteva vantare a suo credito due libri e circa una dozzina di articoli sull'argomento) accetti i risultati dei miei sforzi per «trarre tutte le conseguenze» della sua «troppo breve comunicazione sull'argomento». Il successo dei miei sforzi era dovuto, io credo, a una regola di «metodo»: la regola secondo cui, se desideriamo che le nostre critiche abbiano qualche valore, prima di criticare il nostro oppositore dovremmo sempre tentare di chiarire e di rafforzare il piú possibile la sua posizione.

realtà» o «se le si esamina piú da vicino», nient'altro che asserzioni probabilistiche (su qualche frequenza media all'interno di sequenze di osservazioni che mostrano sempre deviazioni da qualche valore medio) sia dal fatto che siamo propensi a fare distinzione fra due *tipi* di leggi naturali: le leggi «deterministiche» o «di precisione» da un lato e le «leggi probabilistiche» o «ipotesi di frequenza» dall'altro. Infatti, entrambi questi tipi sono assunzioni ipotetiche che a loro volta non possono mai diventare «probabili»: possono solo essere corroborate, nel senso che possono «provare il loro valore» sotto il fuoco: sotto il fuoco dei nostri controlli.

Come dobbiamo spiegare il fatto che coloro che credono nella logica della probabilità hanno abbracciato il punto di vista opposto? Dove sta l'errore di Jeans, quando scrive – da principio in un senso col quale potrei andare completamente d'accordo – che «... non possiamo conoscere nulla... *con certezza*», ma poi va avanti a dire: «Nel migliore dei casi possiamo trattare soltanto con *probabilità*. [E] le predizioni della nuova teoria dei quanti vanno tanto d'accordo [con le osservazioni], che le probabilità in favore del fatto che lo schema abbia qualche corrispondenza con la realtà sono *enormi*. In realtà, possiamo dire che è *quasi certo* che lo schema sia quantitativamente vero...» [5]?

L'errore piú comune consiste indubbiamente nel credere che le stime ipotetiche di frequenze, vale a dire le ipotesi che riguardano probabilità, possano, a loro volta, essere soltanto probabili; o, in altre parole, nell'assegnare alle *ipotesi di probabilità* qualche grado di una supposta *probabilità delle ipotesi*. Possiamo forse essere in grado di produrre un argomento persuasivo in favore di questa conclusione erronea, se ricordiamo che le ipotesi concernenti la probabilità non sono, per quanto riguarda la loro forma logica (e senza alcun riferimento alla nostra richiesta metodologica della falsificabilità) né verificabili né falsificabili (cfr. §§ 65-68). Non sono verificabili perché sono asserzioni universali, e non sono strettamente falsificabili perché non potranno mai essere contraddette logicamente da un'asserzione-base. Sono dunque (co-

[5] JEANS, *The New Background of Science* cit., p. 58. (Jeans scrive in corsivo solo le parole «per certo»).

me la mette Reichenbach) *completamente indecidibili*[6]. Ora, come ho tentato di mostrare, possono essere «*confermate*» *meglio o meno bene*, e ciò vuol dire che possono concordare, piú o meno, con asserzioni-base accettate. Questo è il punto dove può sembrare che entri in ballo la logica della probabilità. La simmetria tra verificabilità e falsificabilità accettata dalla logica induttivistica classica suggerisce la credenza che debba essere possibile correlare, con queste asserzioni probabilistiche «indecidibili», qualche scala di gradi di validità, qualcosa come «gradi continui di probabilità i cui limiti, superiore e inferiore, limiti peraltro irraggiungibili, sono la verità e la falsità»[7], per citare ancora una volta Reichenbach. Tuttavia, secondo il mio punto di vista, le asserzioni probabilistiche, proprio perché sono completamente indecidibili, sono *metafisiche* a meno che non decidiamo di renderle falsificabili accettando una regola metodologica. Cosí, il semplice risultato della loro non-falsificabilità non è che possono essere corroborate meglio o meno bene, ma che *non possono affatto essere corroborate empiricamente*. Perché altrimenti – visto che non escludono nulla e sono perciò compatibili con ogni asserzione-base – si potrebbe dire che sono «corroborate» da *ogni asserzione base arbitrariamente scelta* (dotata di un qualsiasi grado di composizione), purché tale asserzione-base descriva l'accadere di qualche caso pertinente.

Io credo che la fisica faccia uso di asserzioni probabilistiche solo nel modo che ho discusso diffusamente in relazione alla teoria della probabilità; e, piú in particolare, che usi assunzioni probabilistiche proprio come usa le altre ipotesi, cioè come asserzioni falsificabili. Ma dovrei rifiutarmi di prendere parte a qualsiasi disputa circa il modo in cui il fisico procede «di fatto»: questo, infatti, non può non rimanere, in gran parte, una faccenda d'interpretazione.

[6] REICHENBACH, in «Erkenntnis», 1 (1930), p. 169. (Cfr. anche la risposta di Reichenbach alla mia nota comparsa su «Erkenntnis», 3, 1933, pp. 426 sg.). Idee simili, intorno ai gradi di probabilità o di certezza della conoscenza induttiva, ricorrono molto frequentemente (cfr. ad es., B. RUSSELL, *Our Knowledge of the External World* [La nostra conoscenza del mondo esterno], 1926, pp. 225 sg., e *The Analysis of Matter* [L'analisi della materia], 1927, pp. 141 e 398).

[7] REICHENBACH, in «Erkenntnis», 1 (1930), p. 186 (cfr. § 1, nota 4).

Abbiamo qui una bellissima illustrazione del contrasto tra il mio punto di vista e quello che nel § 10 ho chiamato il punto di vista «naturalistico». Ciò che si può mostrare è, primo, che il mio punto di vista è, internamente, logicamente non-contraddittorio e, secondo, che è libero da quelle difficoltà che intralciano gli altri punti di vista. È incontestabilmente impossibile provare che il mio punto di vista è corretto e può ben darsi che una controversia coi sostenitori di un'altra logica della scienza si riveli futile. Tutto ciò che si può mostrare è che il mio approccio a questo particolare problema è una conseguenza della concezione della scienza che sono andato difendendo [*6].

81. *Logica induttiva e logica della probabilità.*

La probabilità delle ipotesi non può essere ridotta alla probabilità degli eventi. Questa è la conclusione che emerge dall'esame portato a termine nel paragrafo precedente. Ma non potrebbe darsi che un approccio differente conduca a una definizione soddisfacente dell'idea di *probabilità delle ipotesi*?

Io non credo che sia possibile costruire un concetto di probabilità delle ipotesi che possa essere interpretato come quello che esprime un «grado di validità» dell'ipotesi, in analogia coi concetti «vero» e «falso» (e che oltre a ciò stia, col concetto di «probabilità oggettiva», cioè di frequenza relativa, in una relazione abbastanza stretta da giustificare l'uso della parola «probabilità») [1]. Nondimeno, per amore di di-

[*6] I due ultimi capoversi furono provocati dall'approccio «naturalistico», adottato qualche volta da Reichenbach, Neurath e altri (cfr. § 10).

[1] (Questa nota fu aggiunta quando il libro era già in bozze). È concepibile che per stimare i gradi di corroborazione si possa trovare un sistema formale che mostri certe limitate analogie con il calcolo della probabilità (ad esempio, col teorema di Bayes), senza peraltro aver nulla in comune con la teoria frequenziale. Riconosco il mio debito verso il dottor J. Hosiasson per avermi suggerito questa possibilità. Mi accontento, però, che ricorrendo a tali metodi, sia impossibile affrontare *il problema dell'induzione* con qualche speranza di successo. * Cfr. anche il *Postscript* cit., § *57, nota 3.

* A partire dal 1938 ho sostenuto il punto di vista secondo cui, «per giustificare l'uso della parola "probabilità"», come la mette il mio testo, dovremmo mostrare che sono soddisfatti gli assiomi del calcolo formale. (Cfr. le appendici *II-*V, e specialmente il § *28 del *Postscript*). Ciò comprende-

scussione adotterò ora la *supposizione* che un tale concetto sia stato effettivamente costruito con successo, e ciò allo scopo di sollevare la questione: che influenza avrebbe questo fatto sul problema dell'induzione?

Supponiamo che una certa ipotesi – ad esempio, la teoria di Schrödinger – sia riconosciuta «probabile» in qualche senso definito del termine: ossia, o «probabile a questo o quel grado numerico», o, semplicemente, «probabile» senza specificazione di grado. L'asserzione che descrive la teoria di Schrödinger come «probabile» può essere chiamata la *valutazione* [*appraisal*] della teoria.

Naturalmente una valutazione dev'essere un'asserzione sintetica – un'asserzione intorno alla «realtà» – proprio come lo sarebbe l'asserzione «la teoria di Schrödinger è vera» o «la teoria di Schrödinger è falsa». È ovvio che tutte le asserzioni di questo genere dicono qualcosa intorno all'adeguatezza della teoria, e perciò non sono certamente tautologiche [*1]. Dicono che una teoria è adeguata o inadeguata, o che

rebbe, naturalmente, il soddisfacimento del teorema di Bayes. Per quanto riguarda le analogie formali fra il teorema di Bayes sulla *probabilità* e certi problemi sul *grado di corroborazione*, cfr. appendice *IX, punto 9 (VII) della Prima nota, e i punti 12 e 13 del § *32 del *Postscript* cit.

[*1] L'asserzione probabilistica $p(S, e) = r$, in parole: «La teoria di Schrödinger, data la prova e, ha la probabilità r» – asserzione di probabilità logica relativa o condizionale – può certo essere tautologica (purché i valori di e e di r siano stati scelti in modo da adattarsi l'un l'altro: se e consiste solo di resoconti d'osservazione, in un universo sufficientemente ampio r dovrà essere eguale a zero). Ma la «valutazione», nel nostro senso, avrebbe una forma differente (cfr. § 84, specialmente il testo relativo alla nota *2), ad esempio la forma seguente: $p_k(S) = r$, dove k è la data di oggi; o, in parole: «*Oggi* (tenuto conto delle prove totali effettive a nostra disposizione ora), la teoria di Schrödinger ha una probabilità r». Allo scopo di ottenere questa valutazione, $p_k(S) = r$, 1) dall'asserzione tautologica di probabilità relativa $p(S, e) = r$, e, 2), dall'asserzione «e è la prova totale a nostra disposizione oggi», dobbiamo applicare un *principio d'inferenza* (che nei §§ *43 e *51 del *Postscript* ho chiamato «regola di assoluzione [*absolution*]»). Questo principio d'inferenza somiglia moltissimo al *modus ponens*, e potrebbe perciò sembrare che lo si debba considerare analitico. Ma il considerarlo analitico equivale alla decisione di considerare p_k come *definita* da 1) e 2), o, in ogni caso, come significante *niente di piú* di quanto non significhino 1) e 2) prese insieme; in questo caso però non si può interpretare p_k come fornita di significanza pratica: *certo*, non può essere interpretata come una misura pratica dell'accettabilità. Ciò si vede meglio se si considera che in un universo sufficientemente grande $p_k(t, e) \approx 0$ per *ogni* teoria universale t, purché e consista solo di asserzioni singolari. (Cfr. appendici *VII e *VIII). Ma in pratica, è certo che accettiamo effettivamente alcune teorie e ne rigettiamo altre.

Se, d'altra parte, interpretiamo p_k come *grado di adeguatezza o di accet-*

è adeguata in qualche grado. Inoltre, una valutazione della teoria di Schrödinger dev'essere un'asserzione sintetica *non-verificabile*, proprio come la teoria stessa. È chiaro infatti che la «probabilità» di una teoria, cioè la probabilità che la teoria continuerà ad essere accettabile – non può essere dedotta *in modo definitivo* da asserzioni-base. Siamo perciò costretti a chiedere: in che modo può essere giustificata la valutazione di una teoria? In che modo può essere controllata? (Cosí risorge il problema dell'induzione; cfr. § 1).

Per quanto riguarda la valutazione stessa, se ne può, a sua volta, o asserire la verità, oppure si può dire che è «probabile». Se la si considera «vera», allora dev'essere un'*asserzione sintetica vera* che non è stata verificata empiricamente, un'asserzione sintetica che è vera a priori. Se la si considera «probabile», è necessaria una *nuova* valutazione: per cosí dire, la valutazione di una valutazione, e perciò una valutazione di un livello piú alto. Ma ciò significa che siamo intrappolati in un regresso all'infinito. L'appello alla probabilità dell'ipotesi non è in grado di migliorare la precaria situazione della logica induttiva.

La maggior parte di coloro che credono nella logica induttiva sostengono il punto di vista secondo cui alla valutazione si arriva per mezzo di un «principio di induzione» che assegna probabilità alle ipotesi indotte. Ma se assegnano una probabilità a questo principio di induzione, allora il regresso infinito continua. D'altra parte, se assegnano «verità» al principio, allora l'unica scelta che gli resta è quella tra regresso infinito e apriorismo. «Una volta per tutte – scrive Heymans – la teoria della probabilità non è capace di spiegare i ragionamenti induttivi: infatti, esattamente lo stesso problema che si cela nell'una si cela anche nell'altra (nell'applicazione empirica della teoria della probabilità). In entrambi i casi la conclusione va oltre ciò che è contenuto nelle premesse»[2]. Dunque, sostituendo alla parola «vero» la parola

tabilità, allora il principio d'inferenza menzionato – la «regola di assoluzione» (che, sulla base di quest'interpretazione, diventa un tipico esempio di «principio d'induzione») – è semplicemente *falsa*, e quindi, chiaramente, non analitica.

[2] G. HEYMANS, *Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens* [Leggi ed elementi del pensiero scientifico], (1890, 1894) pp. 290 sg.; 1915[3], p. 272. L'argomentazione di Heymans fu anticipata da Hume nel suo pamphlet, pubblicato anonimo, *An Abstract of a Book Lately Published, Enti-*

«probabile» e alla parola «falso» la parola «improbabile», non si guadagna nulla. Solo se si tiene conto dell'*asimmetria tra verificazione e falsificazione* – cioè dell'asimmetria che risulta dalla relazione logica fra teorie e asserzioni-base – è possibile evitare le trappole del problema dell'induzione.

Può forse darsi che coloro che credono nella logica della probabilità tentino di affrontare la mia critica asserendo che essa nasce da una mentalità «legata alla cornice della logica classica», e che perciò non è in grado di seguire i metodi di ragionamento impiegati dalla logica della probabilità. Non ho proprio nulla in contrario ad ammettere di non essere capace di seguire questi metodi di ragionamento.

82. *La teoria positiva della corroborazione: come un'ipotesi può «provare il proprio valore».*

Le obiezioni che ho appena avanzato contro la teoria probabilistica dell'induzione non possono forse essere rivolte contro il mio stesso punto di vista? Forse può sembrare di sí, perché queste obiezioni sono basate sull'idea di *valutazione*. Ed è chiaro che anch'io sono costretto a usare quest'idea. Io parlo di «*corroborazione*» di una teoria, e la corroborazione può essere espressa soltanto come una valutazione. (Da questo punto di vista non c'è nessuna differenza tra corroborazione e probabilità). Inoltre, anch'io sostengo che non si può asserire che le ipotesi sono asserzioni «vere», ma che sono «congetture provvisorie» (o qualcosa del genere); e anche questo punto di vista può essere espresso solo per mezzo di una valutazione di queste ipotesi.

tled A Treatise of Human Nature [Sunto di un libro pubblicato recentemente col titolo *Trattato sulla natura umana*], 1740. Sono quasi certo che Heymans non conoscesse questo pamphlet, che fu riscoperto, e attribuito a Hume, da J. M. Keynes e P. Sraffa, e da loro edito nel 1938. Quando nel 1931 presentai le mie argomentazioni contro la teoria probabilistica dell'induzione in un libro precedente questo, tuttora inedito, che fu letto da parecchi membri del Circolo di Vienna, non conoscevo né le anticipazioni di Hume né quelle di Heymans di tali argomentazioni. Il fatto che il passo di Heymans sia stato anticipato da Hume mi fu fatto notare da J. O. Wisdom (cfr. il suo *Foundations of Inference in Natural Science* [Fondamenti dell'inferenza nella scienza della natura], 1952, p. 218). Il passo di Hume è citato piú in là, nell'appendice *VII, testo relativo alla nota 6.

Alla seconda parte di quest'obiezione si può rispondere con facilità. La valutazione delle ipotesi, di cui sono effettivamente costretto a far uso, e che le descrive come «congetture provvisorie» (o come qualcosa del genere) ha lo status di una *tautologia*. Dunque, non dà origine a difficoltà del tipo di quelle cui dà origine la logica induttiva. Infatti questa descrizione non fa altro che parafrasare o interpretare l'asserzione (a cui è per definizione equivalente) che le asserzioni strettamente universali, cioè le teorie, non possono essere derivate da asserzioni singolari.

La posizione è simile per quanto riguarda la prima parte dell'obiezione, concernente valutazioni che asseriscono che una teoria è corroborata. La valutazione della corroborazione non è un'ipotesi, ma può essere derivata, se ci vengono fornite la teoria e le asserzioni-base accettate. Asserisce il fatto che queste asserzioni-base non contraddicono la teoria, e l'asserisce con il dovuto riguardo al grado di controllabilità della teoria e alla severità dei controlli ai quali la teoria è stata sottoposta, fino a un periodo di tempo stabilito

Diciamo che una teoria è «corroborata», finché regge a questi controlli. La valutazione che asserisce la corroborazione (la valutazione corroborativa) stabilisce certe relazioni fondamentali: compatibilità e incompatibilità. Consideriamo l'incompatibilità come una falsificazione della teoria. Ma la compatibilità, da sola, non deve farci attribuire alla teoria un grado positivo di corroborazione: ovviamente il semplice fatto che una teoria non sia ancora stata falsificata non può essere considerato sufficiente. Nulla infatti è piú facile che costruire un numero qualsiasi di sistemi di teorie che siano compatibili con un qualsiasi sistema dato di asserzioni-base accettate. (Quest'osservazione vale anche per tutti i sistemi «metafisici»).

Qualcuno potrebbe forse suggerire che a una teoria, che sia compatibile con il sistema di asserzioni-base accettato e che inoltre sia tale che da essa sia possibile derivare parte di questo sistema, si può accordare qualche grado positivo di corroborazione. Oppure, considerando che le asserzioni base non sono derivabili da un sistema puramente teorico (anche se può esserne derivabile la loro negazione) si potrebbe suggerire di adottare la regola seguente: a una teoria si deve accordare un grado positivo di corroborazione se è compatibile con le asserzioni-base accettate e se, inoltre, dalla teoria, in congiunzione con le altre asserzioni base accettate, è possibile derivare una sottoclasse non-vuota di queste asserzioni base [*1].

Non ho nessuna obiezione seria contro quest'ultima formulazione, eccetto che mi sembra insufficiente per una caratterizzazione adeguata del grado positivo di corroborazione di una teoria. Infatti vogliamo parlare delle teorie come di teorie piú, o meno, corroborate. Ma il *grado di corroborazione* di una teoria non può certo essere stabilito semplicemente facendo il conto dei casi corroboranti, cioè delle asserzioni-base accettate che sono derivabili nel modo indicato. Può infatti accadere che una teoria appaia molto meno ben corroborata di un'altra, anche se abbiamo derivato moltissime asserzioni base coll'aiuto della prima e solo poche con l'aiuto della seconda. Come esempio, potremmo confrontare l'ipotesi «Tutti i corvi sono neri» con l'ipotesi (menzionata nel § 37) «La carica di un elettrone ha il valore determinato da Millikan». Anche se è presumibile che nel caso di un'ipotesi del primo genere abbiamo incontrato molte piú asserzioni corroboranti che non nel secondo, riterremo che l'ipotesi di Millikan sia la meglio corroborata delle due.

[*1] La definizione di «corroborato positivamente», data qui in via di tentativo (ma rifiutata come insufficiente nel capoverso successivo del testo, perché non fa esplicito riferimento ai risultati dei controlli severi, cioè dei tentativi di confutazione) è interessante per almeno due ragioni. In primo luogo, è in stretta relazione con il mio criterio di demarcazione, specialmente con quella formulazione di tale criterio a cui ho aggiunto la nota *1 del § 21. In realtà le due formulazioni concordano tranne che per la restrizione alle asserzioni-base *accettate*, restrizione che forma parte di questa definizione. Cosí, se tralasciamo questa restrizione, la presente definizione si trasforma nel mio criterio di demarcazione.

In secondo luogo, se invece di tralasciare questa restrizione restringiamo ulteriormente la classe delle asserzioni-base accettate, esigendo che tali asserzioni debbano essere accettate come risultato di tentativi sinceri di confutare la teoria, la nostra definizione diventa una definizione adeguata di «corroborato positivamente», ma, naturalmente, non di «grado di corroborazione». L'argomentazione in sostegno di questa pretesa è implicita nel testo che segue. Inoltre, le asserzioni-base cosí accettate possono essere descritte come «asserzioni corroboranti» della teoria.

Si dovrebbe notare che le «asserzioni esemplificatorie» (cioè, le asserzioni-base negate, cfr. § 28) non possono essere descritte adeguatamente dicendo che sono asserzioni che corroborano, o confermano, la teoria che esemplificano, dal momento che sappiamo che *ogni legge universale è esemplificata* quasi dovunque, come è indicato al § 28, nota *1. (Cfr. anche § 80, nota *4 e il testo relativo).

Ciò mostra che a determinare il grado della corroborazione non è tanto il numero dei casi corroboranti, quanto piuttosto la *severità dei vari controlli* ai quali l'ipotesi può essere, ed è stata, sottoposta. Ma a sua volta la severità dei controlli dipende dal *grado di controllabilità*, e dunque dalla semplicità dell'ipotesi: l'ipotesi che è falsificabile in grado piú alto, ossia l'ipotesi piú semplice, è anche l'ipotesi che è corroborabile a un grado piú alto [1]. Naturalmente, il grado di corroborazione effettivamente raggiunto non dipende *soltanto* dal grado di falsificabilità: un'asserzione può essere falsificabile in alto grado e tuttavia essere corroborata solo poco, o addirittura essere falsificata. E forse può darsi che, senza essere falsificata, sia spodestata da una teoria meglio controllabile, dalla quale può essere dedotta, o dalla quale può essere dedotta una sua stretta approssimazione. (In questo caso anche il suo grado di corroborazione risulta abbassato).

Può darsi che il grado di corroborazione di due asserzioni non sia confrontabile in tutti i casi, non piú di quanto lo sia il loro grado di falsificabilità: non possiamo definire un grado di corroborazione numericamente calcolabile, ma possiamo parlare solo approssimativamente in termini di gradi positivi di corroborazione, di gradi negativi di corroborazione, e via discorrendo [*2]. Tuttavia possiamo formulare diverse e svariate regole: ad esempio la regola che non dovremo continuare ad assegnare un grado positivo di corroborazione a una teoria che sia stata falsificata da un esperimento controllabile intersoggettivamente, basato su un'ipotesi falsificante (cfr.

[1] Questo è un altro punto in cui c'è accordo tra il mio punto di vista sulla semplicità e il punto di vista di Weyl; cfr. § 42, nota 7. * Questa concordanza è una conseguenza del punto di vista, dovuto a Jeffreys, Wrinch e Weyl (cfr. § 42, nota 7), secondo cui il basso numero dei parametri di una funzione può essere usato come misura della sua semplicità, preso in congiunzione col mio punto di vista (cfr. §§ 38 sgg.), secondo cui il basso numero dei parametri può essere usato come misura della controllabilità o improbabilità, punto di vista rifiutato da questi autori. (Cfr. anche al § 43, le note *1 e *2).

[*2] Fin dove arriva l'applicazione pratica delle teorie esistenti, mi sembra che ciò sia ancora corretto; ma ora penso che sia possibile definire «grado di corroborazione» in modo tale che possiamo *confrontare* gradi di corroborazione (ad esempio, quelli della teoria della gravità di Newton e di quella di Einstein). Inoltre, questa definizione rende persino possibile attribuire gradi numerici di corroborazione alle ipotesi statistiche, e forse addirittura ad altre asserzioni, *purché* possiamo attribuire gradi di probabilità logica (assoluta e relativa) ad esse *e alle asserzioni probanti*. Cfr. appendice *IX.

§§ 8 e 22). (In ogni modo, in certe circostanze possiamo assegnare un grado positivo di corroborazione a un'altra teoria, anche se segue da una linea di pensiero affine alla prima. Un esempio di ciò è dato dalla teoria fotonica di Einstein, che è affine alla teoria corpuscolare della luce formulata da Newton). In generale, consideriamo definitiva una falsificazione controllabile intersoggettivamente (purché sia ben controllata): proprio in questo modo si fa sentire l'asimmetria fra verificazione e falsificazione delle teorie. Ciascuno di questi punti metodologici contribuisce, nel suo proprio modo particolare, allo sviluppo storico della scienza, in quanto processo di approssimazioni graduali. Una valutazione corroborativa compiuta piú tardi – cioè una valutazione compiuta dopo che alle asserzioni-base già accettate sono state aggiunte nuove asserzioni-base – può sostituire, a un grado positivo di corroborazione, un grado di corroborazione negativo, ma non viceversa. E sebbene io creda che nella storia della scienza è sempre la teoria e non l'esperimento, sempre l'idea e non l'osservazione, ad aprire la strada a nuove conoscenze, credo però anche che è sempre l'esperimento a impedirci di seguire un sentiero che non porta da nessuna parte: che ci aiuta a uscire dalla routine e ci sfida a trovare nuove strade.

Dunque, il grado di falsificabilità di una teoria entra a far parte della valutazione della sua corroborazione. E questa valutazione può essere considerata come una delle relazioni logiche fra la teoria e le asserzioni base accettate: come una valutazione che prende in considerazione la severità dei controlli ai quali la teoria è stata sottoposta.

83. *Corroborabilità, controllabilità e probabilità logica* [*1].

Nel valutare il grado di corroborazione di una teoria teniamo conto del suo grado di falsificabilità. Quanto meglio una teoria è controllabile tanto meglio può essere corroborata. Comunque, la controllabilità è l'inverso del concetto di

[*1] Se si accetta la terminologia che io per primo spiegai in una nota comparsa su «Mind», 1938, qui si dovrebbe inserire dovunque la parola «assoluto» (come nei §§ 34 ecc.), dopo «probabilità logica» (per distinguerla dalla probabilità logica «relativa» o «condizionale»); cfr. le appendici *II, *IV e *IX.

probabilità logica, cosicché possiamo anche dire che una valutazione di corroborazione tiene conto della probabilità logica dell'asserzione in questione. E a sua volta (come abbiamo mostrato nel § 72) la probabilità logica dell'asserzione è imparentata con il concetto di probabilità oggettiva, cioè di probabilità degli eventi. Cosí, per il fatto che tiene conto della probabilità logica, il concetto di corroborazione è legato, anche se forse solo in modo indiretto e non troppo rigoroso, col concetto di probabilità degli eventi. Può venirci in mente l'idea che qui c'è forse una connessione con la teoria della probabilità delle ipotesi, che abbiamo già criticato.

Quando tentiamo di valutare il grado di corroborazione di una teoria possiamo ragionare, piú o meno, nel modo seguente. Il grado di corroborazione della teoria crescerà col crescere del numero dei suoi casi corroboranti. Qui, di solito, accordiamo ai primi casi corroboranti un'importanza di gran lunga maggiore di quella che accordiamo agli ultimi: una volta che una teoria è stata ben corroborata, i casi ulteriori ne aumentano il grado di corroborazione solo di pochissimo. Tuttavia questa regola non è perfettamente valida se questi nuovi casi sono molto diversi dai primi, cioè, se corroborano la teoria in un *nuovo dominio d'applicazione*. In questo caso può darsi che ne accrescano considerevolmente il grado di corroborazione. Il grado di corroborazione di una teoria che ha un grado piú alto d'universalità può cosí essere piú alto di quello di una teoria che ha un grado di universalità piú basso (e perciò un piú basso grado di falsificabilità). Analogamente, teorie che posseggono un grado di precisione piú alto possono essere meglio corroborate di teorie meno precise. Una delle ragioni per cui non attribuiamo un grado positivo di corroborazione alle profezie tipiche dei salmisti e degli indovini è che le loro predizioni sono cosí caute e imprecise che la probabilità logica che siano corrette è estremamente alta. E anche quando ci dicono che predizioni di questo genere, piú precise e perciò meno probabili logicamente, hanno avuto successo, ciò di cui siamo propensi a dubitare non è tanto, di regola, il loro successo, quanto la loro supposta improbabilità logica. Dal momento che tendiamo a credere che queste profezie siano non-corroborabili, tendiamo anche a ragionare, in tali casi, dal loro basso grado di corroborabilità al loro basso grado di controllabilità.

Se confrontiamo questi miei punti di vista con ciò che è implicito nella logica (induttiva) della probabilità, otteniamo un risultato veramente notevole. Secondo il mio punto di vista la corroborabilità di una teoria – e anche il grado di corroborazione di una teoria che ha effettivamente superato controlli severi – stanno, per cosí dire [*2], in rapporto inverso con la sua probabilità logica: entrambi, infatti, crescono con il grado di controllabilità e di semplicità della teoria. *Ma il punto di vista implicato dalla logica della probabilità è esattamente l'opposto di questo.* I suoi sostenitori fanno crescere la probabilità di un'ipotesi in *proporzione diretta* alla sua probabilità logica, anche se non c'è dubbio che *intendano* che la loro «probabilità di un'ipotesi» sta esattamente per la stessa cosa che io tento di indicare con «grado di corroborazione» [*3].

[*2] Nel testo ho scritto «*per cosí dire*»: e l'ho scritto perché non credevo veramente nelle probabilità logiche numeriche (assolute). In conseguenza di ciò, mentre scrivevo oscillavo tra il punto di vista secondo cui il grado di corroborabilità è *complementare* alla probabilità logica (assoluta) e quello secondo cui le è inversamente proporzionale; o, in altre parole, ero indeciso tra una definizione di $C(g)$ (cioè del grado di corroborabilità) data per mezzo di $C(g) = 1 - P(g)$ – che renderebbe *la corroborabilità eguale al contenuto* – e un'altra definizione data per mezzo di $C(g) = 1/P(g)$, dove $P(g)$ è la probabilità logica assoluta di g. In realtà, si possono adottare definizioni che conducano all'una o all'altra di queste conseguenze e, da un punto di vista intuitivo, entrambe sembrano abbastanza soddisfacenti: questo, forse, spiega le mie oscillazioni. Ci sono forti ragioni in favore del primo metodo, o, altrimenti, dell'applicazione di una scala logaritmica al secondo metodo. Cfr. appendice *IX.

[*3] Le ultime righe di questo capoverso, specialmente a partire dalla frase scritta in corsivo (che non era in corsivo nell'originale) contengono il punto cruciale della mia critica alla teoria probabilistica dell'induzione. Il punto può essere riassunto nel modo seguente.

Vogliamo ipotesi *semplici*, cioè ipotesi dotate di un alto *contenuto*, di un alto grado di *controllabilità*. Queste ipotesi sono anche altamente *corroborabili*, perché il grado di corroborazione di un'ipotesi dipende principalmente dalla severità dei suoi controlli, e dunque dalla sua controllabilità. Ora sappiamo che la controllabilità è lo stesso che l'alta *improbabilità* logica (assoluta) o la bassa *probabilità* logica (assoluta).

Ma se due ipotesi, h_1 e h_2, possono essere confrontate rispetto al loro contenuto, e quindi rispetto alla loro probabilità logica (assoluta), allora vale quello che segue. Supponiamo che la probabilità logica (assoluta) di h_1 sia minore di quella di h_2. Allora, quale che sia la prova e, la probabilità logica (relativa) di h_1, data e, non può mai essere piú grande di quella di h_2, data e. Dunque le *ipotesi meglio controllabili e meglio corroborabili non possono mai ottenere, sulla base delle prove date, una probabilità piú alta di quanto non ne possa ottenere l'ipotesi meno controllabile.* Ma questo implica che *il grado di corroborazione non può essere la stessa cosa che la probabilità.*

Questo è il risultato cruciale. Le osservazioni successive, nel testo, non

Tra coloro che ragionano in questo modo c'è Keynes, il quale usa l'espressione «probabilità a priori» per indicare quella che io chiamo «probabilità logica» (cfr. § 34, nota 1). Egli fa quest'osservazione, perfettamente accurata[1], a proposito di una «generalizzazione» (cioè di un'ipotesi) g con la «condizione», o antecedente, o protasi, φ, e la «conclusione», o conseguente, o apodosi f: «Quanto piú comprensiva è la condizione φ e quanto meno comprensiva è la conclusione f, tanto è maggiore la probabilità "à priori"[*4] che attribuiamo alla generalizzazione g. Tutte le volte che ha luogo un incremento in φ questa probabilità aumenta, e tutte le volte che ha luogo un incremento in f, diminuisce». Come ho detto, tutto ciò è perfettamente accurato, anche se Keynes non traccia una netta linea di distinzione[*5] tra ciò che chiama la «probabilità di una generalizzazione» – e che corrisponde a quella che qui viene chiamata «probabilità di un'ipotesi» – e la sua «probabilità a priori». Dunque, al contrario del mio *grado di corroborazione*, la *probabilità di un'ipotesi*, nel senso di Keynes, cresce col crescere della sua *probabilità logica a priori*. Che tuttavia Keynes intenda con il suo termine «probabilità» la stessa cosa che io intendo col mio termine «corroborazione», si può vedere dal fatto che la sua «probabili-

fanno altro che trarne la conclusione: chi tiene la probabilità in alto pregio deve dire molto poco, o, meglio ancora, non deve dire nulla affatto: le tautologie manterranno sempre la probabilità piú alta.

[1] KEYNES, *A Treatise on Probability* cit., pp. 224 sg. La condizione φ e la conclusione f di Keynes corrispondono (cfr. § 14, nota 6) alla nostra funzione assertoria condizionante φ e alla nostra funzione assertoria-conseguenza f; cfr. anche § 36. Si dovrebbe notare che Keynes diceva che la condizione, o la conclusione, è *piú comprensiva* se il suo *contenuto*, o la sua intensione, e non la sua estensione, è maggiore. (Alludo al fatto che l'intensione e l'estensione di un termine sono inversamente proporzionali).

[*4] Keynes segue alcuni eminenti logici di Cambridge, che scrivono «à priori» e «à posteriori»: si può solo dire *à propos de rien*, a meno che, forse, «apropos» di *à propos*.

[*5] In realtà, Keynes ammette la distinzione fra la probabilità logica (o «probabilità logica assoluta», come la chiamo io ora) della generalizzazione g e la sua probabilità relativa a un certo tipo di prova, h, e, in questa misura, l'asserzione da me fatta nel testo richiede una correzione. Keynes opera la distinzione assumendo, correttamente, anche se, forse, solo implicitamente – cfr. p. 225 del *Treatise* cit. – che se $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ e $f = f_1 f_2$, allora le probabilità a priori delle varie g sono: $g(\varphi, f_1) \geq g(\varphi, f) \geq g(\varphi_1, f)$. E *prova* correttamente che le probabilità a posteriori di queste ipotesi g (relativamente a *una qualsiasi* prova h) cambiano nello stesso modo in cui cambiano le loro probabilità a priori. Dunque, mentre le loro probabilità cambiano come le probabilità logiche (assolute), il punto cruciale della mia posizione è che i gradi di corroborabilità (*e* di corroborazione) cambiano nel modo opposto.

tà» cresce col crescere del numero dei casi corroboranti e anche (cosa della massima importanza) con l'aumentare della diversità fra questi casi. Ma Keynes trascura il fatto che le teorie i cui casi corroboranti appartengono a domini d'applicazione largamente differenti, avranno di solito un grado di universalità corrispondentemente alto. Quindi le due esigenze che egli ritiene necessarie per ottenere un'alta probabilità – la minore universalità possibile e la maggiore diversità possibile di casi corroboranti – saranno, di regola, incompatibili.

Per dirla nella mia terminologia, la teoria di Keynes implica che la corroborazione (o probabilità delle ipotesi) *decresca* insieme con la controllabilità. Egli è condotto a questo punto di vista dalla sua credenza nella logica induttiva [*6]. Infatti la tendenza della logica induttiva è quella di rendere le ipotesi il piú *certe* possibile. Si assegna significato scientifico alle varie ipotesi solo nella misura in cui possono essere giustificate dall'esperienza. Una teoria viene considerata fornita di valore scientifico solo grazie alla stretta *prossimità logica* (cfr. § 48, nota 2 e testo relativo) fra la teoria e le asserzioni empiriche. Ma ciò non significa altro se non che il *contenuto* della teoria deve andare *il meno possibile* oltre ciò che è stato stabilito empiricamente [*7]. Questo punto di vista è strettamente connesso con una tendenza a negare il valore della predizione. «La virtú peculiare della predizione – scrive Keynes [2] – ... è completamente immaginaria. I punti essenziali sono invece il numero dei casi esaminati e le analogie tra di essi; e la questione se si dia il caso che una particolare ipotesi sia stata proposta prima o dopo che i casi sono stati esaminati è del tutto irrilevante». Riferendosi alle ipotesi che sono state «proposte a priori» – cioè, che sono state proposte prima che si fosse in possesso di un sostegno sufficiente su basi induttive – Keynes scrive: «... se si tratta di un semplice tentativo di indovinare, il fatto fortuito che esso preceda alcuni o tutti i casi che lo verificano, non aggiunge nulla affatto al suo valore». Questa concezione della predizione è

[*6] Cfr. *Postscript*, cap. *II. Nella mia teoria della corroborazione, – in opposizione diretta alle teorie della probabilità di Keynes, Jeffreys e Carnap, la corroborazione non *decresce*, ma anzi, tende a *crescere* con la controllabilità.

[*7] Questo si può anche esprimere con la regola, inaccettabile: «Scegli sempre l'ipotesi che è piú *ad hoc*!»

[2] KEYNES, *A Treatise on Probability* cit., p. 305.

certamente ineccepibile dal punto di vista logico, ma ci fa chiedere perché mai allora dovremmo generalizzare. Quali possibili ragioni possono darsi per costruire tutte queste teorie e queste ipotesi? Il punto di vista della logica induttiva rende del tutto incomprensibili queste attività. Se ciò che apprezziamo piú di tutto è la conoscenza piú sicura che ci sia dato di ottenere – e se le predizioni come tali non contribuiscono per nulla alla corroborazione – perché allora non dovremmo accontentarci delle nostre asserzioni-base [*8]?

Un altro punto di vista che dà origine a una questione molto simile a questa è il punto di vista di Kaila [3]. Mentre io, per parte mia, credo che le teorie che possono essere ben corroborate sono le teorie semplici, e quelle che fanno poco uso di ipotesi ausiliarie (cfr. § 46), proprio a ragione della loro improbabilità logica, Kaila interpreta la situazione esattamente nella maniera opposta, basandosi su ragioni simili a quelle su cui si basa Keynes. Anche Kaila si rende conto che di solito assegnamo un'alta probabilità (nella nostra terminologia un'alta «probabilità delle ipotesi») alle teorie *semplici*, e specialmente a quelle teorie che hanno bisogno di poche ipotesi ausiliarie. Ma le sue ragioni sono l'opposto delle mie. A differenza di quello che faccio io, Kaila non assegna un'alta probabilità alle teorie in parola perché sono severamente controllabili, o logicamente improbabili, cioè perché hanno, per cosí dire a priori, *molte opportunità di entrare in collisione con asserzioni-base.* Al contrario: assegna quest'alta probabilità alle teorie semplici con poche ipotesi ausiliarie, perché crede che un sistema che consista di *poche* ipotesi avrà, a priori, *meno* opportunità di entrare in collisione con

[*8] Nel suo libro *Logical Foundations of Probability* cit., Carnap mostra di credere nel valore *pratico* delle predizioni; tuttavia trae parte della conclusione menzionata qui: che dovremmo accontentarci delle nostre asserzioni-base. Dice infatti che le teorie (Carnap parla di «leggi») «non sono indispensabili» per la scienza, neppure per fare predizioni: possiamo cavarcela benissimo con asserzioni singolari. «Nondimeno, – scrive a p. 575 – nei libri di fisica, biologia, psicologia, ecc. è conveniente, naturalmente, formulare leggi universali». Non si tratta, però, di una questione di convenienza, ma di una questione di curiosità scientifica. *Alcuni scienziati vogliono spiegare il mondo*: il loro scopo è quello di trovare teorie esplicative soddisfacenti – teorie ben controllabili, vale a dire semplici – e di controllarle. (Cfr. anche appendice *x e § *15 del *Postscript* cit.).

[3] E. KAILA, *Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitslogik* [I principî della logica della probabilità], Annales Universitatis Aboensis, Turku 1926, p. 140.

la realtà di quante non ne abbia un sistema che consista di molte ipotesi. Ancora una volta, qui viene da chiedersi perché mai prendersi il disturbo di costruire queste avventurose teorie. Se rifuggiamo dal conflitto con la realtà, perché provocarla facendo asserzioni? La strada piú sicura sarebbe quella di adottare un sistema *senza nessun'*ipotesi. [«La parola è d'argento, il silenzio è d'oro»].

La mia regola, che richiede che le ipotesi ausiliarie vengano usate nel modo piú parsimonioso possibile (il «principio di parsimonia nell'uso delle ipotesi») non ha nulla da spartire con considerazioni del genere di quelle di Kaila. Non mi interessa affatto tener basso il numero delle nostre asserzioni: mi interessa la loro *semplicità, nel senso di alta controllabilità.* Proprio quest'interesse conduce, da un lato, alla mia regola che le ipotesi ausiliarie dovrebbero essere usate nel modo piú parsimonioso che ci è possibile e, dall'altro, alla mia richiesta che il numero dei nostri assiomi – delle nostre ipotesi piú fondamentali – debba essere tenuto basso. Quest'ultimo punto, infatti, sorge dall'esigenza che si scelgano asserzioni dotate di un alto livello di universalità, e che un sistema consistente di molti «assiomi» venga, se possibile, dedotto da (e dunque spiegato con) un sistema fornito di un numero minore di «assiomi», e di assiomi dotati di un livello di universalità piú alto.

84. *Osservazioni a proposito dell'uso dei concetti «vero» e «corroborato».*

Nella logica della scienza delineata qui è possibile evitare l'uso dei concetti «vero» e «falso» [*1]. Il loro posto può esse-

[*1] Non molto tempo dopo che questo libro era stato scritto, ebbi la buona ventura di incontrare Alfred Tarski, che mi spiegò le idee fondamentali della sua teoria della verità. È un vero peccato che questa teoria – una delle due grandi scoperte nel campo della logica fatte dopo i *Principia Mathematica* – sia ancora spesso fraintesa e alterata. Non si metterà mai abbastanza in evidenza il fatto che l'idea di verità di Tarski (per la cui definizione rispetto ai linguaggi formalizzati Tarski elaborò un metodo) è la stessa idea che Aristotele aveva in mente e con lui ha in mente la maggioranza della gente, eccettuati i pragmatisti: l'idea che *la verità è la corrispondenza coi fatti* (o con la realtà). Ma che cosa possiamo mai intendere, dicendo che un'*asserzione* corrisponde ai *fatti* (o alla realtà)? Una volta che ci siamo resi conto che questa corrispondenza non può consistere in una similarità strutturale, il com-

re preso da considerazioni logiche intorno alle relazioni di derivabilità. Pertanto non è necessario che diciamo: «La predizione p è vera purché siano vere la teoria t e l'asserzione-base b». Possiamo dire, invece, che l'asserzione p segue dalla congiunzione (non-contraddittoria) di t e di b. La falsificazione di una teoria può essere descritta in modo simile. Non è necessario che diciamo che la teoria è «falsa»: possiamo dire, invece, che è contraddetta da un certo insieme di asserzioni-base accettate. E neppure delle asserzioni-base è necessario che diciamo che sono «vere» o «false», perché possiamo interpretare la loro accettazione come il risultato di una decisione convenzionale e le asserzioni accettate come i risultati di questa decisione.

Questo non significa certo che ci sia vietato usare i concetti «vero» e «falso», o che il loro uso crei qualche difficoltà particolare. Lo stesso fatto che possiamo evitarli mostra che essi non dànno origine ad alcun problema fondamentale nuovo. L'uso dei concetti «vero» e «falso» è perfettamente

pito di delucidare questa corrispondenza sembra disperato, e in conseguenza di ciò può darsi che cominciamo a sospettare del concetto di verità, e preferiamo non usarlo. Tarski risolse questo problema apparentemente disperato (rispetto ai linguaggi formalizzati) riducendo l'intrattabile idea di corrispondenza a un'idea piú semplice: quella di «soddisfacimento».

Grazie all'insegnamento di Tarski non esito piú a parlare di «verità» e di «falsità». E come i punti di vista di qualsiasi altro (a meno che non sia un pragmatista) i miei punti di vista si rivelarono, in modo molto naturale, coerenti con la teoria tarskiana della verità assoluta. Cosí, anche se la mia concezione della logica formale e della sua filosofia fu rivoluzionata dalla teoria di Tarski, la mia concezione della scienza e della sua filosofia non ne fu sostanzialmente modificata, ma anzi, ne risultò chiarificata.

Alcune delle critiche che vengono solitamente mosse alla teoria di Tarski mi sembrano completamente fuori bersaglio. Si dice che la sua definizione è artificiale e complessa: ma poiché Tarski definisce la verità in riferimento ai linguaggi formalizzati, la sua definizione dev'essere basata sulla definizione di una formula ben formata di un tale linguaggio, ed ha precisamente lo stesso grado di «artificialità» o di «complessità» di tale definizione. Si dice anche che soltanto le proposizioni o le asserzioni possono essere vere o false, ma che non possono esserlo gli enunciati. Forse «enunciato» non è una buona traduzione della terminologia originale di Tarski. (Personalmente, preferisco parlare di «asserzione», invece che di «enunciato»; si veda, ad esempio, la mia *Note on Tarski's Definition of Truth* [Nota sulla definizione di verità di Tarski], in «Mind», 64, 1955, p. 388, nota 1). Ma lo stesso Tarski chiarí perfettamente che una formula non-interpretata (o una successione di simboli) non può dirsi vera o falsa, e che questi termini valgono soltanto per le formule interpretate: per gli «enunciati *significanti*» (stando alla traduzione inglese: [*meaningful sentences*]). I miglioramenti nella terminologia sono sempre i benvenuti: ma criticare una teoria per ragioni terminologiche è puro oscurantismo.

analogo all'uso di concetti quali «*tautologia*», «*contraddizione*», «*congiunzione*», «*implicazione*» e di altri concetti del genere. Sono concetti non-empirici, concetti logici[1]. Descrivono o valutano un'asserzione indipendentemente da qualsiasi cambiamento che avviene nel mondo empirico. Nell'istante in cui assumiamo che le proprietà degli oggetti fisici (degli oggetti «genidentici», nel senso di Lewin) cambino col passare del tempo, decidiamo di usare questi predicati logici in modo tale che le proprietà logiche delle asserzioni diventino indipendenti dal tempo: se un'asserzione è una tautologia, allora è una tautologia una volta per tutte. D'accordo coll'uso comune, attribuiamo questa stessa atemporalità anche ai concetti «vero» e «falso». Non è certo l'uso comune a dire che una certa asserzione era perfettamente vera ieri, ma oggi è diventata falsa. Se oggi valutiamo come falsa una asserzione che ieri avevano valutata vera, oggi asseriamo implicitamente che *ieri ci eravamo sbagliati*: che l'asserzione era falsa anche ieri – atemporalmente falsa – ma che, erroneamente, l'avevamo «presa per vera».

Qui si può vedere molto chiaramente la differenza tra verità e corroborazione. La valutazione di un'asserzione come corroborata o come non corroborata è anche una valutazione logica, e perciò è anch'essa atemporale. Essa infatti asserisce che tra un sistema di teorie e un certo sistema di asserzioni-base accettate regge una certa relazione logica. Ma non potremo mai dire semplicemente che un'asserzione come tale, o in se stessa, è «corroborata» (allo stesso modo che possiamo dire che è «vera»). Possiamo solo dire che è *corroborata relativamente a qualche sistema di asserzioni-base*, sistema accettato fino a un particolare momento. «La corroborazione che una teoria ha ricevuto fino a ieri» *non è logicamente identica a* «La corroborazione che una teoria ha ricevuto fino ad oggi». Dunque, ad ogni valutazione di una corroborazione dobbiamo sottoscrivere quello che possiamo chiamare un indice: un indice che caratterizza il sistema di asserzioni-base a cui la corroborazione si riferisce (ad esempio, per mezzo della data della sua accettazione)[*2].

Pertanto la corroborazione non è un «valore di verità»:

[1] (Aggiunta del 1934, in bozze). Carnap direbbe probabilmente «concetti sintattici» (cfr. la sua *Sintassi logica del linguaggio*).

[*2] Cfr. § 81, nota *1.

cioè non può essere messa sullo stesso piano dei concetti «vero» e «falso» (che sono liberi da indici temporali): infatti, per una medesima asserzione può esserci un qualsiasi numero di valori di corroborazione differenti, che possono essere tutti «corretti» o «veri» nel medesimo tempo. Sono infatti valori derivabili logicamente dalla teoria e dai vari insiemi di asserzioni-base accettate in tempi diversi.

Le osservazioni che abbiamo fatto qui sopra possono anche aiutare a chiarire il contrasto tra i miei punti di vista e quelli dei pragmatisti, che popongono di *definire «verità» in termini del successo di una teoria, e quindi della sua utilità, o della sua confermazione o della sua corroborazione.* Se la loro intenzione è semplicemente quella di asserire che una valutazione logica del successo di una teoria non può essere nulla piú che una valutazione della sua corroborazione, posso anche assere d'accordo con loro. Ma credo che sarebbe tutt'altro che «*utile*» identificare il concetto di corroborazione con quello di verità [*3]. Anche l'uso ordinario evita questa identificazione. Infatti si può bensí dire che finora una teoria non è stata corroborata in pratica, o che è ancora non-corroborata. Ma normalmente non diremmo che finora una teoria non è affatto vera, oppure che è ancora falsa.

85. *Il cammino della scienza.*

Nell'evoluzione della fisica è possibile discernere qualcosa che ha l'aspetto di una direzione generale: una direzione che va da teorie di un livello di universalità piú basso a teorie di un livello di universalità piú alto. Questa direzione si chiama di solito direzione «induttiva», e si potrebbe pensare che il fatto che la fisica progredisca in questa direzione «induttiva» possa essere usato come un argomento in favore del metodo induttivo.

Tuttavia un progresso nella direzione induttiva non consiste necessariamente di una sequenza di inferenze induttive. Abbiamo invece mostrato che tale progresso può essere spie-

[*3] Cosí, se dovessimo definire «vero» come «utile» (come suggeriscono alcuni pragmatisti) o «riuscito» o «confermato» o «corroborato», per svolgere la parte di «verità» non dovremmo far altro che introdurre un nuovo concetto «assoluto» e «atemporale».

gato in termini completamente differenti, in termini, cioè, di grado di controllabilità e di corroborabilità. Infatti, una teoria che sia stata ben corroborata può essere spodestata soltanto da una teoria situata su un livello di universalità piú alto, cioè, da una teoria che sia meglio controllabile e che, oltre a ciò, *contenga* la vecchia, ben corroborata teoria o, almeno, una sua buona approssimazione. Sarà forse meglio, perciò, descrivere quella tendenza – il progresso verso teorie di un livello di universalità sempre piú alto – come «quasi-induttiva».

Il processo quasi-induttivo dovrebbe essere prospettato in questo modo: si propongono, e si controllano deduttivamente, teorie di un certo livello di universalità; dopo averle controllate, si propongono teorie di livello di universalità piú alto che a loro volta vengono controllate con l'aiuto di quelle situate sui livelli di universalità precedenti, e cosí via. I metodi di controllo sono invariabilmente basati su inferenze deduttive che procedono dal livello piú alto al livello piú basso [*1]; d'altra parte in ordine di tempo i livelli di universalità si raggiungono procedendo dai livelli piú bassi a quelli piú alti.

Qualcuno potrà forse sollevare la questione: «perché allora non inventare senz'altro teorie del piú alto livello d'universalità? Perché aspettare quest'evoluzione quasi-induttiva? Non è forse perché, dopo tutto, in quest'evoluzione è contenuto un elemento induttivo?» Non lo credo. Si propongono continuamente suggerimenti sempre nuovi – congetture o teorie – di tutti i possibili livelli d'universalità. Quelle teorie che sono situate, per cosí dire, su un livello d'universalità troppo alto – cioè, quelle teorie che sono troppo lontane dal livello raggiunto dalla scienza controllabile del momento – dànno forse origine a un «sistema metafisico». In questo caso, anche ammesso che da questo sistema siano deducibili (o soltanto semideducibili, come ad esempio nel caso del sistema di Spinoza) asserzioni che appartengono al sistema scientifico predominante, fra tali asserzioni non ci sarà alcuna *nuova* asserzione controllabile, il che significa che, per controllare il sistema in questione, non è possibile

*1 Naturalmente, le «inferenze deduttive dal livello piú alto al livello piú basso» sono *spiegazioni* (nel senso del § 12); dunque le ipotesi situate sul livello piú alto sono «*esplicative*» rispetto a quelle situate sul livello piú basso.

escogitare nessun esperimento cruciale *[2]. D'altra parte, se si può escogitare, per il sistema, un esperimento cruciale, allora il sistema conterrà, come prima approssimazione, qualche teoria ben corroborata e, nel medesimo tempo, anche qualcosa di nuovo: qualcosa che può essere controllato. Dunque, è naturale che il sistema non sarà un sistema «metafisico». In questo caso il sistema in questione può essere considerato come un nuovo passo in avanti nell'evoluzione quasi-induttiva della scienza. Ciò spiega perché, di regola, un legame con la scienza del momento viene instaurato solo da quelle teorie che siano state proposte allo scopo di affrontare l'orizzonte corrente dei problemi; cioè, allo scopo di affrontare le difficoltà, le contraddizioni e le falsificazioni correnti. Nella misura in cui propongono una soluzione a queste difficoltà, queste teorie possono indicare la strada che conduce a un esperimento cruciale.

Per ottenere un'immagine, o modello, dell'evoluzione quasi-induttiva della scienza, possiamo visualizzare le varie idee ed ipotesi come particelle sospese in un fluido. La scienza controllabile è la precipitazione di queste particelle sul fondo del recipiente: le particelle si depositano in strati (di universalità). Lo spessore del deposito cresce col crescere del numero di questi strati, ognuno dei quali corrisponde a una teoria piú universale di quelle sottostanti. Il risultato di questo processo è che talvolta idee che prima fluttuavano nelle regioni metafisiche piú alte possono essere raggiunte dall'accrescersi della scienza, e, venute cosí in contatto con essa, depositarsi. Esempi di tali idee sono: l'atomismo; l'idea di un «principio» fisico singolo, o elemento ultimo (dal quale derivano gli altri): la teoria del moto della Terra (a cui Bacone si opponeva ritenendolo fittizio); la venerabile teoria corpuscolare della luce; la teoria dell'elettricità come fluido (fatta rivivere con l'ipotesi secondo cui la conduzione dei metalli è dovuta a un gas di elettroni). Tutti questi concetti e queste idee metafisiche sono forse stati d'aiuto, anche nelle loro for-

*[2] Occorre notare che per «esperimento cruciale» intendo un esperimento che è stato progettato per confutare (se è possibile) una teoria, e, piú in particolare, un esperimento che è stato progettato per provocare una decisione fra due teorie in competizione fra loro, confutando (almeno) una di esse, senza, naturalmente, provare l'altra. (Cfr. anche § 22, nota 1 e appendice *IX).

me piú primitive, nel portare ordine nell'immagine che l'uomo si fa del mondo, e in alcuni casi possono anche aver portato a predizioni dotate di successo. Tuttavia un'idea di questo genere acquista status scientifico soltanto quando venga presentata in una forma in cui possa essere falsificata, cioè a dire, solo quando è diventato possibile il decidere empiricamente tra essa e qualche teoria rivale.

La mia indagine ha tracciato le varie conseguenze delle decisioni e delle convenzioni – in particolare del criterio di demarcazione – adottate all'inizio di questo libro. Se diamo una occhiata a ciò che si è fatto, potremo ora tentare di ottenere un ultimo sguardo comprensivo dell'immagine della scienza e della scoperta scientifica, che è emersa dalla nostra indagine. (Ho in mente, qui, non già un'immagine della scienza in quanto fenomeno biologico, in quanto strumento di adattamento, o in quanto metodo indiretto di produzione: ho in mente gli aspetti epistemologici della scienza).

La scienza non è un sistema di asserzioni certe, o stabilite una volta per tutte, e non è neppure un sistema che avanzi costantemente verso uno stato definitivo. La nostra scienza non è conoscenza (*episteme*): non può mai pretendere di aver raggiunto la verità, e neppure un sostituto della verità, come la probabilità.

E tuttavia la scienza ha qualcosa di piú che un semplice valore di sopravvivenza biologica. Non è solo uno strumento utile. Sebbene non possa mai raggiungere né la verità né la probabilità, lo sforzo per ottenere la conoscenza, e la ricerca della verità, sono ancora i motivi piú forti della scoperta scientifica.

Non sappiamo, possiamo solo tirare a indovinare. E i nostri tentativi di indovinare sono guidati dalla fede non-scientifica, metafisica (se pur biologicamente spiegabile) nelle leggi, nelle regolarità che possiamo svelare, scoprire. Come Bacone, potremmo descrivere la nostra scienza contemporanea – «il metodo di ragionamento che oggi gli uomini applicano ordinariamente alla natura» – come consistente di «anticipazioni, affrettate e premature» e di «pregiudizi» [1].

[1] F. BACONE, *Novum organum*, I, 26.

Ma queste congetture meravigliosamente immaginative e ardite, o anticipazioni, sono controllate accuratamente e rigorosamente da controlli sistematici. Una volta avanzata, nessuna delle nostre «anticipazioni» viene sostenuta dogmaticamente. Il nostro metodo di ricerca non è quello che consiste nel difenderle, per provare quanta ragione avessimo. Al contrario, tentiamo di rovesciarle. Usando tutte le armi della nostra armeria logica, matematica e tecnica, tentiamo di provare che le nostre anticipazioni erano false, allo scopo di avanzare, in loro luogo, nuove anticipazioni ingiustificate e ingiustificabili, nuovi «pregiudizi affrettati e prematuri», per usare l'espressione denigratoria con cui li chiama Bacone [*3].

È possibile interpretare piú prosaicamente le strade percorse dalla scienza. Si potrebbe dire che il progresso può «... aver luogo solo in due modi: raccogliendo nuove esperienze percettive e organizzando meglio quelle già a nostra disposizione» [2]. Ma questa descrizione del progresso scienti-

[*3] Il termine, usato da Bacone, «anticipazione» («*anticipatio*»; *Novum Organum*, I, 26) significa quasi lo stesso del termine «ipotesi» (secondo il mio modo di usare questo termine). Bacone riteneva che per preparare la mente all'intuizione della vera *essenza*, o *natura*, della cosa, la si dovesse purgare meticolosamente da tutte le anticipazioni, da tutti i pregiudizi e da tutti gli idoli. Infatti la fonte di tutti gli errori è l'impurità della nostra stessa mente: la Natura non mente. La funzione principale dell'induzione eliminatoria è (come per Aristotele) quella di aiutare la purificazione della mente. (Cfr. anche il mio libro *Open Society* cit., cap. XXIV, cap. X, nota 59; cap. XI, nota 33, in cui viene descritta brevemente la teoria aristotelica dell'induzione). Il purgare la mente dai pregiudizi è concepito come una specie di rituale prescritto allo scienziato che desidera preparare la propria mente all'interpretazione (cioè alla lettura impregiudicata) del Libro della Natura, proprio come il mistico purifica la propria anima per prepararla alla visione di Dio. (Cfr. l'introduzione a *Conjectures and Refutations* cit.).

[2] FRANK, *Das Kausalgesetz und seine Grenzen* cit. * Il punto di vista secondo cui il progresso della scienza è dovuto all'accumulazione di esperienze percettive è ancora sostenuto da molti (cfr. la mia seconda prefazione, 1958). La mia negazione di questo punto di vista è strettamente connessa col rifiuto della dottrina secondo cui la scienza, o conoscenza, è *destinata* a progredire, perché le nostre esperienze sono *destinate* ad accumularsi. Al contrario, io credo che il progresso della scienza dipenda dalla libera competizione del pensiero, e perciò dalla libertà, e che tale progresso raggiungerebbe il suo termine il giorno in cui la libertà fosse distrutta (anche se può darsi che continui, per qualche tempo, limitatamente a certi campi, specialmente in quello della tecnologia). Questo punto di vista è stato esposto con maggiore completezza nel mio libro *Poverty of Historicism* cit., § 32. Nella prefazione di questo libro sostengo anche che l'accrescimento della nostra conoscenza non può essere predetto con mezzi scientifici, e che, di conseguenza, anche il corso della nostra storia futura è imprevedibile.

fico, pur non essendo di fatto falsa, sembra fuori bersaglio. Risente troppo di reminiscenze dell'induzione baconiana: suggerisce troppo da vicino l'industriosa raccolta degli «innumerevoli grappoli, ubertosi e maturi»[3], da cui Bacone si aspettava di veder fluire il vino della scienza: ricorda troppo il mito baconiano di un metodo scientifico che parte dall'osservazione e dall'esperimento e di qui procede alle teorie. (Tra l'altro, questo metodo leggendario ispira ancor oggi alcuni degli scienziati piú moderni, che tentano di praticarlo, per via della credenza predominante secondo cui si tratterebbe del metodo della fisica sperimentale).

Il progresso della scienza non è dovuto al fatto che, coll'andar del tempo, si accumulano esperienze percettive in numero sempre maggiore. E non è dovuto al fatto che facciamo un uso sempre migliore dei nostri sensi. Per quanto industriosamente le raccogliamo e le scegliamo, da esperienze sensibili non interpretate non potremo mai distillare la scienza. I soli mezzi a nostra disposizione per interpretare la natura sono le idee ardite, le anticipazioni ingiustificate e le speculazioni infondate: sono il solo organo, i soli strumenti di cui disponiamo. E per guadagnare il nostro premio dobbiamo azzardarci ad usarli. Quelli tra noi che non espongono volentieri le loro idee al rischio della confutazione non prendono parte al gioco della scienza.

Anche il controllo sperimentale delle nostre idee, sobrio e accurato, è a sua volta ispirato da idee; l'esperimento è azione pianificata, ciascun passo della quale è guidato dalla teoria. Non per caso andiamo a inciampare nelle nostre esperienze; e neppure le lasciamo scorrere su di noi, come una corrente. Invece, dobbiamo essere attivi: dobbiamo «*fare*» le nostre esperienze. Siamo sempre noi a formulare le questioni da porre alla natura: siamo noi a tentare sempre di nuovo di porre queste questioni, in modo da ottenere un «sí» o un «no» ben chiari (perché la natura non ci dà una risposta, se non facciamo pressione per ottenerla). E alla fine, siamo ancora noi a dare la risposta: siamo noi che, dopo esami severi, decidiamo la risposta alla domanda che abbiamo posto alla natura, dopo lunghi e seri tentativi di ottenere dalla natura un «no» non equivoco. «Una volta per tutte

[3] BACONE, *Novum Organum* cit., I, 123.

– scrive Weyl[4] e io sono pienamente d'accordo con lui – desidero proclamare la mia ammirazione illimitata per il lavoro dello sperimentatore, per la sua lotta per strappare *fatti interpretabili* alla natura riluttante, che sa cosí bene come opporre alle nostre teorie un *No* decisivo – o un *Sí* che nessuno può udire».

Il vecchio ideale scientifico dell'*episteme* – della conoscenza assolutamente certa, dimostrabile – si è rivelato un idolo. L'esigenza dell'oggettività scientifica rende ineluttabile che ogni asserzione della scienza rimanga necessariamente e *per sempre allo stato di tentativo.* È bensí vero che un'asserzione scientifica può essere corroborata, ma ogni corroborazione è relativa ad altre asserzioni che a loro volta hanno natura di tentativi. Possiamo essere «assolutamente certi» solo nelle nostre esperienze soggettive di convinzione, nella nostra fede soggettiva[5].

Con l'idolo della certezza (compreso quello dei gradi di certezza imperfetta, o probabilità) crolla una delle linee di difesa dell'oscurantismo, che sbarrano la strada al progresso scientifico. Perché la venerazione che tributiamo a quest'idolo è d'impedimento non solo all'arditezza delle nostre questioni ma anche al rigore dei nostri controlli. La concezione sbagliata della scienza si tradisce proprio per il suo smodato desiderio di essere quella giusta. Perché non il *possesso* della conoscenza, della verità irrefutabile, fa l'uomo di scienza, ma la *ricerca* critica, persistente e inquieta, della verità.

Il nostro deve dunque essere un atteggiamento di rassegnazione? Dobbiamo dire che la scienza può adempiere solo al suo compito biologico; che, nel migliore dei casi, può solo provare il proprio valore nelle applicazioni pratiche che possono corroborarla? Non credo. La scienza non persegue mai lo scopo illusorio di rendere le sue risposte definitive, e neppure probabili. Piuttosto il suo progresso tende sempre verso lo scopo infinito, e tuttavia raggiungibile, di scoprire problemi sempre nuovi, piú generali e piú profondi, e di sottoporre le sue risposte, sempre date in via di tentativo, a controlli sempre rinnovati e sempre piú rigorosi.

[4] WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* cit., p. 2.

[5] Cfr., ad esempio, § 30, nota 3. Naturalmente quest'ultima osservazione, piú che un'osservazione epistemologica, è un'osservazione psicologica. Cfr. §§ 7 e 8.

Appendici

Appendice I

Definizione della dimensione di una teoria (cfr. §§ 38 e 39)

La definizione che segue qui dev'essere considerata come semplicemente provvisoria *[1]. Si tratta di un tentativo di definire la dimensione di una teoria in modo da farla concordare con la dimensione dell'insieme di curve che risulta rappresentando il dominio d'applicazione della teoria per mezzo d'una carta millimetrata. Sorge qui una difficoltà per il fatto che, tanto per cominciare, non si dovrebbe assumere che per il dominio in questione sia definita una metrica, e neppure una topologia; in particolare, non si dovrebbe assumere che siano definite relazioni d'intorno. Ammetto che la definizione proposta, piú che superare la difficoltà, l'aggira. La possibilità di aggirarla è connessa col fatto che una teoria proibisce sempre alcuni di quelli che abbiamo chiamato *eventi «omotipici»* (cioè, una classe di accadimenti che differiscono solo relativamente alle loro coordinate spazio-temporali; cfr. §§ 23 e 31). Per questa ragione, nello schema che genera il dominio di applicazione appariranno, in generale, coordinate spazio-temporali, e di conseguenza il campo delle asserzioni relativamente atomiche mostrerà, in generale, un ordine topologico, e persino un ordine metrico.

*[1] Ecco una definizione semplificata e un po' piú generale. Siano A e X due insiemi di asserzioni. (Intuitivamente, A è un insieme di leggi universali, X un insieme – di solito infinito – di asserzioni singolari di controllo). Diciamo allora che X è un dominio (omogeneo) d'applicazione rispetto ad A (in simboli: $X = F_A$) se e solo se, per ogni asserzione a di A, esiste un numero naturale $d(a) = n$, che soddisfa le due condizioni seguenti: I) ogni congiunzione c_n di n asserzioni differenti di X è compatibile con a; II) per ogni tale congiunzione c_n esistono due asserzioni x e y di X, tali che $x.c_n$ è incompatibile con a e $y.c_n$ è derivabile da $a.c_n$, ma non è derivabile né da a né da c_n.

$d(a)$ si chiama la dimensione di a, o il grado di composizione di a rispetto a $X = F_A$; e $1/d(a)$ o, diciamo, $1/(d(a)+1)$, può essere preso come misura della semplicità di a.

Il problema è sviluppato ulteriormente nell'appendice *VIII.

La definizione proposta dice: una teoria *t* si dice «*d*-dimensionale rispetto al dominio d'applicazione *F*» se, e solo se, fra *t* e *F* vige la seguente relazione: esiste un numero *d* tale che *a*) la teoria non collide con nessuna *d*-upla del dominio, e, *b*), una qualsiasi *d*-upla del dominio, in congiunzione con la teoria, divide univocamente tutte le rimanenti asserzioni relativamente atomiche in due sottoclassi infinite, *A* e *B*, tali che risultano soddisfatte le seguenti condizioni: α) ogni asserzione della classe *A*, congiunta con la *d*-upla data, forma una «$d+1$-upla falsificante», cioè, un falsificatore potenziale della teoria; β) d'altro canto, la classe *B* è la somma di una o piú sottoclassi infinite $[B_i]$ (ma sempre di un numero finito di queste sottoclassi), tali che la congiunzione di un qualsiasi numero di asserzioni appartenenti a una qualsiasi di queste sottoclassi $[B_i]$ è compatibile con la congiunzione della *d*-upla data e della teoria.

Questa definizione è intesa a escludere la possibilità che una teoria abbia due domini d'applicazione tali che le asserzioni relativamente atomiche dell'un dominio risultino dalla congiunzione delle asserzioni relativamente atomiche dell'altro (e questo si deve impedire se si vuole che il dominio d'applicazione sia identificabile con quello della sua rappresentazione grafica; cfr. § 39). Posso aggiungere che, per mezzo di questa definizione, il problema delle asserzioni atomiche (cfr. § 38, nota 2) viene risolto in una maniera che potrebbe essere chiamata «deduttivistica», perché è la stessa teoria a determinare quali asserzioni singolari siano *relativamente atomiche* (rispetto alla teoria). Infatti il dominio d'applicazione si definisce proprio attraverso la teoria, e con il dominio d'applicazione si definiscono le asserzioni che a causa della loro forma logica hanno eguale status rispetto alla teoria. Dunque, la scoperta di asserzioni di qualche forma elementare, a partire dalle quali si costruiscono induttivamente, o si compongono col metodo delle funzioni di verità, altre asserzioni piú composite, non risolve il problema delle asserzioni atomiche. Al contrario, le asserzioni relativamente atomiche – e, insieme con esse, le asserzioni singolari – appaiono, per cosí dire, come una specie di precipitazione o di deposito (relativamente) solido, lasciato dalle asserzioni universali della teoria.

Il calcolo generale della frequenza nelle classi finite (cfr. §§ 52 e 53)[*1]

Il teorema generale della moltiplicazione: Denotiamo con «α» la classe di riferimento finita, e con «β» e «γ» le due classi-proprietà. Il nostro primo problema consiste nel determinare la frequenza di quegli elementi che appartengono sia a β sia a γ.

La soluzione è data dalla formula:

$$1) \qquad {}_{\alpha}F''(\beta.\gamma) = {}_{\alpha}F''(\beta).{}_{\alpha.\beta}F''(\gamma)$$

o, siccome β e γ possono scambiarsi di posto

$$1') \qquad {}_{\alpha}F''(\beta.\gamma) = {}_{\alpha.\gamma}F''(\beta).{}_{\alpha}F''(\gamma).$$

La prova risulta immediatamente dalla definizione data nel § 52. Dalla 1) otteniamo per sostituzione, d'accordo con questa definizione:

$$1.1) \qquad \frac{N(\alpha.\beta.\gamma)}{N(\alpha)} = \frac{N(\alpha.\beta)}{N(\alpha)} \cdot \frac{N(\alpha.\beta.\gamma)}{N(\alpha.\beta)}$$

che, dopo l'eliminazione di «$N(\alpha.\beta)$» si rivela un'identità. (Si confronti, con questa prova e con la prova di 2_s, Reichenbach, *Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung* cit., p. 593).

Se assumiamo *l'indipendenza* (cfr. § 53), cioè:

$$1^s) \qquad {}_{\alpha.\beta}F''(\gamma) = {}_{\alpha}F''(\gamma)$$

otteniamo, dalla 1), il *teorema speciale della moltiplicazione*

$$1_s) \qquad {}_{\alpha}F''(\beta.\gamma) = {}_{\alpha}F''(\beta).{}_{\alpha}F''(\gamma).$$

[*1] Quest'appendice è stata in seguito da me sviluppata in un trattamento assiomatico della probabilità. Cfr. appendici *III-*V.

Con l'aiuto dell'equivalenza di 1) e 1'), si può ora provare la simmetria della relazione d'indipendenza (cfr. § 53, nota 4).

I *teoremi dell'addizione* trattano con la frequenza di quegli elementi che appartengono o a β o a γ. Se denotiamo la combinazione disgiuntiva di queste classi col simbolo «β+γ», dove il segno «+», *se posto fra due designazioni di classe*, non significa l'addizione aritmetica, ma *l'«o» non esclusivo*, allora il teorema generale di addizione è:

2) $$_{\alpha}F''(\beta+\gamma) = {_{\alpha}F''(\beta)} + {_{\alpha}F''(\gamma)} - {_{\alpha}F''(\beta.\gamma)}.$$

Quest'asserzione si ottiene, dalla definizione data nel § 52, facendo uso della formula universalmente valida del calcolo delle classi

2.2) $$\alpha.(\beta+\gamma) = (\alpha.\beta)+(\alpha.\gamma)$$

e della formula, che è anch'essa universalmente valida

2.1) $$N(\beta+\gamma) = N(\beta)+N(\gamma)-N(\beta.\gamma).$$

Se assumiamo che, all'interno di α, β e γ non abbiamo membri in comune – condizione, questa, che può essere simbolizzata dalla formula

2^s) $$N(\alpha.\beta.\gamma) = 0$$

– otteniamo, dalla 2), il *teorema speciale dell'addizione*

2_s) $$_{\alpha}F''(\beta+\gamma) = {_{\alpha}F''(\beta)} + {_{\alpha}F''(\gamma)}.$$

Il teorema speciale dell'addizione vale per *tutte* le proprietà che sono *proprietà primarie* all'interno di una classe α, dal momento che le proprietà primarie si escludono reciprocamente. Naturalmente, la somma delle frequenze relative di queste proprietà primarie è sempre eguale a 1.

I *teoremi della divisione* asseriscono la frequenza di una proprietà γ all'interno di una classe *selezionata* da α rispetto alla proprietà β. La formula generale si ottiene immediatamente invertendo la 1).

3) $$_{\alpha.\beta}F''(\gamma) = \frac{_{\alpha}F''(\beta.\gamma)}{_{\alpha}F''(\beta)}.$$

Se trasformiamo il *teorema generale della divisione*, 3), con l'aiuto del teorema speciale della moltiplicazione, otteniamo

$$3^s) \qquad {}_{\alpha.\beta}F''(\gamma) = {}_{\alpha}F''(\gamma).$$

In questa formula riconosciamo di nuovo la condizione 1^s): vediamo cosí che *l'indipendenza può essere descritta come un caso speciale di selezione.*

I vari teoremi che si possono legare al nome di Bayes sono tutti casi speciali del teorema della divisione. Assumendo che $(\alpha.\gamma)$ sia una sottoclasse di β, o, in simboli,

$$3^{bs}) \qquad \alpha.\gamma \subset \beta$$

otteniamo, dalla 3), la *prima* forma (speciale) della regola di Bayes:

$$3_{bs}) \qquad {}_{\alpha.\beta}F''(\gamma) = \frac{{}_{\alpha}F''(\gamma)}{{}_{\alpha}F''(\beta)}$$

mediante una sostituzione simile a quella di prima.

Possiamo evitare l'assunzione 3^{bs}) introducendo, in luogo di «β», la somma delle classi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. In analogia col nostro uso del segno «+» *tra due* designazioni di classe, useremo il segno «Σ» *davanti alle designazioni di classe*; possiamo dunque scrivere una *seconda* forma (universalmente valida) del teorema di Bayes, come segue

$$3_b) \qquad {}_{\alpha.\Sigma\beta_i}F''(\beta_i) = \frac{{}_{\alpha}F''(\beta_i)}{{}_{\alpha}F''(\Sigma\beta_i)}.$$

Se assumiamo che le classi β_i non abbiano nessun membro comune in α, possiamo applicare, al numeratore di questa formula, il teorema speciale dell'addizione 2^s). Quest'assunzione può essere scritta

$$3/2^s) \qquad N(\alpha.\beta_i.\beta_j) = 0 \qquad (i \neq j).$$

Con quest'assunzione otteniamo la *terza* forma (speciale) del teorema di Bayes, che è sempre applicabile alle proprietà primarie β_i.

$$3/2_s) \qquad {}_{\alpha.\Sigma\beta_i}F''(\beta_i) = \frac{{}_{\alpha}F''(\beta_i)}{\Sigma\,{}_{\alpha}F''(\beta_i)}.$$

La *quarta*, e piú importante forma speciale del teorema di Bayes si può ottenere, dalle due ultime formule, insieme con le sue *assunzioni* costitutive $3/2^s$) e 4^{bs}):

$$4^{bs}) \qquad \alpha \,.\, \gamma \subset \sum \beta_i$$

che è sempre soddisfatta se è soddisfatta $\gamma \subset \sum \beta_i$.

Nella $3/2_s$), sostituendo «$\beta_i \gamma$» a «β_i», applichiamo al primo membro del risultato la formula

$$4^{bs}.1) \qquad \alpha \,.\, \sum \beta_i \,.\, \gamma = \alpha \,.\, \gamma. \qquad 4^{bs})$$

A secondo membro del risultato applichiamo 1') sia al numeratore sia al denominatore. Otteniamo così:

$$4_s) \qquad {}_{\alpha.\gamma}F''(\beta_i) = \frac{{}_{\alpha.\beta_i}F''(\gamma) \,.\, {}_{\alpha}F''(\beta_i)}{\sum({}_{\alpha.\beta_i}F''(\gamma) \,.\, {}_{\beta}F''(\beta_i))}.$$

Cosí, se β_i è un sistema esclusivo di classi di proprietà e ogni classe di proprietà che sia (all'interno di α) parte di β_i, allora la 4_s) dà la frequenza di ognuna delle proprietà β_i all'interno di una selezione rispetto a γ.

Derivazione della prima forma della formula binomiale (per sequenze finite di segmenti sovrapposti, cfr. § 56)

Si può dire che la prima formula binomiale [*1]

1) $$_{\alpha(n)}F''(m) = {}^nC_m p^m q^{n-m}$$

(dove $p = {}_\alpha F''(1)$, $q = {}_\alpha F''(0)$, $m \leq n$) è provata sotto l'assunzione che α è (almeno) $n-1$ libera (trascurando gli errori che sorgono all'ultimo termine; cfr. § 56), se possiamo mostrare che

2) $$_{(n)}F''(\sigma_m) = p^m q^{n-m}$$

dove «σ_m» denota una particolare n-upla (sia pure scelta arbitrariamente) che contiene m uno. (Il simbolo deve indicare che ciò che è dato è l'intera disposizione di questa n-upla, cioè, non soltanto il numero degli uno, ma anche la loro posizione nella n-upla). Si assuma infatti che la 2) valga per tutti gli n, gli m e i σ (cioè per le varie disposizioni degli uno). Allora, secondo un ben noto teorema del calcolo combinatorio, ci saranno ${}^nC_m$ modi distinti di distribuire m uno in n posti; e, tenendo conto del teorema speciale dell'addizione, potremo allora asserire la 1).

Supponiamo ora che la 2) sia provata per ogni n, cioè, per *un* particolare n e per tutti gli m e tutti i σ che sono compatibili con questo n. Mostreremo ora che, data quest'assunzione, la 2) deve anche valere per $n+1$; proveremo cioè

3.0) $$_{\alpha(n+1)}F''(\sigma_{m+0}) = p^m q^{n+1-m}$$

e

3.1) $$_{\alpha(n+1)}F''(\sigma_{m+1}) = p^{m+1} q^{(n+1)-(m+1)}$$

[*1] Si noti che $\binom{n}{m}$ è un modo alternativo per scrivere il coefficiente binomiale ${}^nC_m$, cioè il numero di modi in cui m cose possono essere disposte in n posti, purché $m \leq n$.

dove «σ_{m+0}» o «σ_{m+1}» significano rispettivamente quelle sequenze della lunghezza $n+1$ che risultano da σ_m aggiungendo, alla sua estremità, uno zero o un uno.

Si assuma, per ogni lunghezza n delle n-uple (o segmenti) considerate, che α sia (almeno) $n-1$ libera (da retroeffetti); dunque, per un segmento della lunghezza $n+1$, α dev'essere considerata come almeno n libera. Poniamo che «$\acute{\sigma}_m$» denoti la proprietà di essere successore di un'n-upla σ_m. Potremo allora asserire

$$4.0) \qquad {}_{\alpha}F''(\acute{\sigma}_m . 0) = {}_{\alpha}F''(\acute{\sigma}_m) . {}_{\alpha}F''(0) = {}_{\alpha}F''(\acute{\sigma}_m) . q$$

$$4.1) \qquad {}_{\alpha}F''(\acute{\sigma}_m . 1) = {}_{\alpha}F''(\acute{\sigma}_m) . {}_{\alpha}F''(1) = {}_{\alpha}F''(\acute{\sigma}_m) . p.$$

Consideriamo ora che ovviamente in α devono esserci esattamente tanti σ_m, (cioè tanti successori della sequenza «σ_m»), quante sono le sequenze σ_m in $\alpha_{(n)}$, e quindi, che

$$5) \qquad {}_{\alpha}F''(\acute{\sigma}_m) = {}_{\alpha_{(n)}}F''(\acute{\sigma}_m).$$

Con questo possiamo trasformare il secondo membro della 4). Per la stessa ragione abbiamo

$$6.0) \qquad {}_{\alpha}F''(\acute{\sigma}_m . 0) = {}_{\alpha_{(n+1)}}F''(\acute{\sigma}_{m+0})$$

$$6.1) \qquad {}_{\alpha}F''(\acute{\sigma}_m . 1) = {}_{\alpha_{(n+1)}}F''(\acute{\sigma}_{m+1}).$$

Con questo possiamo trasformare il primo membro della 4). Cioè a dire, sostituendo la 5) e la 6) nella 4), otteniamo

$$7.0) \qquad {}_{\alpha_{(n+1)}}F''(\sigma_{m+0}) = {}_{\alpha_{(n)}}F''(\sigma_m) . q$$

$$7.1) \qquad {}_{\alpha_{(n+1)}}F''(\sigma_{m+1}) = {}_{\alpha_{(n)}}F''(\sigma_m) . p.$$

Vediamo cosí che, assumendo che la 2) valga per qualche n (e per tutte le disposizioni σ_m che gli appartengono), possiamo derivare la 3) per induzione matematica. Che la 2) sia in realtà valida per $n = 2$ e per tutti i σ_m (dove $m \leq 2$) si vede assumendo, prima $m = 1$ e poi $m = 0$. Dunque possiamo asserire la 3) e, di conseguenza, la 2) e la 1).

Appendice IV

Un metodo per costruire modelli di sequenze casuali (cfr. §§ 58, 64 e 66)

Come nel § 55, assumiamo che per ogni numero finito n si possa costruire un periodo generatore che sia n libero (da retroeffetti) e che mostri distribuzione eguale. In ogni periodo siffatto, ogni x-upla (per $x \leq n+1$) di uno e di zeri, possibile da un punto di vista combinatorio, comparirà almeno una volta [*1].

a) Costruiamo, nel modo seguente, una sequenza-modello, che sia «assolutamente libera» (da retroeffetti). Scriviamo un periodo n libero per un n arbitrariamente scelto. Questo periodo avrà un numero finito di termini – poniamo n_1. Ora scriviamo un periodo che sia almeno $n_1 - 1$ libero. Suppo-

[*1] Ci sono vari metodi di costruzione che si possono applicare al compito di costruire un periodo generatore di una frequenza n libera, con equidistribuzione. Un metodo piuttosto semplice è il seguente. Ponendo $x = n+1$, cominciamo col costruire la *tavola* di tutte le 2^x possibili x-uple di uno e di zeri (ordinati secondo una qualche regola lessicografica, ad esempio secondo la grandezza). Cominciamo poi il nostro periodo scrivendo l'ultima di queste x-uple (consistente di x uno), che prenderemo dalla nostra tavola. Quindi procediamo secondo la regola che segue: si aggiunga sempre uno zero (*se ciò è ammissibile*) al segmento iniziale: se la cosa non è ammissibile si aggiunga un uno, e si prenda sempre dalla tavola l'ultima x-upla del periodo iniziale che si è creata, qualunque essa sia. (Qui «*se ciò è ammissibile*» significa: «se l'ultima x-upla del periodo iniziale cosí creata non è ancora comparsa, e quindi non è ancora stata presa dalla tavola»). Si proceda in questo modo fin quando non si siano prese dalla tavola tutte le x-uple della lista: il risultato sarà una sequenza della lunghezza $2^x + x - 1$, consistente di: *a*), un periodo generatore, di lunghezza $2^x = 2^{n+1}$, di un'alternativa n libera a cui, *b*), sono stati aggiunti i primi n elementi del periodo successivo. Una sequenza costruita in questo modo può essere chiamata la sequenza n libera «*piú breve*», infatti è facile vedere che non può esistere nessun periodo generatore piú breve per una sequenza periodica n libera di uno che abbia lunghezza 2^{n+1}.

Le prove della validità della regola di costruzione che abbiamo dato qui, sono state trovate dal dottor L. R. B. Elton e da me. Intendiamo pubblicare insieme un articolo sull'argomento.

niamo che il nuovo periodo abbia la lunghezza n_2. In questo nuovo periodo deve comparire almeno una sequenza identica al periodo dato precedentemente di lunghezza n_1; riordineremo il nuovo periodo in modo da farlo cominciare con questa sequenza (ciò è sempre possibile, d'accordo con l'analisi del § 55). Chiameremo questo nuovo periodo il secondo periodo. Ora scriviamo un nuovo periodo che sia almeno $n_2 - 1$ libero e cerchiamo, in questo terzo periodo, quella sequenza che è identica al *secondo periodo* (dopo che è stato riordinato), dopo di che riordiniamo il terzo periodo in modo che cominci col secondo, e cosí via. In questo modo otteniamo una sequenza la cui lunghezza cresce molto rapidamente e il cui periodo iniziale è il periodo che è stato scritto per primo. Prescrivendo una particolare sequenza iniziale, insieme con alcune ulteriori condizioni (come, ad esempio, che i periodi che scriviamo non siano mai piú lunghi del necessario, cosicché siano *esattamente* $n_i - 1$ liberi e non semplicemente *almeno* $n_i - 1$ liberi) possiamo migliorare questo metodo di costruzione fino a farlo diventare *non ambiguo* e a renderlo capace di definire una sequenza definita in modo da poter calcolare, per ogni termine della sequenza, se sia un uno o uno zero [*2]. Abbiamo cosí una sequenza (definita) costruita secondo una regola matematica, con frequenze i cui limiti sono

$$_{\alpha}F'(1) = {_{\alpha}F'(0)} = \tfrac{1}{2}$$

[*2] Per dare un esempio concreto di questa costruzione – della costruzione cioè, *di una sequenza casuale piú breve* (cosí, infatti, propongo ora di chiamarla), possiamo cominciare col periodo

0) 0 1

di lunghezza $n_0 = 2$. (Possiamo dire che questo periodo genera un'alternativa 0 libera). Inoltre dobbiamo costruire un periodo che sia $n_0 - 1$ libero, cioè a dire 1 libero. Il metodo della nota *1 dà, come periodo generatore di un'alternativa 1 libera, «1 1 0 0», che dev'essere riordinato in modo da cominciare con la sequenza «0 1», che qui ho chiamato 0). Il risultato sarà

1) 0 1 1 0

con $n_1 = 4$. Costruiamo poi il periodo $n_1 - 1$ libero (cioè, 3 libero), definito dal metodo della nota *1. Tale periodo sarà

1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 .

Lo riordiniamo in modo che cominci con la nostra sequenza iniziale 1); il risultato sarà

2) 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 .

Usando il procedimento impiegato nella prova della terza forma della formula binomiale (§ 60) o del teorema di Bernoulli (§ 61), si può mostrare (con qualsiasi grado di approssimazione), *per qualsiasi valore di frequenza scegliamo*, che esistono sequenze che sono «assolutamente libere» – purché si assuma (e quest'assunzione è stata appena provata) che esiste almeno una sequenza che è assolutamente libera.

b) Si può ora usare un metodo di costruzione analogo per mostrare che esistono sequenze che posseggono una frequenza mediana «assolutamente libera» (cfr. § 64) pur non avendo alcun limite di frequenza. Non dobbiamo far altro che modificare il procedimento *a*) in modo tale che, dopo un certo numero dato di aumenti in lunghezza, aggiungiamo sempre alla sequenza un «blocco» (o «iterazione») finito, composto, ad esempio, di uno. Questo blocco viene reso tanto lungo da

Poiché $n_2 = 16$, dovremo successivamente costruire, col metodo esposto nella nota *1, un periodo 15 libero, 3), di lunghezza $2^{16} = 65\,536$. Dopo aver costruito questo periodo 15 libero, 3), dobbiamo essere in grado di scoprire dove, in questo lungo periodo, compare la nostra sequenza 2). Riordiniamo quindi 3) in modo che inizi con 2), e procediamo a costruire 4), che avrà lunghezza $2^{65\,536}$.

Una sequenza costruita in questo modo può essere chiamata «sequenza casuale *piú breve*» 1), perché ogni passo della sua costruzione consiste della costruzione, per qualche *n*, di un periodo piú breve *n* libero (cfr. la nota *1 a quest'appendice), e, 2), perché la sequenza è costruita in modo tale che, qualunque sia lo stadio della sua costruzione, *comincia* sempre con un periodo *n* libero piú breve. Di conseguenza, questo metodo di costruzione assicura che ogni sezione iniziale, di lunghezza

$$m = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^2}}}}}$$

è un periodo *n* libero piú breve, per *n* piú grande possibile (cioè, per

$$n = (\log_2 m) - 1).$$

Questa proprietà di «brevità» è molto importante; infatti possiamo sempre ottenere sequenze *n* libere o assolutamente libere con equidistribuzione, che comincino con un segmento finito di lunghezza *qualsiasi m*, scelto in modo che il segmento finito in questione non abbia carattere casuale, ma consista, poniamo, solo di zeri o solo di uno, o di una qualsiasi disposizione intuitivamente «regolare»; ciò mostra che, per le applicazioni, la richiesta di libertà *n*, o anche di libertà assoluta, non è sufficiente e dev'essere sostituita da qualcosa come la richiesta che la libertà *n diventi manifesta fin dall'inizio*. Ciò è precisamente quello che una sequenza casuale «piú breve» riesce a ottenere nel modo piú radicale possibile. Dunque, solo tali sequenze possono offrirci un modello ideale di casualità; per queste sequenze «piú brevi», *la convergenza si può provare immediatamente*, al contrario di quanto accade per gli esempi dati (piú sotto nel testo) sotto *b*) e *c*). Cfr. anche appendice *VI.

raggiungere una certa frequenza p, diversa da ½. Dopo che si è raggiunta questa frequenza, l'intera sequenza che ora scriviamo (ora può avere la lunghezza m_i) viene considerata come la sequenza iniziale di un periodo che è $m_i - 1$ libero (con distribuzione eguale), e cosí via.

c) Infine, è possibile costruire, in maniera analoga, un modello di una sequenza che ha *piú di una* frequenza mediana «assolutamente libera». Secondo *a*) ci sono sequenze che non hanno distribuzione eguale e sono «assolutamente libere». Dunque non dobbiamo far altro che combinare due sequenze siffatte, A e B (aventi frequenze p e q) nel modo che segue. Scriviamo una certa sequenza iniziale di A, poi andiamo a cercare in B finché non vi troviamo questa sequenza e riordiniamo il periodo di B che precede questo punto, in modo che cominci con la sequenza che abbiamo scritto; dopo di che usiamo questo intero periodo di B – che abbiamo riordinato – come sequenza iniziale. Successivamente andiamo a cercare in A finché non troviamo questa nuova sequenza che abbiamo scritto; riordiniamo A e cosí via. In questo modo otteniamo una sequenza in cui ricorrono sempre di nuovo termini fino al punto in cui la sequenza è n_i libera per la frequenza relativa p della sequenza A, ma in cui, anche, ricorrono sempre di nuovo termini fino al punto in cui la sequenza è n_i libera per la frequenza q di B. Poiché in questo caso i numeri n_i crescono senza limite, otteniamo un modo di costruire la sequenza che ha due «frequenze mediane» distinte, che sono entrambe «assolutamente libere». (Abbiamo infatti determinato A e B in modo tale che i limiti delle loro frequenze sono distinti).

Osservazione. L'applicabilità del teorema speciale della moltiplicazione al classico problema del lancio simultaneo di due dadi, X e Y (e ai problemi connessi con questo), è assicurata se, ad esempio, facciamo la stima ipotetica che la «sequenza di combinazione» (cosí possiamo chiamarla) – cioè la sequenza α che ha i lanci di X come termini dispari e i lanci di Y come termini pari – è una sequenza casuale.

Appendice v

Esame di un'obiezione. L'esperimento delle due fessure (cfr. § 76) *[1]

L'esperimento immaginario descritto piú sotto, *a*), è destinato a confutare la mia asserzione, che le misurazioni simultanee (non predittive), quanto si vuole esatte, della posizione e dell'impulso di una particella sono compatibili con la teoria dei quanti.

a) Sia A un atomo radiante, e supponiamo che la luce che ne irradia cada su uno schermo S, passando per due fessure F_1 *e* F_2. Secondo Heisenberg, in questo caso possiamo misurare esattamente o la posizione di A o l'impulso della radiazione, ma non entrambi. Se misuriamo esattamente la posizione (operazione, questa, che «offusca» o «imbratta» l'impulso), allora possiamo assumere che la luce venga emessa da A in onde sferiche. Ma se misuriamo esattamente l'impulso – misurando ad esempio il rinculo dovuto all'emissione di fotoni («offuscando» o «imbrattando» cosí la posizione), siamo in grado di calcolare l'esatta direzione e l'impulso esatto dei fotoni emessi. In questo caso dovremo considerare la radiazione come corpuscolare («radiazione aghiforme» [*needle-radiation*]). Dunque, alle due operazioni di misurazione corrispondono due differenti tipi di radiazioni, cosicché otteniamo due risultati sperimentali differenti. Infatti, se misuriamo esattamente la posizione otteniamo sullo schermo uno schema d'interferenza [*interference-pattern*]: una fonte luminosa puntiforme – e una fonte luminosa la cui po-

*[1] Cfr. anche appendice *XI e *Postscript* cit., cap. *V, § *110. Secondo il mio punto di vista attuale l'esperimento delle due fessure dev'essere trattato in modo differente, ma l'interpretazione proposta in quest'appendice riveste ancora un certo interesse. Le osservazioni contenute in *e*) mi sembrano contenere una critica valida del tentativo di spiegare il dualismo di particella e di onda in termini di «complementarità», tentativo che mi sembra sia stato abbandonato da alcuni fisici in questi ultimi tempi.

sizione può essere misurata esattamente *è* puntiforme – emette luce coerente. Se, d'altra parte, misuriamo esattamente l'impulso, non otteniamo nessuno schema d'interferenza. (Dopo che i fotoni sono passati attraverso le fessure, sullo schermo appaiono lampi di luce, o scintillazioni prive di schemi d'interferenza, coerentemente col fatto che la posizione è «offuscata» o «imbrattata» e che una sorgente di luce non puntiforme non emette luce coerente). Se supponessimo di poter misurare esattamente sia la posizione sia l'impulso, allora l'atomo dovrebbe, da un lato, emettere onde sferiche continue che produrrebbero schemi d'interferenza (secondo la teoria ondulatoria), mentre d'altro lato dovrebbe, secondo la teoria corpuscolare, emettere un fascio incoerente di fotoni. (Se fossimo in grado di calcolare la traiettoria di ciascun fotone non dovremmo mai ottenere nulla che somigli a una «interferenza», dal momento che i fotoni non si distruggono l'un l'altro e non interagiscono in altri modi). L'assunzione che si prendano simultaneamente misure esatte della posizione *e* dell'impulso conduce cosí a due predizioni che si contraddicono vicendevolmente. Da un lato, infatti, tale assunzione conduce alla predizione che appariranno schemi d'interferenza, mentre dall'altro lato conduce alla predizione che non apparirà nessuno di tali schemi.

b) Ora reinterpreterò statisticamente quest'esperimento immaginario. In primo luogo tratterò del tentativo di misurare esattamente la posizione. All'atomo radiante *singolo* sostituisco uno sciame di atomi, in modo che tali atomi emettano luce coerente, che si propaga sotto forma di onde sferiche. Il risultato si ottiene usando un secondo schermo con una piccolissima apertura *A*, situato tra lo sciame di atomi e il primo schermo, in modo che l'apertura *A* si trovi esattamente nel posto occupato in precedenza dal singolo atomo radiante *A*. Lo sciame di atomi emette luce e questa, dopo essere stata sottoposta a una selezione secondo una data posizione durante il passaggio attraverso l'apertura *A*, si diffonde sotto forma di onde sferiche continue. Cosí all'atomo singolo, la cui posizione è esattamente determinata, sostituiamo un caso statistico di selezione puramente posizionale

c) In modo simile, all'atomo il cui impulso sia misurato esattamente, ma la cui posizione sia offuscata o imbrattata, si sostituirà una pura selezione secondo un impulso dato; o, in altre parole, un fascio monocromatico di fotoni che viaggiano secondo linee parallele, partendo da qualche fonte luminosa (non puntiforme).

In ciascuno dei due casi otteniamo il risultato sperimentale corretto: schemi di interferenza nel caso *b*) e nessuno schema d'interferenza nel caso *c*).

d) Come dobbiamo interpretare il terzo caso, che dovrebbe condurre a due predizioni fra loro contraddittorie? Per scoprirlo, dobbiamo immaginare di aver osservato esattamente la traiettoria dell'atomo *A*, cioè a dire, sia la sua posizione sia il suo impulso. Dovremmo quindi trovare che l'atomo emette fotoni singoli e rincula ad ogni emissione. Ciascun rinculo lo sposta in una posizione differente, e ogni volta lo spostamento avviene in una nuova direzione. Supponendo che emetta radiazioni, in questo modo, per un certo periodo di tempo (e non solleviamo la questione se durante questo periodo assorba anche energia), l'atomo assumerà, durante questo periodo, un certo numero di posizioni differenti che si estendono su un considerevole volume di spazio. Per questa ragione non ci è lecito sostituire all'atomo uno sciame puntiforme di atomi; possiamo solo sostituirgli uno sciame di atomi distribuito su di un considerevole volume di spazio. Inoltre, siccome l'atomo emette radiazioni in tutte le direzioni, dobbiamo sostituirgli uno sciame di atomi che emettano radiazioni in tutte le direzioni. In questo modo non otteniamo un caso puro, e non otteniamo neppure una radiazione coerente. E non otteniamo schemi d'interferenza.

Le obiezioni simili a quella esaminata qui possono essere reinterpretate statisticamente seguendo le linee tracciate da quest'esempio.

e) Riferendomi alla nostra analisi di questo esperimento immaginario, vorrei dire che l'argomentazione *a*), contrariamente a ciò che si potrebbe a prima vista supporre, sarebbe, in ogni caso, del tutto insufficiente a delucidare il cosiddetto problema della complementarità (o il dualismo fra onda e particella). Tenta di risolverlo, mostrando che l'atomo è capace di emettere soltanto onde coerenti *o* fotoni incoerenti, e che *perciò* non sorge nessuna contraddizione, dal momento che i due esperimenti si escludono vicendevolmente. Ma è semplicemente falso che i due esperimenti si escludano a vicenda, perché, naturalmente, possiamo combinare una misurazione di posizione non troppo esatta con una misurazione non troppo esatta di impulso, e in questo caso l'atomo non emetterà né onde completamente coerenti né fotoni completamente incoerenti. È chiaro che, trattando questi casi intermedi, la mia interpretazione statistica non incontrerà alcuna difficoltà, anche se essa non era affatto destinata a risolvere il problema del dualismo fra onde e particelle. Suppongo che una soluzione realmente soddisfacente di questo problema sia praticamente impossibile nell'ambito della fisica quantistica statistica (la teoria delle particelle di Heisenberg e di Born, nell'interpretazione datane da Born nel 1925-26) ma credo che forse potrà essere risolta nell'ambito della fisica quantistica dei campi d'onda o della «seconda quantizzazione» (la teoria dell'emissione e dell'assorbimento di Dirac e la teoria del campo d'onda della materia di Dirac, Jordan, Pauli, Klein, Mie, Wigner, 1927-28. Cfr. la nota 2 alla mia introduzione al § 73).

Appendice VI

A proposito di un procedimento di misurazione non predittivo (cfr. § 77) *[1]

Supponiamo che un fascio monocromatico di particelle – ad esempio, un raggio di luce – che si muovono lungo traiettorie parallele nella direzione x, sia sottoposto alla selezione

*[1] Heisenberg – che parla di *misurare* o *osservare*, invece che di *selezionare* – presenta cosí la situazione, sotto la forma di una descrizione di un esperimento immaginario: se desideriamo osservare la *posizione* dell'elettrone dobbiamo usare luce ad alta frequenza, e questa luce interagirà fortemente con tale posizione, *disturbando* cosí l'impulso dell'elettrone. Se invece desideriamo osservare il suo impulso, dobbiamo usare luce a bassa frequenza, che lascia l'impulso (praticamente) immutato ma non può aiutarci a determinarne la posizione. È importante che in questa discussione *l'indeterminazione dell'impulso è dovuta a disturbo, mentre l'indeterminazione della posizione non è dovuta a nulla del genere.* Piuttosto, è risultato del fatto che si *evita* qualsiasi forte disturbo del sistema. (Cfr. appendice *XI, punto 9).

A questo punto la mia vecchia argomentazione (che era basata su questa osservazione) procedeva nel modo seguente. Poiché la determinazione dell'impulso – che interagisce col sistema solo debolmente – lascia l'impulso immutato, deve anche lasciare immutata la posizione, anche se non riesce a *dischiuderla.* Ma posizione non dischiusa può essere dischiusa piú tardi mediante una seconda misurazione; e poiché la prima misurazione ha lasciato lo stato dell'elettrone praticamente immutato, possiamo calcolare il passato dell'elettrone, non solo *fra le due* misurazioni, ma anche prima della prima misurazione.

Non vedo come Heisenberg possa evitare questa conclusione senza modificare il suo ragionamento in modo essenziale. (In altre parole, credo ancora che la mia argomentazione e il mio esperimento del § 77 possano essere usati per mettere in evidenza una contraddizione nella discussione di Heisenberg dell'osservazione di un elettrone). Ma ora credo di aver sbagliato nell'assumere che ciò che vale per le «osservazioni» o le «misurazioni» immaginarie di Heisenberg valga anche per le mie «selezioni» Come Einstein mostra (nell'appendice *XII) non vale per un filtro che agisca su un fotone e non vale per il campo elettrico perpendicolare alla direzione di un fascio di elettroni, menzionato (come il filtro) nel primo capoverso di quest'appendice. Infatti, se gli elettroni devono muoversi parallelamente all'asse delle x, la larghezza del fascio deve essere considerevole, e di conseguenza la posizione degli elettroni prima che entrino nel campo non può essere calcolata con precisione dopo che gli elettroni sono stati deviati dal campo. Ciò infirma la validità del ragionamento contenuto in quest'appendice e nella seguente, e nel § 77.

degli impulsi delle particelle mediante l'interposizione di un filtro. (Se il fascio consiste di elettroni, invece di un filtro dovremo usare, per analizzare il suo spettro, un campo elettrico perpendicolare alla direzione del fascio). Assumiamo, con Heisenberg, che questo procedimento lasci inalterati gli impulsi (o, piú precisamente, le loro componenti nella direzione x) e, di conseguenza, anche le *velocità* (o le loro componenti x) delle particelle selezionate.

Per misurare l'istante dell'arrivo delle particelle mettiamo dietro il filtro un contatore Geiger (o una striscia di pellicola cinematografica): siccome le velocità delle particelle sono note, questo ci permette di calcolare le loro coordinate x per qualsiasi istante precedente l'istante del loro arrivo. Ora possiamo prendere in considerazione due possibili assunzioni. Se, per un verso, si assume che la misurazione degli impulsi delle particelle non interferisca con le coordinate x delle posizioni delle particelle stesse, allora la misurazione della posizione e dell'impulso può essere validamente estesa fino all'istante prima che si sia selezionato l'impulso (per mezzo del filtro). Se, per un altro verso, si assume che una selezione secondo l'impulso interferisca con le coordinate x delle posizioni delle particelle, allora possiamo calcolare esattamente le loro traiettorie soltanto per l'intervallo di tempo *fra* le due misurazioni.

Ora, l'assunzione che la posizione delle particelle nella direzione del loro cammino possa essere disturbata in qualche modo imprevedibile da una selezione secondo un dato impulso, non significa altro che la coordinata indicante la posizione di una particella risulterebbe alterata in qualche modo imprevedibile da questa selezione. Ma siccome la velocità della particella è rimasta immutata, quest'assunzione dev'essere equivalente all'assunzione che, a causa di questa selezione, la particella dev'essere saltata *in modo discontinuo* (con velocità superiore alla velocità della luce) a un punto diverso della traiettoria.

Tuttavia quest'assunzione è incompatibile con la teoria dei quanti, quale è accettata attualmente. Infatti, sebbene la teoria permetta salti discontinui, li permette soltanto nel caso di particelle all'interno di un atomo (nell'ambito di *Eigen*-valori discontinui, ma non nel caso di particelle libere nell'ambito di *Eigen*-valori continui).

È presumibilmente possibile (allo scopo di sfuggire alle conclusioni raggiunte qui sopra, o di salvare il principio di indeterminazione) escogitare una teoria che alteri la teoria dei quanti in modo tale da rendere compatibile con essa l'assunzione di un disturbo della posizione causato dalla selezione dell'impulso; ma anche questa teoria – che io chiamerei «teoria dell'indeterminazione» – potrebbe derivare, dal principio d'indeterminazione, soltanto conseguenze statistiche e potrebbe pertanto essere corroborata soltanto statisticamente. All'interno di questa teoria il principio d'indeterminazione sarebbe soltanto un'asserzione probabilistica formalmente singolare, anche se il suo contenuto andrebbe oltre quelle che ho chiamato le «relazioni statistiche di dispersione». Infatti, come mostreremo piú sotto con l'aiuto di un esempio, queste relazioni sono compatibili con l'assunzione che scegliere l'impulso non disturbi la posizione. *Dunque, quest'ultima assunzione non ci permette di inferire l'esistenza di un «caso super puro», quale è vietato dalle relazioni di dispersione.* Quest'asserzione mostra che il metodo di misurazione che ho esaminato non modifica le formule di Heisenberg, se queste vengono interpretate statisticamente. Si può dunque dire che esso occupa, all'interno della mia interpretazione statistica, lo stesso «posto logico», per cosí dire, che occupa, all'interno della sua interpretazione, l'asserzione di Heisenberg che nega la «realtà fisica» delle misurazioni esatte. In realtà, si potrebbe interpretare la mia asserzione come la traduzione in linguaggio statistico dell'asserzione di Heisenberg.

Che l'asserzione in questione sia corretta si può vedere dalle seguenti considerazioni. Potremmo tentare di ottenere un «caso super puro» invertendo l'ordine dei passi nell'esperimento: selezionando prima di tutto, poniamo, una posizione nella direzione x (la direzione del cammino delle particelle) con l'aiuto di un otturatore rapido, e solo in seguito selezionando l'impulso con l'aiuto di un filtro. Ciò potrebbe essere idealmente possibile; infatti, come risultato della misurazione di posizione apparirebbero ogni sorta di impulsi, e da questi il filtro sceglierà, senza disturbare la posizione, solo quelli che per caso cadono in un ambito ristretto. Ma queste considerazioni sarebbero erronee. Infatti, se un gruppo di particelle viene selezionato da un «otturatore istantaneo» nel modo indicato, i pacchi d'onda di Schrödinger (ottenuti per sovrapposizione di onde di varie frequenze) ci dànno solo *probabilità*, da interpretarsi statisticamente, del comparire, in questo gruppo, di particelle che hanno l'impulso dato. Per un qualsiasi intervallo finito di impulsi Δp_x, questa probabilità tende a 0, purché rendiamo infinitamente breve la lunghezza del treno d'onde; cioè, purché misuriamo la posizione tanto precisamente quanto vogliamo (aprendo l'otturatore istantaneo per un tempo breve a piacere). Allo stesso modo, la probabilità tende a 0 per ogni periodo finito durante il quale l'otturatore istantaneo rimanga aperto, cioè, per un qualsiasi valore dell'intervallo di posizione Δx, purché Δp_x tenda a 0. Quanto maggiore è l'esattezza con cui scegliamo la posizione e l'impulso, tanto minore sarà la probabilità di trovare una particella dietro il filtro. Ma ciò significa che solo tra un gran numero di esperimenti ce ne sarà qualcuno in cui si troveranno particelle dietro il filtro, e ciò senza che siamo in grado di predire in anticipo in quale degli esperimenti si troveranno, dietro il filtro, particelle. Dunque non possiamo impedire in alcun modo che queste particelle appaiano solo ad intervalli, distribuiti a caso, e di conseguenza non saremo in grado di produrre, in questo modo, un aggregato di particelle che sia piú omogeneo di un caso puro.

Per decidere tra la «teoria dell'indeterminazione» (descritta qui sopra) e la teoria quantistica sembra che ci sia un esperimento cruciale relativamente semplice. Secondo la prima teoria i fotoni arriverebbero su uno schermo posto dietro un filtro altamente selettivo (o spettrografo) anche per un certo periodo di tempo dopo l'estinzione della fonte luminosa, e, inoltre, questa «retroincandescenza» [*after-glow*] prodotta dal filtro durerebbe tanto piú a lungo quanto piú altamente selettivo è il filtro [*2].

[*2] Secondo l'osservazione di Einstein, qui ristampata nell'appendice *XII, questo è precisamente quanto accadrà. Si vedano anche le critiche di C. F. von Weizsäcker al mio esperimento, in «Die Naturwissenschaften», 22 (1934), p. 807.

Appendice VII

Osservazioni a proposito di un esperimento immaginario (cfr. § 77) *[1]

Possiamo partire dall'assunzione che $\mathbf{a}_1$ e $|\mathbf{b}_1|$ siano misurati, o selezionati, con grado di precisione arbitraria. In vista del risultato ottenuto nell'appendice VI possiamo assumere che l'impulso assoluto $|\mathbf{a}_2|$ della particella che arriva in X dalla direzione PX possa essere misurato con grado arbitrario di precisione. Di conseguenza, $|\mathbf{b}_2|$ può anche essere determinato con la precisione che vogliamo (usando il principio di conservazione dell'energia). Inoltre, la posizione di F e di X, e gli istanti in cui le particelle [A] arrivano in X possono essere misurati con la precisione che vogliamo. Cosí non dobbiamo far altro che investigare la situazione rispetto alle indeterminazioni $\Delta\mathbf{a}_2$ e $\Delta\mathbf{b}_2$, che sorgono in conseguenza dell'indeterminazione delle *direzioni* corrispondenti, e il vettore $\Delta\mathbf{P}$ connesso con l'indeterminazione della posizione di P, che sorge anch'essa in conseguenza dell'indeterminazione di una *direzione*, cioè a dire della direzione PX.

Se il raggio PX passa attraverso una fessura al punto X, allora si avrà una indeterminazione direzionale φ in conseguenza della diffrazione alla fessura. Quest'angolo φ può essere reso piccolo a piacere rendendo $|\mathbf{a}_2|$ sufficientemente grande; abbiamo infatti

$$\varphi = \frac{h}{r \, . \, |\mathbf{a}_2|} \tag{1}$$

dove r è la larghezza della fessura. Ma con questo metodo è impossibile far decrescere $|\Delta\mathbf{a}_2|$; decrescerebbe soltanto se si

*[1] Per una critica di alcune assunzioni che stanno sotto il § 77 e quest'appendice, cfr. appendice VI, nota *1.

facesse crescere r, e ciò porterebbe a un aumento di $|\Delta \mathbf{P}|$; abbiamo infatti

2) $$|\Delta \mathbf{a}_2| \cong \varphi |\mathbf{a}_2|$$

che, tenuto conto della 1), porta a

3) $$|\Delta \mathbf{a}_2| \cong \frac{h}{r}$$

mostrando che $|\Delta \mathbf{a}_2|$ non dipende da $|\mathbf{a}_2|$.

Per il fatto che, qualsiasi r scegliamo, possiamo rendere φ piccola a piacere facendo crescere $|\mathbf{a}_2|$, possiamo anche rendere piccola a piacere la componente $\Delta \mathbf{a}_2$ nella direzione PX (componente che denotiamo con «$(\Delta \mathbf{a}_2)_x$»); e possiamo farlo senza interferire con la precisione della misurazione della posizione di P, dal momento che, col crescere di $|\mathbf{a}_2|$ e col decrescere di r, anche questa posizione diventa piú precisa. Ora desideriamo mostrare che per $(\Delta \mathbf{b}_2)_y$, cioè, per le componenti, PY di $\Delta \mathbf{b}_2$, vale un ragionamento corrispondente.

Siccome, d'accordo con la nostra assunzione, possiamo porre $\Delta \mathbf{a}_1 = 0$, otteniamo, dalla conservazione degli impulsi,

4) $$\Delta \mathbf{b}_2 = \Delta \mathbf{b}_1 - \Delta \mathbf{a}_2.$$

Per ogni $\mathbf{a}_1$, $|\mathbf{b}_1|$ e $|\mathbf{a}_2|$, dati, $\Delta \mathbf{b}_1$ dipende direttamente da φ, e ciò significa che possiamo avere una disposizione tale che vale

5) $$|\Delta \mathbf{b}_1| \cong |\Delta \mathbf{a}_2| \cong \frac{h}{r}$$

e perciò anche

6) $$|\Delta \mathbf{b}_1| - |\Delta \mathbf{a}_2| \cong \frac{h}{r}.$$

Inoltre, in analogia con la 2), otteniamo

7) $$|\Delta \mathbf{b}_2| \cong \psi . |\mathbf{b}_2|$$

dove «ψ» denota l'indeterminatezza della direzione di $\mathbf{b}_2$. Di conseguenza otteniamo, per la 4) e la 5),

8) $$\psi \cong \frac{|\Delta \mathbf{b}_1 - \Delta \mathbf{a}_2|}{\mathbf{b}_2} \cong \frac{h}{r . |\mathbf{b}_2|}.$$

Ma ciò significa: per quanto piccola rendiamo r, possiamo sempre rendere ψ, e con essa $(\Delta \mathbf{b}_2)_y$, piccola a piacere, usando, per l'impulso $|\mathbf{b}_2|$ valori sufficientemente alti; e ciò, di nuovo, senza interferire con la precisione della misurazione della posizione P.

Ciò mostra che è possibile rendere ciascuno dei due fattori del prodotto $(\Delta \mathrm{P})_y . (\Delta \mathbf{b}_2)_y$ piccoli a piacere, ciascuno indipendentemente dall'altro. Ma per la confutazione dell'asserzione di Heisenberg riguardante i limiti della precisione che possiamo ottenere, sarebbe stato sufficiente mostrare che uno di questi due fattori può essere reso piccolo a piacere, senza far crescere l'altro oltre ogni limite.

Per di piú, possiamo osservare che, scegliendo la direzione PX in modo appropriato, è possibile determinare la *distanza* PX in modo tale che $\Delta \mathrm{P}$ e $\Delta \mathbf{b}_2$ siano parallele e cosí, per φ sufficientemente piccola, normali a PY [1]. Di conseguenza, sia la precisione dell'impulso in questa direzione sia inoltre la precisione della posizione (nella stessa direzione) diventano *indipendenti dalla precisione della misurazione della posizione di P*. (Quest'ultima, se usiamo valori alti di $|\mathbf{a}_2|$, dipende soprattutto dalla piccolezza di r). *Entrambe dipendono soltanto dalla precisione delle misurazioni di posizione e di impulso delle particelle che arrivano a X dalla posizione PX*, e dalla piccolezza di ψ. (Ciò corrisponde al fatto che la precisione $(\Delta \mathbf{a}_2)_x$, della particella che arriva a X, dipende dalla piccolezza di φ).

Si vede che, rispetto alla precisione delle misurazioni, la situazione della misurazione apparentemente non-predittiva, della particella [A] che arriva a X, e quella della predizione della traiettoria della particella [B], che lascia P, sono completamente *simmetriche*.

[1] Il fatto che un esame del grado di esattezza della misurazione eseguita in una direzione perpendicolare a Δ_s possa essere importante, mi fu fatto rilevare da Schiff, durante una discussione del mio esperimento immaginario.

Desidero porgere, qui, i miei piú caldi ringraziamenti al dottor K. Schiff, per aver fruttuosamente collaborato con me per gran parte di un anno.

Pur avendo scoperto con mia gran sorpresa di poter ancora concordare con quasi tutti i punti di vista filosofici espressi nel libro e anche con la maggior parte di quelli riguardanti la teoria della probabilità (e si tratta di un campo nel quale le mie idee sono cambiate piú che in ogni altro) mi resi conto di dover aggiungere al mio lavoro una parte del nuovo materiale accumulato in tutti questi anni. Siccome non ho mai cessato di lavorare ai problemi sollevati nel libro, di questo materiale ce n'era una considerevole quantità, e perciò non era possibile includere tra queste appendici tutti i risultati importanti da me ottenuti. Tra questi devo menzionarne in modo speciale uno, di cui si sente qui la mancanza: si tratta di quella che chiamo l'*interpretazione della probabilità in termini di propensione*. Del tutto contrariamente alle mie intenzioni, l'esposizione e la discussione di quest'interpretazione sono cresciute fino a diventare la parte principale di un nuovo libro.

Il titolo di questo nuovo libro è: *Postscript: After Twenty Years*. Si tratta di una continuazione del presente libro e, a parte la teoria della probabilità, contiene una gran quantità di materiale strettamente legato agli argomenti che tratto qui. A questo proposito, posso anche menzionare due miei articoli che avrei potuto includere in queste appendici se non fossi stato riluttante ad aggiungervi ancora qualcosa. Si tratta di *Three Views Concerning Human Knowledge* e di *Philosophy of Science: A Personal Report*[1].

[1] Pubblicati, rispettivamente, in *Contemporary British Philosophy* cit., pp. 355-88, e in *British Philosophy in the Mid-Century* cit., pp. 153-91. Entrambi questi articoli sono contenuti in *Conjectures and Refutations* cit. [Il primo di essi è compreso in *Scienza e filosofia* cit.]

Le prime due delle mie nuove appendici contengono tre brevi note pubblicate fra il 1933 e il 1938 e strettamente connesse con il libro. Ho paura che riescano di lettura poco scorrevole: sono indebitamente concentrate, e non sarei riuscito a renderle piú leggibili senza apportare cambiamenti tali che ne avrebbero diminuito il valore di documenti.

Le appendici *II-*V sono piuttosto tecniche, o, almeno, troppo tecniche per i miei gusti. Ma questi tecnicismi sono necessari, mi sembra, per risolvere il seguente problema filosofico: *il grado di corroborazione, o accettabilità, di una teoria è una probabilità* come tanti filosofi hanno pensato? O, in altre parole: *obbedisce alle leggi del calcolo delle probabilità?*

Nel mio libro avevo risposto a questa domanda, e la risposta era «No». Al che, alcuni filosofi replicarono: «Ma quello che io intendo con "probabilità" (o "corroborazione", o "conferma") è diverso da quello che intendi tu». Per giustificare il mio rifiuto di questa risposta cosí evasiva (che minaccia di ridurre la teoria della conoscenza a puro e semplice giuoco di parole), era necessario addentrarsi nei particolari tecnici: si dovevano formulare le regole (gli «assiomi») del calcolo delle probabilità e si doveva scoprire quale parte avesse ciascuna di queste regole. Infatti, per non pregiudicare la questione se il grado di corroborazione sia o no una delle possibili interpretazioni del calcolo delle probabilità, quest'ultimo doveva essere preso nel suo senso piú largo, e si dovevano ammettere solo quelle regole che gli fossero essenziali. Cominciai queste indagini nel 1935, e un breve resoconto delle mie prime ricerche è contenuto nell'appendice *II. Nelle appendici *IV e *V si trova un sommario dei risultati che ho ottenuto piú di recente. In tutte queste appendici si asserisce che, oltre all'interpretazione classica, all'interpretazione logica e all'interpretazione frequenziale della probabilità, che tratto tutte nel libro, *ci sono molte interpretazioni differenti dell'idea di probabilità e del calcolo matematico della probabilità.* Questi lavori, dunque, aprono la strada a quella che piú tardi ho chiamato l'*interpretazione della probabilità in termini di propensione*[2].

[2] Cfr. il mio articolo *The Propensity Interpretation of Probability and the Quantum Theory* [L'interpretazione della probabilità in termini di pro-

Tuttavia, non solo dovetti esaminare le regole del calcolo delle probabilità; dovetti anche formulare *regole per la valutazione dei controlli*, cioè per il grado di corroborazione. Ciò fu fatto in una serie di tre articoli, qui ristampati nell'appendice *IX. Le appendici *VII e *VIII costituiscono una specie di anello di congiunzione tra il mio trattamento della probabilità e il mio trattamento della corroborazione.

Le appendici che restano, specialmente quella sul disordine oggettivo e quella sugli esperimenti immaginari, interesseranno sia i filosofi sia gli scienziati, o almeno lo spero. L'appendice *XII consiste di una lettera di Albert Einstein, qui pubblicata per la prima volta, per gentile concessione dei suoi esecutori letterari.

pensione, e la teoria dei quanti], in *Observation and Interpretation* [Osservazione e interpretazione], a cura di S. Körner, 1957, pp. 65-70 e 88 sg. Si vedano anche i due articoli menzionati nella nota precedente, specialmente alle pp. 388 e 188 rispettivamente.

* Dopo la prima edizione inglese di questo libro sono comparsi due miei scritti sulla propensione:

The Propensity Interpretation of Probability [L'interpretazione della probabilità in termini di propensione], in «The British Journal for the Philosophy of Science», 10 (1959), pp. 25-42.

Quantum Mechanics without «The Observer», cit. (Si vedano specialmente le pp. 28-44).

Appendice *1

Due note sull'induzione e sulla demarcazione, 1933-34

La prima delle note ripubblicate qui, è una lettera all'editore di «Erkenntnis». La seconda è un contributo a una discussione sostenuta in un convegno filosofico tenuto a Praga nel 1934. Fu pubblicata in «Erkenntnis», nel 1935, come parte degli Atti del convegno.

1.

La lettera all'editore fu pubblicata originariamente su «Erkenntnis», 3 (1933) («Annalen der Philosophie», 11), n. 4-6, pp. 426 sg. Ho spezzettato alcuni periodi, per facilitarne la lettura.

La lettera ebbe origine dal fatto che a quel tempo i miei punti di vista venivano ampiamente discussi dai membri del Circolo di Vienna, anche su libri e riviste (cfr. la nota 3) benché nessuno dei miei manoscritti (che erano stati letti da alcuni membri del Circolo) fosse stato pubblicato, in parte a causa della loro lunghezza. Il mio libro, *Logik der Forschung*, dovette essere ridotto a una frazione della sua lunghezza originaria, per renderlo accettabile per la pubblicazione. L'accento posto, nella mia lettera, sulla differenza tra il problema di un criterio di *demarcazione* e lo pseudo-problema di un criterio del *significato* (e sul contrasto tra le mie teorie e quelle di Schlick e di Wittgenstein) fu originato dal fatto che anche in quei giorni i miei punti di vista venivano discussi dal Circolo in base all'equivoco che io fossi l'assertore della sostituzione di un criterio del significato fondato sulla falsificabilità a un criterio del significato fondato sulla verificabilità, mentre in realtà quello che mi interessava non era il problema del *significato*, ma il problema della *demarcazione*. Come mostra la mia lettera, fin dal 1933 tentai di correggere quest'interpretazione errata dei miei punti di vista. Ho tentato di fare lo stesso nella *Logik der Forschung*, e da allora non ho smesso di tentare. Ma sembra che ancor oggi i miei amici positivisti non riescano proprio a vedere la differenza. Questi fraintendimenti mi indussero a mettere in evidenza, nella mia lettera, il contrasto fra le mie vedute e quelle del Circolo di Vienna e a soffermarmi su di esso: di conseguenza alcuni furono indotti ad assumere – erroneamente – che io avessi originariamente sviluppato i miei punti di vista come critiche a Wittgenstein. In realtà avevo formulato il problema della demarcazione e della falsificabilità, o criterio di controllabilità, nell'autunno del 1919, anni prima che le teorie di Wittgenstein diventassero argomento di discussione a Vienna. (Cfr. il mio scritto *Philosophy of Science: A Personal Report*, ora in *Conjectures and Refutations*). Questo spiega perché, appena sentii parlare del nuovo criterio di verificabilità del *significato* elaborato dal Circolo, gli contrapposi il mio criterio di falsificabilità: un criterio di *demarcazione* destinato a demarcare sistemi di asserzioni scientifiche da sistemi perfettamente significanti di asserzioni metafisiche. (Per quanto riguarda il nonsenso insignificante, non pretendo che il mio criterio gli sia applicabile).

Ecco ora la lettera del 1933.

Un criterio del carattere empirico dei sistemi di teorie.

1) *Questione preliminare.* Il *problema humeano dell'induzione* – la questione circa la validità delle leggi di natura – sorge da un'apparente contraddizione tra il principio dell'empirismo (il principio, cioè, che solo «l'esperienza» può decidere della verità o della falsità di un'asserzione fattuale) e la realizzazione di Hume, che gli argomenti induttivi (o generalizzanti) non sono validi.

Influenzato da Wittgenstein, Schlick[1] crede che questa contraddizione si possa risolvere adottando l'assunzione che

[1] SCHLICK, in «Die Naturwissenschaften», 19 (1931), n. 7, p. 156.

le leggi naturali non sono «asserzioni genuine» ma, piuttosto, «regole per la trasformazione di asserzioni» [*1]; cioè a dire, una specie particolare di «pseudoasserzioni».

Questo tentativo di risolvere il problema (ma, in ogni modo, la risoluzione mi sembra meramente verbale) condivide con tutti i tentativi piú antichi, quali l'*apriorismo*, il convenzionalismo, ecc., una certa assunzione infondata: l'assunzione che tutte le asserzioni genuine debbano essere in linea di principio completamente decidibili, cioè verificabili e falsificabili; piú precisamente, che per tutte le asserzioni genuine debbano essere logicamente possibili o una verificazione empirica (definitiva) o una falsificazione empirica (definitiva).

Se si lascia cadere quest'assunzione diventa possibile risolvere in modo semplice la contraddizione che costituisce il problema dell'induzione. Possiamo, in modo perfettamente coerente, interpretare le leggi naturali o le teorie sulla natura come asserzioni genuine *parzialmente decidibili*, come asserzioni, cioè, che per ragioni logiche non sono verificabili ma, *in modo asimmetrico, soltanto falsificabili*: sono asserzioni che si controllano sottoponendole a tentativi sistematici di falsificarle.

La soluzione suggerita qui ha il vantaggio di preparare la strada anche per il secondo e piú fondamentale dei due problemi della teoria della conoscenza (o della teoria del metodo empirico). E qui penso al problema seguente:

2) *Il problema principale.* Questo problema, il *problema della demarcazione* (il problema kantiano dei limiti della conoscenza scientifica) può essere definito come il problema di trovare un criterio che possa distinguere tra asserti [*assertions*] (asserzioni, sistemi di asserzioni) che appartengono alla scienza empirica e asserti che si possono descrivere come «metafisici».

Stando a una soluzione proposta da Wittgenstein [2] questa

[*1] Per comprendere meglio ciò che Schlick intende, sarebbe meglio dire: «regole per la formazione e la trasformazione di asserzioni». Il testo tedesco suona: «*Anweisungen zur Bildung von Aussagen*». Qui «*Anweisungen*» può essere tradotto, chiaramente, con «regole»; ma a quel tempo «*Bildung*» non aveva ancora nessuna delle connotazioni tecniche che hanno poi portato alla differenziazione tra la «formazione» e la «trasformazione» delle asserzioni.

[2] WITTGENSTEIN, *Tractatus* cit.

demarcazione deve ottenersi con l'aiuto dell'idea di «significato» o di «senso»: ogni proposizione significante o sensata dev'essere una funzione di verità di proposizioni «atomiche», cioè, dev'essere completamente riducibile da un punto di vista logico a (o deducibile da) asserzioni singolari di osservazione. Se qualche supposta asserzione si rivela irriducibile nel modo che si è detto, si tratta di una proposizione «insignificante», o «priva di senso», o «metafisica», o di una «pseudoproposizione». Cosí, *la metafisica è un non-senso insignificante.*

Può sembrare che tracciando questa linea di demarcazione i positivisti siano riusciti a distruggere la metafisica in modo piú completo di quanto non vi siano riusciti gli antimetafisici piú antichi. Però questi metodi non distruggono soltanto la metafisica: distruggono anche la scienza naturale. Infatti le leggi di natura non sono riducibili alle asserzioni di osservazione piú di quanto non lo siano gli enunciati metafisici. (Si ricordi il problema dell'induzione!) Se si applicasse coerentemente il criterio di significato elaborato da Wittgenstein, tali leggi sembrerebbero «pseudoproposizioni priva di significato», e di conseguenza «metafisiche». Cosí questo tentativo di tracciare una linea di demarcazione fallisce.

Il dogma del significato o del senso, e gli pseudo-problemi a cui esso ha dato origine, possono essere eliminati adottando, come criterio di demarcazione, il *criterio di falsificabilità*: il criterio, cioè, di decidibilità (almeno) *unilaterale* o asimmetrica. Secondo questo criterio le asserzioni, o i sistemi di asserzioni, trasmettono informazioni intorno al mondo empirico solo se sono capaci di collidere con l'esperienza, o, piú precisamente, solo se possono essere *controllati sistematicamente*, cioè a dire se possono essere sottoposti (d'accordo con una «decisione metodologica») a controlli che *potrebbero* mettere capo alla loro confutazione [3].

In questo modo, il riconoscimento di asserzioni unilateralmente decidibili ci permette di risolvere non solo il proble-

[3] A questa procedura di controllo fa riferimento CARNAP, in «Erkenntnis» (3, pp. 223 sgg.) col nome di «procedura B». Cfr. anche DUBISLAV, *Die Definition* cit., pp. 100 sgg. * Aggiunta del 1957: Si vedrà che questo non è solo un riferimento a Carnap, ma a qualcuna delle mie opere che Carnap citò e accettò nell'articolo in questione. Carnap riconobbe pienamente che l'autore di quella che egli descrive come «procedura B» («*Verfahren* B») ero io.

ma dell'induzione (si noti che c'è un solo tipo di argomentazione che proceda in una direzione induttiva: il deduttivo *modus tollens*), ma anche il problema piú fondamentale della demarcazione; il problema, cioè, che ha dato origine a quasi tutti gli altri problemi dell'epistemologia. Infatti il nostro criterio di falsificabilità distingue con sufficiente precisione i sistemi di teorie delle scienze empiriche da quelli della metafisica (e dai sistemi convenzionalistici e tautologici) senza asserire l'insignificanza della metafisica (che, come si può vedere considerando la questione da un punto di vista storico, è la fonte da cui rampollano le teorie delle scienze empiriche).

Parafrasando e generalizzando una ben nota osservazione di Einstein [4], si potrebbero perciò caratterizzare le scienze empiriche nel modo che segue: *Nella misura in cui parla della realtà, un'asserzione scientifica dev'essere falsificabile; nella misura in cui non è falsificabile, non parla della realtà.*

Un'analisi logica mostrerebbe che la funzione della *falsificabilità* (unilaterale) come criterio per la *scienza empirica* è formalmente analogo a quello della *non-contraddittorietà* per la *scienza in generale*. Un sistema contraddittorio non riesce ad enucleare, dall'insieme di tutte le asserzioni possibili, un sottoinsieme proprio di tali asserzioni; analogamente un sistema non-falsificabile non è in grado di enucleare, dall'insieme di tutte le possibili asserzioni «empiriche» (cioè di tutte le asserzioni sintetiche singolari), un loro sottoinsieme proprio [5].

2.

La seconda nota consiste di alcune osservazioni che feci nel corso della discussione di un lavoro letto da Reichen-

[4] EINSTEIN, *Geometrie und Erfahrung* cit., pp. 3 sg. * Aggiunta del 1957: Einstein dice: «Nella misura in cui parlano della realtà, le asserzioni della geometria non sono certe; nella misura in cui sono certe non parlano della realtà».

[5] Un'esposizione piú completa sarà presto pubblicata, sotto forma di libro (in *Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung* [Scritti per una concezione scientifica del mondo], a cura di Frank e Schlick, che sarà pubblicato da Springer, in Vienna). * Aggiunta del 1957: Il riferimento riguardava il mio libro, *Logik der Forschung*, che allora stava per essere stampato. (Fu pubblicato nel 1934 ma – secondo un'abitudine del continente europeo – con la data «1935»: io stesso ho piú volte citato questa data).

bach a un convegno filosofico tenuto a Praga nell'estate del 1934 (quando il mio libro era in bozze impaginate). Piú tardi un resoconto del convegno comparve in «Erkenntnis» e il mio contributo, ritradotto e pubblicato qui, fu stampato in «Erkenntnis», 5 (1935), pp. 170 sgg.

A proposito della cosiddetta «logica dell'induzione» e della «probabilità delle ipotesi».

Non credo che sia possibile produrre una teoria soddisfacente di quella che tradizionalmente – e quindi, ad esempio, anche da Reichenbach – viene chiamata «induzione». Al contrario, credo che qualsiasi teoria di questo genere – sia che usi la logica classica, sia che usi una logica della probabilità – debba, per ragioni puramente logiche, condurre a un regresso all'infinito o operare con un principio *aprioristico* dell'induzione: con un principio, cioè, che non può essere sottoposto a controlli empirici.

Se, con Reichenbach, distinguiamo tra una «procedura del trovare» e una «procedura del giustificare» un'ipotesi, dobbiamo dire che la prima procedura – la procedura del trovare un'ipotesi – non può essere ricostruita razionalmente. Tuttavia, secondo me la procedura del giustificare le ipotesi non ci conduce a nulla di cui si possa dire che appartiene a una logica induttiva. Infatti una teoria dell'induzione è superflua. Non ha alcuna funzione in una logica della scienza.

Le teorie scientifiche non possono mai essere «giustificate» o verificate. Ma, a dispetto di ciò, un'ipotesi *A* può, in certe circostanze, realizzare di piú di quanto non realizzi un'altra ipotesi, *B*, magari perché *B* è contraddetta da certi risultati delle osservazioni, e perciò «falsificata» da tali risultati, mentre *A* non è falsificata; o forse perché con l'aiuto di *A* si può derivare un numero di previsioni maggiore di quello che si può derivare con l'aiuto di *B*. Il meglio che possiamo dire di un'ipotesi è che finora è stata capace di mostrare quello che vale, e che ha avuto piú successo di quanto non ne abbiano avuto altre ipotesi, benché, in linea di principio, non possa mai essere giustificata o verificata e neanche si possa mostrare che è probabile. Questa valutazione dell'ipotesi si affida unicamente alle conseguenze *deduttive* (predizioni) che si possono trarre dall'ipotesi: *non c'è neppure bisogno di menzionare l'induzione.*

L'errore che si compie di solito in questo campo può essere spiegato storicamente: la scienza era considerata come un sistema di conoscenza, di conoscenza certa fin dov'era possibile renderla tale. L'«induzione» doveva garantire la verità di questa conoscenza. Piú tardi divenne chiaro che la verità assolutamente certa è irraggiungibile. Cosí si tentò di ottenere, al posto suo, almeno qualche specie di certezza o di verità annacquate: cioè a dire si tentò di ottenere la «probabilità».

Ma il parlare di «probabilità» invece che di «verità» non ci aiuta a sfuggire al regresso infinito o all'*apriorismo*[1].

Il concetto di probabilità si usa in fisica e nella teoria dei giuochi d'azzardo in un modo ben definito, che può essere definito in modo soddisfacente con l'aiuto del concetto di frequenza relativa (seguendo in ciò von Mises)[2]. I tentativi compiuti da Reichenbach, di allargare questo concetto in modo da fargli comprendere la cosiddetta «probabilità induttiva» o la «probabilità delle ipotesi» è destinato a mio parere al fallimento, anche se, per parte mia, non ho alcuna obiezione contro l'idea di una «frequenza della verità» all'interno di una sequenza di asserzioni[3], idea che Reichenbach tenta di invocare. Le ipotesi non possono infatti essere interpretate soddisfacentemente come sequenze di asserzioni[4]; ed anche se si accetta quest'interpretazione non si guadagna proprio nulla: si è solo trascinati a svariate definizioni, profondamente insoddisfacenti, della probabilità di un'ipotesi. Ad esempio, si è condotti a una definizione che attribuisce la probabilità ½ – invece della probabilità 0 – a un'ipotesi che sia stata falsificata mille volte; questa infatti, è la probabilità che si dovrebbe attribuire all'ipotesi se questa risultasse falsificata da un risultato sí e uno no dei controlli ai quali viene sottoposta. Si potrebbe forse prendere in considerazione la possibilità di interpretare l'ipotesi non come una sequenza di

[1] Cfr. POPPER, *Logik der Forschung*, per es., pp. 188 e 195 sg. * (dell'edizione originale); vale a dire, §§ 80 e 81.

[2] *Ibid.*, pp. 94 sgg. * (cioè, §§ 47-51).

[3] Questo concetto si deve a Whitehead.

[4] Nella sua *Wahrscheinlichkeitslogik* cit., p. 15, Reichenbach interpreta «le asserzioni delle scienze naturali» come sequenze di asserzioni.

asserzioni, ma piuttosto come un *elemento* di una sequenza di ipotesi[5] e di attribuirle un certo valore di probabilità in quanto elemento di una tale sequenza (anche se non in base a una «frequenza di verità», ma piuttosto in base a una «frequenza di falsità» all'interno di quella sequenza). Ma anche questo tentativo è del tutto insoddisfacente. Semplici considerazioni ci conducono al risultato che in questo modo è impossibile arrivare a un concetto di probabilità che soddisfi anche la modestissima richiesta che un'osservazione falsificante produca un'accentuata diminuzione della probabilità dell'ipotesi.

Credo che dovremo abituarci all'idea che non si deve guardare alla scienza come a un «corpo di conoscenza», ma piuttosto come a un sistema di ipotesi; cioè a dire, come a un sistema di tentativi di indovinare, o di anticipazioni, che non possono essere giustificati in linea di principio, ma con i quali lavoriamo fintanto che superano i controlli, e dei quali non abbiamo mai il diritto di dire che sappiamo che sono «veri» o «piú o meno certi», o anche «probabili».

[5] Questo corrisponderebbe al punto di vista sostenuto da Grelling nella nostra presente discussione; cfr. «Erkenntnis», 5 (1935), pp. 168 sg.

Appendice *XI

Nota sulla probabilità (1938)

La nota che segue: «Un insieme di assiomi indipendenti per la teoria della probabilità» fu pubblicata originariamente in «Mind», N. S., 47 (1938), pp. 275 sgg. È breve ma, sfortunatamente, mal scritta. Era la mia prima pubblicazione in lingua inglese e per di piú non riuscii mai a rivederne le bozze (mi trovavo allora in Nuova Zelanda).

Il testo introduttivo della nota – il solo che sia ristampato qui – asserisce in modo chiaro (e, credo, per la prima volta) che la teoria matematica della probabilità dovrebbe essere costruita come *sistema «formale»*, cioè a dire come un sistema che dovrebbe essere suscettibile di molte differenti interpretazioni tra le quali, ad esempio, 1) l'interpretazione classica, 2) l'interpretazione frequenziale e, 3) l'interpretazione logica (che ora si chiama, qualche volta, interpretazione «semantica»).

Una delle ragioni per cui volli sviluppare una teoria formale che non dipendesse dalla scelta di un'interpretazione particolare, era la speranza di poter mostrare, in seguito, che quello che nel mio libro avevo chiamato «grado di corroborazione» (o di «conferma» o di «accettabilità») non è una «probabilità»: che le sue proprietà sono incompatibili con il calcolo formale della probabilità (cfr. appendice *IX e *Postscript*, §§ *27-*32).

Un altro dei miei motivi per scrivere questa nota era che volevo mostrare che quella che nel mio libro avevo chiamato «probabilità logica» è l'interpretazione logica di una «probabilità assoluta»; cioè a dire di una probabilità $p(x, y)$ dove y è tautologica. Poiché una tautologia può essere scritta non-(x e non-x), o nei simboli usati nella mia nota, $\overline{x\bar{x}}$, possiamo definire la probabilità assoluta di x (per cui possiamo scrivere «$p(x)$» o «$pa(x)$», in termini di probabilità relativa, nel modo seguente:

$$p(x) = p(x, \overline{x\bar{x}}), \text{ o } pa(x) = p(x, \overline{x\bar{x}}) = p(x, \overline{y\bar{y}}).$$

Una definizione simile viene data nella mia nota.

Quando scrissi questa nota non conoscevo il libro di Kolmogorov *Foundations of Probability*, che pure era stato pubblicato in tedesco nel 1933. Kolmogorov si proponeva scopi molto simili ai miei, ma il suo sistema è meno «formale» del mio, e perciò è suscettibile di un numero minore di interpretazioni. Il punto principale in cui il sistema di Kolmogorov differisce dal mio è il seguente. Kolmogorov interpreta come *insiemi* gli argomenti del funtore di probabilità: di conseguenza assume che abbiano membri (o «elementi»). Nel mio sistema non si trova nessun'assunzione corrispondente a questa: *nella mia teoria non si assume proprio nulla a proposito di questi argomenti (che io chiamo «elementi») se non che le loro probabilità si comportano nel modo richiesto dagli assiomi.* Comunque il sistema di Kolmogorov può essere considerato come una delle interpretazioni del mio. (Si vedano anche le mie osservazioni su questo argomento nell'appendice *IV).

Il sistema d'assiomi vero e proprio, che si trova alla fine della mia nota, è piuttosto goffo, e pochissimo tempo dopo la sua pubblicazione gli sostituii un sistema piú semplice e piú elegante. Entrambi i sistemi, il vecchio e il nuovo, e cosí pure i miei sistemi successivi, erano formulati in termini di *prodotto* (o congiunzione) e *complemento* (negazione)[*1]. A quel tempo non ero ancora riuscito a derivare la legge distributiva da leggi piú semplici (quali le A1-A3 e B2) e perciò dovetti asserirla come assioma. Ma, scritta in termini di prodotto e di complemento, la legge distributiva è molto ingombrante. L'ho perciò omessa alla fine della nota, cosí come ho omesso il sistema di assiomi; invece riformulerò il mio sistema piú semplice (cfr. «BJPS», *loc. cit.*) basato, come il vecchio sistema, sulla probabilità assoluta. Naturalmente tale sistema è derivabile dal sistema basato sulla probabilità re-

[*1] Due di questi sistemi li ho pubblicati sul «BJPS», 6 (1955), pp. 51-57, 176 e 351, ed un ulteriore perfezionamento nell'appendice a *Philosophy of Science: A Personal Report* cit. Il sistema definitivo (che non credo possa essere ulteriormente semplificato) si trova nell'appendice *IV.

lativa, dato nell'appendice *IV. Qui formulo il sistema secondo un ordine che corrisponde a quello della mia vecchia nota

A1	$p(xy) \geq p(yx)$	(Commutazione)
A2	$p((xy)z) \geq p(x(yz))$	(Associazione)
A3	$p(xx) \geq p(x)$.	(Tautologia)
A4	C'è almeno un x e c'è almeno un y tali che $p(x) \neq p(y)$	(Esistenza)
B1	$p(x) \geq p(xy)$	(Monotonia)
B2	$p(x) = p(xy)+p(x\bar{y})$.	(Complemento)
B3	Per ogni x c'è un y tale che $p(y) \geq p(x)$, e $p(xy) = p(x)\,p(y)$.	(Moltiplicazione)

Segue ora la mia vecchia *nota* del 1938, con alcune correzioni stilistiche.

Un insieme di assiomi indipendenti per la teoria della probabilità.

Dal punto di vista formale dell'«assiomatica» la probabilità si può descrivere come un funtore[1] a due termini (cioè come una funzione numerica di due argomenti che a loro volta non devono necessariamente avere valore numerico), i cui argomenti sono *nomi* costanti o variabili (che possono essere interpretati, ad esempio, come nomi di predicati o come nomi di asserzioni[1], secondo l'interpretazione che si è scelta). Se vogliamo accettare le medesime regole di sostituzione e la medesima interpretazione per entrambi gli argomenti allora questo funtore si può denotare con

$$«p(x_1, x_2)»$$

che si può leggere: «la probabilità di x_1 rispetto a x_2».

È desiderabile costruire un sistema di assiomi s_1 in cui «$p(x_1, x_2)$» compaia come funtore primitivo (indefinito), e che sia costruito in modo tale da poter essere interpretato altrettanto bene da una qualsiasi delle interpretazioni proposte. Le tre interpretazioni che sono state piú largamente di-

[1] Per la terminologia cfr. CARNAP, *Logical Syntax of Language* cit. e TARSKI, in «Erkenntnis», 5 (1935), p. 175.

scusse sono: 1) la definizione classica[2] della probabilità come rapporto fra i casi favorevoli e i casi egualmente possibili; 2) la teoria frequenziale[3], che definisce la probabilità come la frequenza relativa di una certa classe di accadimenti all'interno di una cert'altra classe, e, 3), la teoria logica[4], che definisce la probabilità come il grado di una relazione logica fra asserzioni (che è eguale a 1 se x_1 è una conseguenza logica di x_2, ed è eguale a 0 se la negazione di x_1 è una conseguenza logica di x_2).

Nel costruire un tale sistema s_1, capace di essere interpretato da una qualsiasi delle interpretazioni menzionate (e anche da qualche altra), è consigliabile introdurre, con l'aiuto di uno speciale gruppo di assiomi (si veda piú sotto, gruppo A), certe funzioni indefinite degli argomenti, ad esempio, la congiunzione («x_1 e x_2», qui simbolizzata da «$x_1 x_2$») e la negazione («non-x_1», qui simbolizzata da «$\bar{x}_1$»). In questo modo possiamo esprimere simbolicamente un'idea come «x_1 e non x_1» con l'aiuto di «$x_1 \bar{x}_1$», e la sua negazione con «$\overline{x_1 \bar{x}_1}$». (Se si adotta 3 – cioè l'interpretazione logica – «$x_1\bar{x}_1$» dev'essere interpretata come il nome dell'asserzione che è la congiunzione dell'asserzione chiamata «x_1» e della sua negazione).

Supponendo di aver formulato opportune regole di sostituzione, si può provare, per ogni x_1, x_2 e x_3:

$$p(x_1, \overline{x_2\bar{x}_2}) = p(x_1, \overline{x_3\bar{x}_3}).$$

Dunque il valore di $p(x_1, x_2\bar{x}_2)$ dipende soltanto dalla variabile reale x_1. Ciò giustifica[5] la seguente definizione esplicita di un nuovo funtore a un termine, «$pa(x_1)$», che posso chiamare «*probabilità* assoluta»:

Def$_1$ $$pa(x_1) = p(x_1, \overline{x_2\bar{x}_2}).$$

[2] Cfr., per es., LEVY-ROTH, *Elements of Probability* [Elementi di probabilità], 1936, p. 17.

[3] Cfr. POPPER, *Logik der Forschung* cit., pp. 94-153.

[4] Cfr. KEYNES, *A Treatise on Probability* cit.; un sistema piú soddisfacente è stato istituito recentemente da Mazurkiewicz, «C. R. Soc. de Sc. et de L.», 25, Cl. III, Varsavia (1932); cfr. TARSKI, in «Erkenntnis», 5 (1935).

[5] Cfr. CARNAP, *Logical Syntax of Language* cit., 24. * Sarebbe stato piú semplice scrivere la Def$_1$ (senza «giustificazione») nel modo che segue: $pa(x_1) = p(x_1, \overline{x_1\bar{x}_1})$.

(Un esempio di un'interpretazione di «$pa(x_1)$» nel senso di 3, nel senso cioè dell'interpretazione logica, è il concetto «probabilità logica» come l'ho usato in una pubblicazione precedente)[6].

È ora possibile procedere con l'intera costruzione, cominciando dal capo opposto: invece di introdurre «$p(x_1, x_2)$» come concetto primitivo (funtore primitivo) di un sistema d'assiomi s_1 e definire «$pa(x_1)$» esplicitamente, possiamo costruire un altro sistema d'assiomi s_2 in cui «$pa(x_1)$» compare come variabile primitiva (indefinita), e poi procedere a definire «$p(x_1, x_2)$» esplicitamente, con l'aiuto di «$pa(x_1)$», nel modo seguente.

Def$_2$ $$p(x_1, x_2) = \frac{pa(x_1 x_2)}{pa(x_2)}.$$

Le formule adottate come assiomi in s_1 (e la Def$_1$) diventano ora teoremi in s_2: cioè, possono essere dedotte con l'aiuto del nuovo sistema di assiomi s_2.

Si può mostrare che i due metodi descritti – la scelta di s_1 e Def$_1$, o di s_2 e Def$_2$, rispettivamente – non sono egualmente convenienti dal punto di vista dell'assiomatica formale. Il secondo metodo è superiore al primo per certi aspetti, il piú importante dei quali è la possibilità di formulare in s_2 un assioma di unicità che (se non si restringe la generalità di s_1) è molto piú forte dell'assioma corrispondente di s_1. Ciò è dovuto al fatto che se $pa(x_2) = 0$, il valore di $p(x_1, x_2)$ diventa indeterminato [*1].

Aggiungiamo qui sotto un sistema di assiomi indipendenti, s_2, come quello descritto sopra. (È facile costruire un sistema s_1 con l'aiuto di s_2). Combinato con la definizione Def$_2$, questo sistema è sufficiente per dedurre la teoria matematica della probabilità. Gli assiomi possono essere divisi in due gruppi. Il gruppo A è formato dagli assiomi per le operazioni

[6] POPPER, *Logik der Forschung* cit., pp. 71 e 151.

[*1] Il sistema assoluto (s_2) presenta qualche vantaggio sul sistema relativo (s_1) solo fin quando la probabilità relativa $p(x, y)$ si consideri come indeterminata, se $pa(y) = 0$. In seguito ho sviluppato un sistema (cfr. appendice *IV) in cui le probabilità relative sono determinate anche nel caso di $pa(y) = 0$. Ecco perché ora considero il sistema relativo superiore al sistema assoluto. (Potrei anche dire che oggi considero mal scelto il termine «assioma di unicità». Allora intendevo alludere a qualcosa come il postulato 2 o l'assioma A2 del sistema dell'appendice *IV).

connettive [*junctional*] – congiunzione e negazione – dell'argomento, ed è, in pratica, un adattamento del sistema di postulati della cosiddetta «algebra della logica»[7]. Il gruppo B fornisce gli assiomi che servono specificamente alla misurazione della probabilità. Gli assiomi sono: ...

[Seguiva qui, con parecchi errori di stampa, il complicato sistema di assiomi che in seguito ho sostituito con quello dato piú sopra].

Christchurch, N.Z., 20 novembre 1937.

[7] Cfr. HUNTINGTON, in «Transactions Amer. Mathem. Soc.», 5 (1904), 292 e WHITEHEAD-RUSSELL, *Principia Mathematica*, I, dove le cinque proposizioni 22.51, 22.52, 22.68, 24.26, 24.1 corrispondono ai cinque assiomi del gruppo A, come li diamo qui.

Appendice *III

Sull'uso euristico della definizione classica di probabilità, specialmente per derivare il teorema generale della moltiplicazione

La definizione classica della probabilità come del numero dei casi favorevoli diviso per il numero dei casi egualmente possibili ha un valore euristico considerevole. Il suo inconveniente principale è che essa è applicabile a un dado omogeneo o simmetrico, ma non, poniamo, a un dado truccato; o, in altre parole, che non lascia spazio ai *pesi ineguali dei casi possibili.* Tuttavia in alcuni casi speciali ci sono modi e mezzi per superare questa difficoltà, e in questi casi la vecchia definizione ha il suo valore euristico: dove la difficoltà di assegnare pesi possa essere superata, e perciò, a fortiori, in quei casi in cui la vecchia definizione si rivela applicabile, ogni definizione soddisfacente dovrà concordare con la vecchia definizione.

1) La definizione classica sarà applicata in tutti i casi in cui congetturiamo di aver di fronte pesi eguali, o possibilità eguali, e perciò probabilità eguali.

2) Sarà applicabile in tutti i casi in cui possiamo trasformare il nostro problema in modo di ottenere pesi, o possibilità, o probabilità eguali.

3) Sarà applicabile, con leggere modificazioni, ogni qual volta possiamo assegnare una funzione di peso alle varie possibilità.

4) Sarà applicabile, o avrà valore euristico, nella maggioranza dei casi in cui una stima ipersemplificata, che lavori con possibilità eguali, conduce a una soluzione che si approssima alle probabilità zero o uno.

5) Sarà di grande valore euristico in casi in cui i pesi possano essere introdotti sotto forma di probabilità. Si prenda, ad esempio, il semplice problema seguente: dobbiamo calco-

lare la probabilità di ottenere, lanciando un dado, un numero pari, *non contando* i lanci dai quali risulta il numero sei, *ma considerandoli come «lanci nulli»*. La definizione classica conduce, naturalmente, a $2/5$. Possiamo ora assumere che il dado sia truccato, e che siano date le probabilità (ineguali) $p(1)$, $p(2)$, ..., $p(6)$ delle sue facce. Allora possiamo ancora calcolare la probabilità richiesta come eguale a:

$$\frac{p(2)+p(4)}{p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)} = \frac{p(2)+p(4)}{1-p(6)}.$$

Cioè a dire, possiamo modificare la definizione classica in modo da ottenere la semplice regola che segue:

Date le probabilità di tutti i casi possibili (escludentisi a vicenda), la probabilità richiesta è la somma delle probabilità di tutti i casi favorevoli (che si escludono vicendevolmente) divisa per la somma delle probabilità di tutti i casi possibili (che si escludono l'un l'altro).

È chiaro che possiamo anche esprimere questa regola, per casi escludentisi o non escludentisi, nel modo che segue.

La probabilità richiesta è sempre eguale alla probabilità della disgiunzione di tutti i casi favorevoli (che si escludono o no) divisa per la probabilità della disgiunzione di tutti i casi possibili (escludentisi o no).

6) Queste regole possono essere usate per una derivazione euristica della definizione di probabilità relativa e del teorema generale della moltiplicazione.

Nell'ultimo esempio simbolizziamo infatti, «pari» con «a» e «diverso da sei» con «b». Allora il nostro problema, di determinare la probabilità di un lancio che dia un numero pari trascurando i lanci di sei, è chiaramente lo stesso che il problema di determinare $p(a, b)$, cioè a dire, la probabilità di a, dato b, o la probabilità di trovare un a tra i b.

I calcoli possono allora procedere nel modo che segue. Invece di scrivere «$p(2)+p(4)$» possiamo scrivere, piú in generale, «$p(ab)$», cioè a dire la probabilità di un lancio che dia un numero pari diverso da sei. E invece di scrivere «$p(1)+p(2)+...+p(5)$», o, il che è lo stesso, «$1-p(6)$», possiamo scrivere «$p(b)$», cioè a dire, la probabilità di ottenere un numero diverso da sei. È chiaro che questi calcoli sono estremamente generali, e assumendo $p(b) \neq 0$, giungiamo alla formula

$$1) \qquad p(a,b) = \frac{p(ab)}{p(b)},$$

o alla formula (piú generale perché rimane significante anche nel caso di $p(b) = 0$):

$$2) \qquad p(ab) = p(a,b)p(b).$$

Questo è il teorema generale della moltiplicazione per la probabilità assoluta di un prodotto *ab*.

Sostituendo «*bc*» a «*b*» otteniamo, dalla 2)[1]:

$$p(abc) = p(a,bc)p(bc)$$

e perciò, applicando la 2) a $p(bc)$:

$$p(abc) = p(a,bc)p(b,c)p(c)$$

o, assumendo $p(c) \neq 0$,

$$\frac{p(abc)}{p(c)} = p(a,bc)p(b,c).$$

Questa, tenendo presente la 1), è la stessa che

$$3) \qquad p(ab,c) = p(a,bc)p(b,c).$$

Questo è il teorema generale della moltiplicazione per la probabilità *relativa* di un prodotto *ab*.

7) La derivazione di cui abbiamo dato qui uno schizzo può essere formalizzata facilmente. La prova formalizzata dovrà procedere a partire da un sistema d'assiomi piuttosto che da una definizione. È questa una conseguenza del fatto che il nostro uso euristico della definizione classica consisteva nell'introdurre, in quello che era il *definiens* classico, possibilità aventi un peso, il che è praticamente la stessa cosa che probabilità. Il risultato di questa modificazione non può piú essere considerato come una definizione vera e propria; esso deve piuttosto stabilire relazioni fra varie probabilità, ed equivale perciò alla costruzione di un sistema assiomatico. Se deside-

[1] Tralascio le parentesi intorno a «*bc*», perché qui il mio interesse è euristico e non formale, e perché il problema della legge dell'associazione viene trattato a lungo nelle due appendici successive.

riamo formalizzare la nostra derivazione – che fa un uso implicito delle leggi dell'associazione e dell'addizione delle probabilità – dovremo introdurre nel nostro sistema d'assiomi regole per queste operazioni. Un esempio è dato dal nostro sistema d'assiomi per probabilità assolute, descritto nell'appendice *II.

Se formalizziamo cosí la nostra derivazione della 3) possiamo ottenere la 3), nel migliore dei casi, soltanto sotto la condizione «purché $p(c) \neq 0$», come risulterà chiaro dalla nostra derivazione euristica.

Se però possiamo costruire un sistema assiomatico in cui $p(a, b)$ sia generalmente significante, anche se $p(b) = 0$, la 3) può essere significante anche senza questa condizione. È chiaro che in una teoria di questo genere non possiamo derivare la 3) nel modo delineato qui; possiamo però adottare, in sua vece, la stessa 3) come un assioma e considerare la presente derivazione (si veda anche la formula 1 della mia vecchia appendice II) come una giustificazione euristica per introdurre questo assioma. Ciò è stato fatto nel sistema descritto nell'appendice successiva (appendice *IV).

Appendice *IV

La teoria formale della probabilità

Tenendo conto del fatto che un'asserzione probabilistica, come «$p(a, b) = r$» può essere interpretata in molti modi, mi è sembrato desiderabile costruire un sistema puramente «formale» o «astratto» o «autonomo» nel senso che i suoi «elementi» (rappresentati da «a», «b», ...) possono essere interpretati in molti modi, cosí che non siamo legati a nessuna di queste interpretazioni in particolare. Proposi per la prima volta un sistema assiomatico formale di questo genere in una nota comparsa su «Mind» nel 1938 (qui ristampata nell'appendice *II). Da allora ho costruito molti sistemi semplificati[1].

Le caratteristiche principali che distinguono, dalle altre, una teoria di questo genere, sono tre. I) La teoria è formale, cioè a dire non assume nessun'interpretazione particolare, pur ammettendo almeno tutte le interpretazioni note. II) La teoria è autonoma; cioè a dire aderisce al principio che conclusioni probabilistiche si possono trarre soltanto da premesse probabilistiche; in altre parole, aderisce al principio

[1] In «BJPS», 6 (1955), pp. 53 e 57 sg., e nella prima nota all'appendice al mio articolo: *Philosophy of Science: A personal Report* cit.

Si dovrebbe notare che i sistemi qui discussi sono «formali» o «astratti» o «autonomi» nel senso spiegato, ma che per una «formalizzazione» completa avremmo dovuto trapiantare il nostro sistema in qualche formalismo matematico. (L'«algebra elementare» di Tarski sarebbe sufficiente).

Si può chiedere se per un sistema, consistente, diciamo, dell'algebra elementare di Tarski e del nostro sistema di formule A1, B e C$^+$, potrebbe esistere un procedimento di decisione. La risposta è no. Infatti al nostro sistema si possono aggiungere formule che esprimono quanti elementi a, b, ... ci sono in S. Nel nostro sistema abbiamo dunque un teorema:

Esiste un elemento a in S tale che $p(a, \bar{a}) \neq p(\bar{a}, a)$.

Possiamo ora aggiungere la formula:

0) Per ogni elemento a in S, $p(a, \bar{a}) \neq p(\bar{a}, a)$.

Ma se si aggiunge questa formula al nostro sistema, allora si può provare che

che il calcolo della probabilità è un metodo per trasformare probabilità in altre probabilità. III) È simmetrica; cioè a dire è costruita in modo tale che ogni qualvolta c'è una probabilità $p(b, a)$ – cioè una probabilità di b, data a – allora c'è sempre anche una probabilità $p(a, b)$, anche quando la probabilità assoluta di b, $p(b)$, è eguale a zero; cioè, anche quando $p(b) = p(b, \overline{a\bar{a}}) = 0$.

Prescindendo dai miei tentativi personali in questo campo, non sembra – strano a dirsi – che finora sia mai esistita una teoria del genere. Alcuni altri autori – ad esempio Kolmogorov – si sono proposti di costruire una teoria «astratta» o «formale», ma nelle loro costruzioni hanno sempre assunto un'*interpretazione* piú o meno specifica: assumevano, ad esempio che in un'equazione come

$$p(a, b) = r$$

gli «elementi» a e b siano *asserzioni* o sistemi di asserzioni; oppure assumevano che a e b siano *insiemi*, o sistemi di insiemi, o proprietà, o magari classi finite (aggregati) di cose.

Kolmogorov scrive[2]: «La teoria della probabilità, come disciplina matematica, può e deve essere sviluppata a partire da assiomi, esattamente nello stesso modo in cui lo sono la geometria e l'algebra» e fa riferimento all'«introduzione di concetti geometrici fondamentali nei *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert» e a sistemi astratti di questo genere.

E tuttavia, assume che in «$p(a, b)$» – uso i miei simboli, e non quelli di Kolmogorov – a e b siano *insiemi* escludendo con ciò, tra le altre, l'interpretazione logica, secondo cui a e b sono asserzioni (o, se volete, «proposizioni»). Dice – e ha ragione: «che cosa i membri di questo insieme rappresentino, non ha alcuna importanza», ma quest'osservazione non è sufficiente a stabilire il carattere formale della teoria alla quale egli tende; infatti, in alcune interpretazioni, a e b non

ci sono *esattamente due* elementi in S. Gli esempi per mezzo dei quali proviamo, piú avanti, la non-contraddittorietà dei nostri assiomi, mostrano tuttavia che in S può esserci un qualsiasi numero di elementi. Ciò mostra che la 0), e tutte le formule simili che determinano il numero degli elementi in S, non possono essere derivate, cosí come non può essere derivata la loro negazione. Dunque il nostro sistema è incompleto.

[2] Le citazioni, qui, sono prese tutte da p. 1 di A. KOLMOGOROV, *Foundation of the Theory of Probability* [Fondamenti della teoria della probabilità], 1950. (1ª ed. tedesca, 1933).

hanno *nessun membro*, né alcunché che possa corrispondere a membri.

Tutto ciò reca con sé gravi conseguenze in rapporto alla costruzione effettiva dello stesso sistema d'assiomi.

Coloro che interpretano a e b come asserzioni o proposizioni, assumono, molto naturalmente, che per questi elementi valga il calcolo della composizione delle asserzioni (il calcolo proposizionale). Analogamente, Kolmogorov assume che le operazioni di addizione, moltiplicazione, e complementazione degli *insiemi* valgano per questi elementi, dal momento che essi vengono interpretati come insiemi.

Piú concretamente, si presuppone sempre (e spesso solo tacitamente), che per gli elementi del sistema – cioè a dire per gli argomenti della funzione $p(..., ...)$ – valgano leggi algebriche come la legge associativa

a) $$(ab)c = a(bc)$$

o la legge commutativa

b) $$ab = ba$$

o la legge di idempotenza

c) $$a = aa.$$

Avendo – tacitamente o esplicitamente – fatto quest'assunzione, si enuncia un certo numero di assiomi o di postulati per la probabilità relativa

$$p(a, b)$$

cioè a dire, per la probabilità di a, data l'informazione b; oppure per la probabilità assoluta

$$p(a)$$

cioè a dire per la probabilità di a (non essendo data nessuna informazione, o essendo date soltanto informazioni tautologiche).

Ma questo modo di procedere potrebbe occultare il fatto sorprendente, e altamente importante, che alcuni degli assiomi o postulati adottati per la probabilità relativa, $p(a, b)$ *garantiscono, da soli, che per gli elementi valgono tutte le leggi dell'algebra booleana.* Ad esempio, una forma della legge associativa è implicata logicamente [*entailed*] dalle due formule che seguono (cfr. l'appendice precedente, *III):

d) $$p(ab) = p(a, b)p(b)$$

e) $$p(ab, c) = p(a, bc)p(b, c)$$

di cui la prima, d) dà anche origine a una specie di definizione di probabilità relativa in termini di probabilità assoluta.

d′) $$\text{Se } p(b) \neq 0, \text{ allora } p(a, b) = \frac{p(ab)}{p(b)},$$

mentre la seconda, la formula corrispondente per probabilità relative, è ben nota come «legge generale della moltiplicazione».

Queste due formule, d) e e) implicano logicamente, senza nessun'assunzione ulteriore (eccettuata la sostitutività di *probabilità* eguali) la seguente forma della legge associativa

f) $$p((ab)c) = p(a(bc)).$$

Ma quest'interessante fatto[3] non si nota se si introduce la f) *assumendo* l'identità algebrica a) – la legge associativa – prima ancora di accingersi a sviluppare il calcolo della probabilità; infatti, da

a) $$(ab)c = a(bc)$$

possiamo ottenere la f) semplicemente per sostituzione nell'identità

$$p(x) = p(x).$$

Cosí la derivabilità della f) dalla d) e dalla e) passa inosservata. O, in altre parole, non si vede che l'assunzione a) è completamente ridondante se si opera con un sistema d'assiomi che contiene, o implica, d) ed e); e che, assumendo la a) oltre la d) e la e) ci impediamo di scoprire *qual genere di relazioni siano implicate dai nostri assiomi o dai nostri postu-*

[3] La derivazione procede come segue:

1)	$p((ab)c) = p(ab, c)p(c)$	d
2)	$p((ab)c) = p(a, bc)p(b, c)p(c)$	1, e
3)	$p(a(bc)) = p(a, bc)p(bc)$	d
4)	$p(a(bc)) = p(a, bc)p(b, c)p(c)$	3, d
5)	$p((ab)c) = p(a(bc))$	2, 4

lati. Ma la scoperta di una cosa del genere è una delle principali ragioni del metodo assiomatico.

Di conseguenza, non si è notato neanche che la d) e la e), pur implicando la f), cioè, un'equazione in termini di probabilità *assoluta*, non implicano le sole g) e h), che sono le formule corrispondenti in termini di probabilità *relativa*:

g) $$p((ab)c, d) = p(a(bc), d)$$

h) $$p(a, (bc)d) = p(a, b(cd)).$$

Allo scopo di derivare queste formule (cfr. appendice *v, 41-62), c'è bisogno di molto di piú che non di d) e di e), fatto questo che è di considerevole interesse da un punto di vista assiomatico.

Ho dato quest'esempio allo scopo di mostrare che Kolmogorov non riesce a portare a termine il proprio programma. Lo stesso vale per tutti gli altri sistemi di cui sono a conoscenza. Nei miei sistemi di postulati per la probabilità si possono dedurre tutti i teoremi dell'algebra booleana; e, naturalmente, l'algebra booleana può essere a sua volta interpretata in molti modi: come un'algebra degli insiemi, o dei predicati o delle asserzioni (o proposizioni) e cosí via.

Un altro punto di considerevole importanza è il problema di un sistema «simmetrico». Come ho menzionato piú sopra, è possibile definire la probabilità relativa in termini di probabilità assoluta, con la d'), nel modo seguente:

d') $$\text{Se } p(b) \neq 0, \text{ allora } p(a, b) = \frac{p(ab)}{p(b)}.$$

Ora l'antecedente, «Se $p(b) \neq 0$» non può essere evitato qui, dal momento che la divisione per 0 *non è un'operazione definita*. Di conseguenza, la maggior parte delle formule della probabilità relativa possono essere asserite, nei sistemi ordinari, soltanto in forma condizionale, analoga a quella della d'). Ad esempio, nella maggior parte dei sistemi la g) non è valida e le si dovrebbe sostituire la formula condizionale, molto piú debole, g⁻):

(g⁻) $$\text{Se } p(d) \neq 0, \text{ allora } p((ab)c, d) = p(a(bc), d)$$

e una condizione analoga dovrebbe essere preposta alla h).

Questo punto è stato trascurato da alcuni autori (ad esempio, da Jeffreys e von Wright; quest'ultimo usa condizioni equivalenti a $b \neq 0$, ma questo non assicura $p(b) \neq 0$, specialmente perché il suo sistema contiene un «assioma di continuità»). Di conseguenza i loro sistemi, cosí come sono, sono contraddittori, anche se qualche volta possono essere corretti. Altri autori hanno individuato il punto. Ma, come conseguenza di ciò, i loro sistemi sono molto deboli, almeno se messi a confronto col mio. In tali sistemi può accadere che

$$p(a, b) = r$$

sia una formula significante, mentre, al medesimo tempo, e per gli stessi elementi

$$p(b, a) = r$$

non è significante, cioè non è definita, e neppure è definibile in modo appropriato, perché $p(a) = 0$.

Ma un sistema di questo genere non è soltanto debole: è anche *inadeguato* per molti scopi interessanti: ad esempio, non può essere applicato in modo appropriato ad asserzioni la cui probabilità assoluta sia zero, anche se quest'applicazione è molto importante; ad esempio, possiamo assumere qui (cfr. appendici *VII e *VIII) che le leggi universali abbiano probabilità zero. Se prendiamo due teorie universali, poniamo s e t, tali che s sia deducibile da t, vorremmo asserire che

$$p(s, t) = 1.$$

Ma se $p(t) = 0$, non possiamo farlo nel sistema di probabilità ordinario. Per ragioni simili, l'espressione

$$p(e, t)$$

dove e sta per le prove in favore della teoria t, può essere indefinita, ma quest'espressione è molto importante. (È la «verisimiglianza» [*likelihood*] di t sulla base delle prove date e, di cui parla Fisher. Cfr. anche appendice *IX).

C'è dunque bisogno di un calcolo della probabilità in cui possiamo operare con secondi argomenti di probabilità assoluta zero. Tale calcolo è indispensabile, ad esempio, per qualsiasi seria discussione della teoria della corroborazione o della conferma.

Ecco perché per alcuni anni ho tentato di costruire un calcolo della probabilità relativa in cui, ogni volta che

$$p(a, b) = r$$

è una formula ben formata, cioè vera o falsa,

$$p(b, a) = r$$

è anche una formula ben formata, anche se $p(a) = 0$. Un sistema di questo genere può essere designato con l'etichetta «simmetrico». Pubblicai il primo sistema di questo genere solo nel 1955[4]. Questo sistema simmetrico si rivelò piú semplice di quanto non mi fossi aspettato. Ma allora ero ancora preoccupato per le peculiarità che ogni sistema di questo genere deve esibire. Alludo qui a fatti come i seguenti: in ogni sistema simmetrico soddisfacente sono valide regole come la seguente:

$$p(a, b\bar{b}) = 1$$

$$\text{Se } p(\bar{b}, b) \neq 0 \quad \text{allora} \quad p(a, b) = 1$$

$$\text{Se } p(a, \bar{a}b) \neq 0 \quad \text{allora} \quad p(a, b) = 1.$$

O queste formule non sono valide nei sistemi ordinari o (la seconda e la terza) sono soddisfatte *in modo vuoto* [*vacuously*] perché implicano secondi argomenti con probabilità assoluta zero. Perciò credevo, a quel tempo, che alcune di esse dovessero apparire nei miei assiomi. Ma scopersi piú tardi che tutte queste formule insolite potevano essere derivate da formule che avevano un aspetto completamente «normale». Pubblicai originariamente il sistema semplificato che ne risultò nel mio articolo *Philosophy of Science: A Personal Report*[5]. Si tratta dello stesso sistema di sei assiomi che viene presentato, in modo piú completo, nella presente appendice.

Il sistema è sorprendentemente semplice e intuitivo e la sua potenza, che oltrepassa di gran lunga quella di qualsiasi altro sistema ordinario, è semplicemente dovuta al fatto che in tutte le formule, eccettuata una sola (assioma C), tralascio qualsiasi condizione come «Se $p(b) \neq 0$, allora...» (Nei si-

[4] In «BJPS», 6 (1955), pp. 56 sg.

[5] In *British Philosophy in the Mid-Century* cit., p. 191. I sei assiomi dati qui sono B1, C, B2, A3, A2 e A1 di questa appendice; qui sono contrassegnati rispettivamente dai numeri B1, B2, B3, C1, D1 ed E1.

stemi ordinari queste condizioni o sono presenti o dovrebbero essere presenti allo scopo di evitare contraddizioni).

In quest'appendice intendo spiegare, prima, il sistema d'assiomi con prove di non-contraddittorietà e di indipendenza, e in seguito alcune definizioni basate sul sistema; tra tali definizioni c'è quella di un campo di probabilità di Borel.

Prima il sistema d'assiomi.

Nei nostri postulati compaiono *quattro concetti indefiniti*: I) S, l'universo del discorso, o il sistema degli elementi ammissibili; gli *elementi* di S sono denotati da lettere minuscole corsive, «a», «b», «c», ..., ecc.; II) una funzione numerica binaria di questi elementi, denotata da «$p(a, b)$», ecc., cioè a dire la probabilità a, data b; III) un'operazione binaria sugli elementi, denotata da «ab» e chiamata il *prodotto* (o l'unione [*meet*], o la congiunzione) di a e b; IV) il complemento dell'elemento a, denotato da «$\bar{a}$».

A questi quattro concetti indefiniti possiamo aggiungerne un quinto, che può essere trattato, a scelta, come concetto indefinito o come concetto definito. Si tratta del concetto di «probabilità assoluta di a», denotato da «$p(a)$».

Ciascun concetto indefinito è introdotto da un *postulato*. Per una comprensione intuitiva di questi postulati è consigliabile tener presente che $p(a, a) = 1 = p(b, b)$ per tutti gli elementi a e b di S, cosa che, naturalmente, si può provare formalmente con l'aiuto dei postulati.

Postulato 1. Il numero di elementi di S ha almeno la potenza del numerabile.

Postulato 2. Se a e b sono in S, allora $p(a, b)$ è un numero reale, e valgono i seguenti assiomi:

A1 Ci sono elementi c e d di S tali che $p(a, b) \neq p(c, d)$ (Esistenza)

A2 Se $p(a, c) = p(b, c)$ per ogni c in S, allora $p(d, a) = p(d, b)$ per ogni d in S (Sostituibilità)

A3 $p(a, a) = p(b, b)$ (Riflessività)

Postulato 3. Se a e b sono in S, allora ab è in S; e, inoltre, se c è in S, valgono gli assiomi seguenti:

B1 $p(ab, c) \leq p(a, c)$ (Monotonia)

B2 $p(ab, c) = p(a, bc)\, p(b, c)$ (Moltiplicazione)

Postulato 4. Se a è in S, allora $\bar{a}$ è in S; e, inoltre, se b è in S, vale l'assioma seguente:

C $\quad p(a,b)+p(\bar{a},b) = p(b,b)$ a meno che $p(b,b) = p(c,b)$, per ogni c in S. (Complementazione)

Questo conclude il sistema «elementare» («elementare» in quanto contrapposto ai campi di Borel). Come è stato indicato, possiamo aggiungere qui la *definizione di probabilità assoluta*, come quinto postulato (postulato AP); come alternativa, possiamo considerare questa definizione come una definizione esplicita, piuttosto che come un postulato.

Postulato AP Se a e b sono in S e se $p(b,c) \geq p(c,b)$ per ogni c in S, allora $p(a) = p(a,b)$.
(Definizione di probabilità assoluta[6]).

Mostreremo piú sotto che il sistema di postulati e di assiomi che abbiamo dato qui è *non-contraddittorio* e *indipendente*[7].

[6] AP è basato sul teorema: Se $p(b,c)=1$, allora $p(a,bc)=p(a,c)$.

[7] Un sistema alternativo potrebbe essere il seguente; i postulati sono gli stessi che nel testo, e cosí pure gli assiomi A1 e A2, ma agli assiomi A3 e B1 si sostituiscono.

A3′ $\qquad p(a,a) = 1$

A4′ $\qquad p(a,b) \geq 0$

B1′ $\qquad$ Se $p(ab,c) > p(a,c)$ allora $p(ab,c) > p(b,c)$.

L'assioma B2 rimane come nel testo, e all'assioma C si sostituisce

C′ $\qquad$ Se $p(a,b) \neq 1$, allora $p(c,b)+p(\bar{c},b) = 1$.

Questo sistema somiglia moltissimo a qualcuno dei sistemi ordinari (tranne che per l'omissione degli antecedenti negli assiomi diversi da C′, e la forma dell'antecedente di C′); ed è degno di nota che, per gli elementi a, b, ..., dia luogo ai teoremi di algebra booleana che di solito si assumono separatamente, cosí come il sistema dato nel testo. Nondimeno, questo sistema è inutilmente forte; non soltanto perché introduce i numeri 1 e 0 (nascondendo in tal modo il fatto che non è necessario menzionarli negli assiomi) ma anche perché A3, B1 e C seguono immediatamente da A3′, A4′ e C′, mentre per le derivazioni opposte tutti gli assiomi del sistema dato nel testo, eccettuato A2, sono indispensabili. (Per queste derivazioni cfr. l'appendice *v).

All'interno del sistema di assiomi descritto qui, e anche all'interno del sistema dato nel testo, alla congiunzione degli assiomi A4′ e B1′ si può sostituire B1, e viceversa. Al sistema qui descritto sono applicabili le mie prove di indipendenza fornite piú avanti.

La derivazione di B1 da A4′ e B1′, in presenza degli assiomi A3 o A3′, C o C′ e B2, è la seguente:

1)	$0 \leq p(a,b) \leq p(a,a)$	A4′, C o C′; A3 o A3′
2)	$p(a,a) \geq p((aa)a,a) = p(aa,aa)p(a,a) = p(a,a)^2$	2, B2; A3 o A3′
3)	$0 \leq p(a,b) \leq p(a,a) \leq 1$	1, 2
4)	$p(ba,c) \leq p(a,c)$	B2, 3.

Su questo sistema di postulati si possono fare i commenti che seguono:

I sei assiomi – A1, A2, A3, B1, B2 e B3 – sono esplicitamente usati nelle operazioni effettive della derivazione dei teoremi. Le parti rimanenti (esistenziali) dei postulati possono essere prese per certe, come nell'articolo in cui pubblicai per la prima volta il sistema che presento qui (cfr. nota 1, piú sopra).

Purché si introduca una quarta variabile, «d» nei postulati 3 e 4, a questi sei assiomi si può sostituire un sistema di solo quattro assiomi, consistente di A1, A2 e dei due assiomi seguenti:

B^+ Se $p(a,bc)p(b,c) \neq p(d,c)$, purché $p(a,c) \geq p(d,c)$, allora $p(ab,c) \neq p(d,c)$

C^+ Se $p(a,b)+p(\bar{a},b) \neq p(c,c)$, allora $p(c,c) = p(d,b)$.

In questo sistema B^+ è equivalente alla congiunzione di B1 e B2, e, analogamente, C^+ a quello di A3 e C[8]. Il sistema che ne risulta, composto di quattro assiomi, è molto breve e condivide molti vantaggi dei sistemi piú lunghi: prodotto e complemento compaiono separatamente, cosicché tutti gli assiomi, eccettuati quelli contrassegnati dalla lettera «B», sono liberi dal prodotto, e il complemento compare soltanto una volta. Ma personalmente io preferisco il sistema piú lungo, composto di sei assiomi[9].

Ora applichiamo B1′

5) $p(ab,c) \leq p(a,c)$ 4, B1′

Per la derivazione di A4′ e B1′ da B1, cfr. appendice *V.

[8] C^+ segue immediatamente da A3 e C. L'inversa si può mostrare derivando A3 da C^+, nel modo seguente:

1) $p(c,b) + p(\bar{c},b) \neq p(b,b) \rightarrow p(b,b) = p(d,b) = p(c,b) = p(\bar{c},b)$ C^+

2) $p(a,a) \neq p(b,b) \rightarrow p(a,a) = p(c,b) + p(\bar{c},b) \neq p(b,b) = p(c,b) = p(\bar{c},b)$ C^+, 1

3) $p(a,a) \neq p(b,b) \rightarrow p(a,a) = 2p(b,b)$ 2

4) $p(b,b) \neq p(a,a) \rightarrow p(b,b) = 2p(a,a) = 4p(b,b) = 0 = p(a,a)$ 3

5) $p(a,a) = p(b,b)$. 4

A C^+ si può anche sostituire, ad esempio, la formula leggermente piú forte:

C^s $p(a,a) \neq p(b,c) \rightarrow p(a,c) + p(\bar{a},c) = p(d,d)$.

B^+ è semplicemente un modo «organico» per scrivere la formula piú semplice, ma «inorganica»:

B^s $p(ab,c) = p(a,bc)p(b,c) \leq p(a,c)$.

[9] Tre delle ragioni per cui preferisco il sistema di sei assiomi al sistema di quattro, sono le seguenti: 1) gli assiomi del sistema piú lungo sono un po'

Sui vari postulati ed assiomi del sistema si possono fare i commenti che seguono.

Del postulato 1 (che appartiene soltanto alla teoria *elementare*) si può fare a meno. Ciò è mostrato dal fatto che, allo scopo di provare la sua indipendenza, possiamo costruire un sistema S che è non-numerabile. (Tutti gli altri postulati risultano soddisfatti se interpretiamo S come l'insieme di tutte le somme finite dei sottointervalli semiaperti $[x, y)$ dell'intervallo-unità $[0, 1)$, dove x e y sono numeri reali e non numeri razionali; possiamo allora interpretare $p(a)$ come la lunghezza di questi intervalli e $p(a, b)$ come eguale a $p(ab)/p(b)$, purché $p(b) \neq 0$, e come eguale a 1 purché $b = 0$; altrimenti possiamo interpretarlo come lim $p(ab)/p(b)$, purché questo limite esista). La funzione del postulato 1 è semplicemente quella di caratterizzare i sistemi *elementari*: spesso un postulato di questo genere viene assunto nel trattamento assiomatico dell'algebra booleana o della logica delle asserzioni o proposizioni; e noi vogliamo essere in grado di mostrare che, nella *teoria elementare*, S è un'algebra (numerabile) booleana. (Per un altro esempio cfr. appendice *VI, punto 15).

Nel postulato 2 c'è bisogno di A1 per stabilire che *non tutte le probabilità sono eguali* (cioè, eguali a 0 o eguali a 1). La funzione di A2 è quella di consentirci di provare «$p(x,a) = p(x, b)$» per tutti gli elementi a e b le cui probabilità, data *una qualsiasi* condizione c, siano eguali. Ciò si può fare *senza* A2, ma solo sotto l'assunzione $p(a) \neq 0 \neq p(b)$. Cosí A2 ci mette in grado di estendere l'equivalenza probabilistica di a e b al secondo argomento anche in quei casi in cui a e b hanno *probabilità assoluta zero*.

Ad A2 si può sostituire la seguente formula, piú forte:

A2⁺ Se $p(a, a) = p(b, c) = p(c, b)$, allora $p(a, b) = p(a, c)$, per ogni c in S,

o la seguente formula

B3 Se $p(ab, c) = p(ba, c)$, allora $p(c, ab) = p(c, ba)$.

meno insoliti, e perciò un po' piú intuitivi, specialmente sotto la forma menzionata nella nota 7; II) l'introduzione di una variabile in piú è un prezzo troppo alto per la riduzione nel numero degli assiomi; III) l'«organicità» di B^+ si ottiene grazie a una specie di trucco meccanico, ed ha perciò poco valore.

Ovviamente, le si può anche sostituire la formula (che è piú semplice, ma molto piú forte):

$$\text{B}3^{+} \qquad p(a, bc) = p(a, cb).$$

Ma poiché è piú forte del necessario – e in realtà, benché piú debole, $p(a,(bc)(cb)) = p(a,(cb)(bc))$, dovrebbe essere sufficiente – B3^{+} è un po' fuorviante: la sua adozione nasconderebbe il fatto che la legge commutativa per il primo argomento si può provare con l'aiuto dei soli altri assiomi. A2^{+} è preferibile alle altre formule qui menzionate in quanto evita (come il molto piú debole A2) di far uso del prodotto di *a* e *b*.

Comunque, possiamo far uso dei fatti asseriti qui, allo scopo di ridurre il numero dei nostri assiomi a tre, cioè: A1, C^{+}, e il seguente assioma che combina B3^{+} con B^{+}:

B Se $p(ab, c) \neq p(a, d)p(b, c)$,
purché $p(a, c) \geq p(a, d)\,p(b, c)$ e $p(a, d) = p(a, bc)$,
allora $p(a, cb) \neq p(a, d)$.

Oltre ad essere piú forte di quanto si vorrebbe che fosse, questo sistema di tre soli assiomi ha tutti i vantaggi del sistema di quattro assiomi, A1, A2, B^{+} e C^{+}.

Come abbiamo indicato, A3 è necessario per provare che $p(a, a) = 1$, per ogni elemento *a* di *S*. Ma se rafforziamo C possiamo ometterlo: come si può vedere dall'assioma C^{+}, A3 diventa ridondante se in C, alle due occorrenze di «$p(b, b)$», (o alla seconda occorrenza soltanto) sostituiamo «$p(d, d)$».

Il postulato 3 richiede l'esistenza di un prodotto (o unione, o intersezione) di ogni elemento *a* e *b* in *S*. Tale postulato caratterizza in modo esaustivo tutte le proprietà del prodotto (quali l'idempotenza, la commutatività e l'associatività) mediante due semplici assiomi, dei quali il primo è intuitivamente ovvio, mentre il secondo è stato discusso nell'appendice *III.

Secondo me l'assioma B1 è, dal punto di vista intuitivo, il piú ovvio di tutti i nostri assiomi. È preferibile sia ad A4$'$ sia a B1$'$ (cfr. nota 7, piú sopra) che, presi insieme, possono sostituirlo. Infatti A4$'$ può essere scambiato per una convenzione, in quanto opposto a B1; e, al contrario di B1, B1$'$ non caratterizza un aspetto metrico intuitivo della *probabilità*, ma caratterizza, piuttosto, il prodotto o congiunzione *ab*.

Come mostra la formula B, l'assioma B2 può essere combinato con B1 e $A2^+$; ci sono altre combinazioni possibili, tra le quali alcune combinazioni in cui il prodotto compare soltanto una volta. Sono molto complicate, ma hanno il vantaggio di poter essere messe in una forma analoga a quella di una definizione. Una siffatta forma di definizione si può ottenere dall'assioma che segue, BD (che, come B, può sostituire A2, B1 e B2), inserendo il simbolo «(a)» due volte: una volta all'inizio e una seconda volta prima di «(Eb)» e sostituendo alla prima freccia (condizionale) una doppia freccia (che sta per il bicondizionale). Uso qui le abbreviazioni di cui ho dato una spiegazione all'inizio dell'appendice *v [*1].

BD $p(xy, a) = p(z, a) \rightarrow (Eb)(c)(d)(Ee)(Ef)(Eg)(p(x, a) \geq$
$\geq p(z, a) = p(x, b)\, p(y, a)\ \&\ p(a, c) \geq p(b, c) \leq p(y, c)$
$\&\ (p(a, e) \geq p(c, e) \leq p(y, e) \rightarrow p(c, d) \leq p(b, d))\ \&$
$(p(a, f) = p(y, f) \rightarrow p(x, a) = p(x, b) = p(x, y))\ \&$
$(p(x, g) \geq p(c, g) \leq p(y, g) \rightarrow p(c, a) \leq p(z, a)))$.

Il postulato 4 esige l'esistenza di un complemento, $\bar{a}$, per ogni a in S, e caratterizza il complemento mediante (una forma condizionale indebolita di) quella che è chiaramente una formula ovvia, «$p(a, c) + p(\bar{a}, c) = 1$», considerando che $1 = p(a, a)$. La condizione che precede questa formula è indispensabile, perché nel caso in cui c sia, poniamo, $a\bar{a}$ (l'«elemento vuoto»: $a\bar{a} = 0$) otteniamo $p(a, c) = 1 = p(a, c)$, cosicché, in questo caso limite, la formula apparentemente «ovvia» fallisce.

Questo postulato, o l'assioma C, ha il carattere di una definizione di $p(\bar{a}, b)$, in termini di $p(a, b)$ e $p(a, a)$, come si può facilmente vedere scrivendo C nel modo che segue. (Si noti che la II segue dalla I).

I) $p(\bar{a}, b) = p(a, a) - p(a, b)$, purché ci sia un c tale che $p(c, b) \neq p(a, a)$.
II) $p(\bar{a}, b) = p(a, a)$, purché non ci sia un tale c.

Una formula CD, analoga a una versione migliorata di BD si può trovare in un Addendum, a p. 400.

*1 Una versione migliorata, e piú breve, di BD si troverà a p. 400.

Il sistema che consiste di A1, BD e CD è, io credo, leggermente preferibile ad A1, B e C+, nonostante la complessità di BD.

Al postulato AP, infine, possiamo sostituire la semplice definizione

.) $$p(a) = p(a, \bar{\bar{a}a})$$

che, comunque, fa uso della complementazione e del prodotto e, di conseguenza, presuppone entrambi i postulati 3 e 4. La formula .) sarà derivata piú sotto, nell'appendice *V, come formula 75.

Si può provare che il nostro sistema d'assiomi è *non-contraddittorio*: possiamo costruire sistemi S di elementi (con un numero infinito di differenti elementi: per un S finito la prova è banale) e una funzione $p(a, b)$, tale che si possa dimostrare che tutti gli assiomi sono soddisfatti. Si può anche provare che il nostro sistema d'assiomi è *indipendente*. Per via della debolezza degli assiomi, queste prove sono piuttosto semplici.

Una prima prova banale di non-contraddittorietà per un S finito si ottiene assumendo che $S = \{1, 0\}$; cioè a dire, che S consista dei due elementi, 1 e 0; il prodotto o riunione, e il complemento si considerano eguali al prodotto e al complemento (a 1) aritmetici. Definiamo $p(0, 1) = 0$ e in tutti gli altri casi poniamo $p(a, b) = 1$. Allora tutti gli assiomi sono soddisfatti.

Prima di procedere a un'interpretazione infinita (della potenza del numerabile) daremo due ulteriori interpretazioni finite di S. Entrambe queste interpretazioni soddisfano non soltanto il nostro sistema di assiomi, ma anche, per esempio, la seguente asserzione esistenziale E).

E) Ci sono elementi a, b e c, in S, tali che

$$p(a, b) = 1 \quad \text{e} \quad p(a, bc) = 0.$$

Un'asserzione simile sarebbe la seguente:

E′) C'è un elemento a in S tale che

$$p(a) = p(a, \bar{a}) = p(\bar{a}, a) = 0 \neq p(a, a) = 1.$$

Quest'asserzione, E), non è soddisfatta dal nostro primo esempio, e non può essere soddisfatta in nessun sistema di probabilità a me noto (eccettuati, naturalmente, alcuni dei miei sistemi).

Il *primo esempio*, che soddisfa il nostro sistema ed E), consiste di quattro elementi. $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Qui ab è definito come il piú piccolo dei due numeri a e b, eccetto che $1 . 2 = 2 . 1 = 0$. Definiamo: $\bar{a} = 3-a$, e $p(a) = p(a, 3) = 0$, dovunque $a = 0$ o 1, e $p(a) = p(a, 3) = 1$ dovunque $a = 2$ o 3; $p(a, 0) = 1$; $p(a, 1) = 0$ a meno che non sia $a = 1$ o $a = 3$, nel qual caso $p(a, 1) = 1$. Nei casi rimanenti $p(a, b) = p(ab)/p(b)$. Dal punto di vista intuitivo l'elemento 1 può essere identificato con una legge universale di probabilità assoluta zero, e 2 con la sua negazione esistenziale. Allo scopo di soddisfare E) prendiamo $a = 2$, $b = 3$ e $c = 1$.

L'esempio ora descritto può essere rappresentato mediante le due «matrici» seguenti. (Credo che questo metodo sia stato introdotto per la prima volta da Huntington nel 1904):

ab	0	1	2	3	$\bar{a}$
0	0	0	0	0	3
1	0	1	0	1	2
2	0	0	2	2	1
3	0	1	2	3	0

$p(a, b)$	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	1	0	0
2	1	0	1	1
3	1	1	1	1

Il *secondo esempio* è una generalizzazione del primo, e mostra che l'idea che corre sotto il primo esempio può essere estesa a un numero di elementi piú grande di qualsiasi numero dato, purché questi elementi formino un'algebra booleana, il che significa che il numero degli elementi dev'essere eguale a 2^n. Qui si può prendere n come il numero delle piú piccole aree o classi esclusive in cui si divide qualche universo del discorso. Possiamo liberamente far corrispondere a ciascuna di queste classi certe frazioni positive, $0 \leq r \leq 1$, come loro probabilità assolute, facendo attenzione che la loro somma sia eguale a 1. A ognuna delle somme booleane facciamo corrispondere le somme aritmetiche che delle loro probabilità, e a ognuno dei complementi booleani facciamo corrispondere il complemento aritmetico rispetto a 1. A una o piú delle aree esclusive piú piccole (diverse da zero) possiamo assegnare la probabilità 0. Se b è un'area (o una classe) siffatta, poniamo $p(a, b) = 0$ nel caso che sia $ab = 0$; altrimenti porremo $p(a, b) = 1$. Poniamo anche $p(a, 0) = 1$; e in tutti gli altri casi poniamo $p(a, b) = p(ab)/p(b)$.

Allo scopo di mostrare che il nostro sistema è non-contraddittorio anche sotto l'assunzione che S sia infinito e abbia la potenza del numerabile, possiamo scegliere l'interpretazione seguente. (Si tratta di un'interpretazione interessante per via della sua connessione con l'interpretazione frequenziale). Supponiamo che S sia la classe delle frazioni razionali in rappresentazione diadica, cosicché, se a è un elemento di S, possiamo scrivere a come una sequenza: $a = a_1, a_2, \ldots$, dove a_i è 0 o 1. Interpretiamo ab come la sequenza $ab = a_1b_1, a_2b_2, \ldots$, cosicché $(ab)_i = a_ib_i$, e $\bar{a}$ come la sequenza $\bar{a} = 1-a_1, 1-a_2, \ldots$, cosicché $\bar{a}_i = 1-a_i$. Allo scopo di definire $p(a, b)$ introduciamo un'espressione ausiliaria, A_n, definita nel modo che segue:

$$A_n = \sum_n a_i$$

in modo da avere

$$(AB)_n = \sum_n a_i b_i;$$

inoltre definiamo una funzione ausiliaria, q:

$$q(a_n, b_n) = 1, \text{ tutte le volte che } B_n = 0$$
$$q(a_n, b_n) = (AB)_n/B_n, \text{ tutte le volte che } B_n \neq 0.$$

Ora possiamo definire

$$p(a, b) = \lim q(a_n, b_n).$$

Questo limite esiste per tutti gli elementi a e b di S, e si può facilmente mostrare che soddisfa tutti i nostri assiomi (cfr. anche appendice *VI, punti 8-14).

Questo per ciò che riguarda la *non-contraddittorietà* del nostro sistema d'assiomi.

Allo scopo di mostrare l'*indipendenza* di A1, possiamo prendere $p(a, b) = 0$ per ogni a e b in S. Allora tutti gli assiomi, eccettuato A1, sono soddisfatti.

Allo scopo di mostrare l'indipendenza di A2 [10] supponiamo che S consista di tre elementi, $S = \{0, 1, 2\}$. Possiamo far vedere facilmente che il prodotto di ab dev'essere non-commutativo; può essere definito nel modo seguente: $1 . 2 = 2$; e in tutti gli altri casi, compreso $2 . 1$, ab è eguale a $min(a, b)$, cioè al minore dei suoi due componenti a e b. Definiamo anche: $\bar{a} = 1$, se e solo se $a = 0$; altrimenti $\bar{a} = 0$; e definiamo $p(0, 2) = 0$; in tutti gli altri casi, $p(a, b) = 1$. È ora facile far vedere che per ogni b, $p(1, b) = p(2, b)$, mentre $p(0, 1) = 1$ e $p(0, 2) = 0$. Cosí A2 non è soddisfatto, ma sono soddisfatti tutti gli altri assiomi.

Possiamo illustrare quest'interpretazione scrivendo la matrice non-commutativa nel modo seguente:

ab	0	1	2	$\bar{a}$
0	0	0	0	1
1	0	1	2	0
2	0	1	2	0

$p(0, 2) = 0$;
in tutti gli altri casi
$p(a, b) = 1$

Allo scopo di far vedere che A3 è indipendente, prendiamo, come nella nostra prima prova banale di non-contraddittorietà, $S = \{0, 1\}$, con prodotti logici e complementi eguali a quelli aritmetici. Definiamo $p(1, 1) = 1$, e in tutti gli altri casi $p(a, b) = 0$. Allora $p(1, 1) \neq p(0, 0)$, cosicché A3 non è soddisfatto. Sono invece soddisfatti gli altri assiomi.

Allo scopo di far vedere che B1 è indipendente, poniamo $S = \{-1, 0, +1\}$; poniamo che ab sia il prodotto aritmetico di a e b; $\bar{a} = -a$ e $p(a, b) = a.(1-|b|)$. Allora tutti gli assiomi

[10] Se si tiene presente quanto si è detto sopra a proposito di A2, è chiaro che il problema di provare l'indipendenza di questo assioma equivale al problema di costruire un esempio (una matrice) non commutativo, combinato con una regola numerica riguardante i valori p, che assicuri che la legge commutativa è violata soltanto per il secondo argomento. La prova d'indipendenza di A2, qui descritta, destinata a soddisfare queste condizioni, fu trovata contemporaneamente dal dottor J. Agassi e da me. (L'esempio soddisfa il postulato AP solo se in AP si mette un trattino sopra la lettera «b»; ma soddisfa .) di p. 375). * Cfr. l'Addendum di p. 400.

sono soddisfatti, eccettuato B1, che non lo è per $a = -1$, $b \neq +1$ e $c = 0$. Le matrici si possono scrivere:

ab	-1	0	$+1$	$\bar{a}$
-1	$+1$	0	-1	$+1$
0	0	0	0	0
$+1$	-1	0	$+1$	-1

$p(a, b)$	-1	0	$+1$
-1	0	-1	0
0	0	0	0
$+1$	0	$+1$	0

Quest'esempio prova anche l'indipendenza di A4′ (cfr. nota 7, piú sopra). Un secondo esempio, che prova l'indipendenza di B1 e anche di B1′, è basato sulla seguente matrice non-commutativa:

ab	0	1	2	$\bar{a}$
0	0	1	0	2
1	0	1	1	0
2	0	1	2	0

$p(0, 2) = 0$;
in tutti gli altri casi
$p(a, b) = 1$

B1 non è soddisfatto per $a = 0, b = 1$ e $c = 2$.

Allo scopo di mostrare che B2 è indipendente, prendiamo lo stesso S che abbiamo preso per A3 e definiamo $p(0, 1) = 0$; in tutti gli altri casi $p(a, b) = 2$. B2 non è soddisfatto perché $2 = p(1, 1, 1) \neq p(1, 1, 1)\, p(1, 1) = 4$, ma tutti gli altri assiomi sono soddisfatti.

(Un altro esempio che mostri l'indipendenza di B2 si può ottenere considerando che per provare «$p(ba, c) \leq p(a, c)$», cioè a dire la duale di B1, è necessario B2. Ciò suggerisce che possiamo usare, per B1, il secondo esempio, limitandoci a cambiare il valore di 1,0 da 0 a 1, e quello di 0,1 da 1 a 0. Tutto il resto può essere lasciato tale e quale. B2 non è soddisfatto per $a = 1$, $b = 0$ e $c = 2$).

Da ultimo, per mostrare che C è indipendente, prendiamo di nuovo lo stesso S, ma assumiamo che $\bar{a} = a$. Se ora prendiamo $p(0, 1) = 0$ e in tutti gli altri casi $p(a, b) = 1$, allora C non è soddisfatto, perché $p(\bar{0}, 1) \neq p(1,1)$. Invece sono soddisfatti gli altri assiomi.

Questo conclude le prove dell'indipendenza degli *assiomi* operativi.

Per quanto riguarda le parti non-operative dei *postulati*, una prova dell'indipendenza del postulato 1 è stata data piú sopra (quando ho commentato questo postulato).

Nella sua parte non-operativa, il postulato 2 richiede che, ogni volta che a e b sono in S, $p(a, b)$ sia un numero reale. Allo scopo di mostrare l'indipendenza di questa esigenza – a cui possiamo riferirci brevemente come al «postulato 2» – cominciamo col considerare un'*interpretazione booleana non-numerica* di S. A questo scopo interpretiamo S come un'algebra booleana al massimo numerabile e non-numerica (quale un insieme di asserzioni, cosicché «a», «b», ecc. siano *nomi* variabili *di asserzioni*). E stipuliamo che «$\bar{x}$» denoti, se x è un numero, lo stesso che «$-x$»; mentre se x è un elemento booleano, ad esempio un'asserzione, «$\bar{x}$» dovrà denotare il complemento booleano (la negazione) di x. Analogamente stipuliamo che «xy», «$x+y$», «$x = y$» «$x \neq y$», «$x \leq y$» abbiano il loro significato aritmetico solito se x e y sono numeri, e il loro ben noto significato booleano ogni volta che x e y siano elementi booleani. (Se x e y sono asserzioni, «$x \leq y$» dovrà essere interpretata come «x implica logicamente [*entails*] y»). Allo scopo di provare l'indipendenza del postulato 2, non dobbiamo far altro, adesso, che aggiungere una stipulazione in piú: interpretiamo «$p(a, b)$» come sinonima di «$a+\bar{b}$», nel senso booleano. Allora il postulato 2 cessa di essere valido, mentre A1, A2, A3, e tutti gli altri assiomi e postulati si trasformano in ben noti teoremi dell'algebra booleana [11].

Le prove dell'indipendenza delle parti esistenziali dei postulati 3 e 4 sono quasi banali. Cominciamo coll'introdurre

[11] Una leggera variante di quest'interpretazione trasforma tutti gli assiomi in tautologie del calcolo proposizionale, soddisfacendo tutti i postulati, eccetto il postulato 2.

un sistema ausiliario $S' = \{0, 1, 2, 3\}$ e definiamo prodotto, complemento e probabilità assoluta mediante la matrice:

ab	0	1	2	3	$\bar{a}$	$p(a)$
0	0	0	0	0	3	0
1	0	1	0	1	2	0
2	0	0	2	2	1	1
3	0	1	2	3	0	1

La probabilità relativa è definita da

$p(a, b) = 0$ ogni volta che $p(a) \neq 1 = p(b)$;
$p(a, b) = 1$ in tutti gli altri casi.

Questo sistema S' soddisfa tutti i nostri assiomi e tutti i nostri postulati. Allo scopo di mostrare l'indipendenza della parte esistenziale del postulato 3, consideriamo ora S come confinato agli elementi 1 e 2 di S', lasciando tutto il resto immutato. Ovviamente, il postulato 3 non è soddisfatto, perché il prodotto degli elementi 1 e 2 non è in S; tutto il resto rimane valido. Analogamente, possiamo mostrare l'indipendenza del postulato 4 confinando S agli elementi 0 e 1 di S'. (Possiamo anche scegliere 2 e 3, o qualsiasi combinazione consistente di tre dei quattro elementi di S', eccettuata la combinazione consistente di 1, 2 e 3).

La prova d'indipendenza del postulato AP è ancor piú banale: per ottenere un'interpretazione in cui il postulato AP non è soddisfatto non dobbiamo far altro che interpretare S e $p(a, b)$ nel senso della nostra prima prova di non-contraddittorietà e prendere $p(a) = $ *costante* (una costante quale 0, o ½, o 1 o 2).

In questo modo abbiamo mostrato che ogni singola asserzione fatta nel nostro sistema d'assiomi è indipendente. (Per quanto ne so, nessuna prova dell'indipendenza di sistemi di assiomi per la probabilità è mai stata pubblicata in precedenza. Ritengo che la ragione di ciò risieda nel fatto che i sistemi noti – purché siano soddisfacenti per altri aspetti – non sono indipendenti).

La ridondanza dei sistemi consueti è dovuta al fatto che tutti postulano, implicitamente o esplicitamente, la validità di alcune o di tutte le regole dell'algebra booleana per gli elementi di S; ma, come proveremo alla fine dell'appendice *V, queste regole sono tutte derivabili dal nostro sistema, purché definiamo l'equivalenza «$a = b$» mediante la formula

$*$) $a = b$ se e solo se $p(a, c) = p(b, c)$ per ogni c in S.

Ci si può chiedere se un qualsiasi assioma del nostro sistema diventerebbe ridondante nel caso che si *postuli* che ab è un prodotto booleano e $\bar{a}$ un complemento booleano; che entrambi obbediscono a tutte le leggi dell'algebra booleana e che $*$) è valida. La risposta è che nessuno dei nostri assiomi (tranne B1′) è ridondante. (Solo se dovessimo, *oltre ciò*, postulare che due elementi qualsiasi per i quali si può provare l'equivalenza in senso booleano possono essere sostituiti l'uno all'altro *nel secondo argomento* della funzione p, *uno* dei nostri assiomi diventerebbe ridondante; si tratta del nostro assioma di sostituzione, A2, che serve precisamente allo stesso scopo a cui serve il postulato che abbiamo aggiunto). Che i nostri assiomi rimangano non-ridondanti si può vedere dal fatto che la loro indipendenza (eccettuata, naturalmente, l'indipendenza di A2 e di B1′) si può provare con l'aiuto di esempi che soddisfano l'algebra booleana. Ho fornito tali esempi per tutti gli assiomi, eccettuati B1 e C1, per i quali sono stati dati esempi piú semplici. Un esempio di un'algebra booleana che mostra l'indipendenza di B1 (e di A4′) e di C è il seguente. (0 e 1 sono gli elementi booleani zero e universo, e $\bar{a} = 1 - a$; l'esempio è essenzialmente identico all'ultimo, ma le probabilità -1 e 2 vengono attribuite ai due elementi che non sono né vuoti né universali).

ab	-1	0	1	2	$\bar{a}$
-1	-1	0	-1	0	2
0	0	0	0	0	1
1	-1	0	1	2	0
2	0	0	2	2	-1

B1 (e A4′):
$p(a) = a$; $p(a, 0) = 1$;
in tutti gli altri casi:
$p(a, b) = p(ab)/p(b) = ab/b$.
C: $p(a, b) = 0$ quando
$ab = 0 \neq b$;
in tutti gli altri casi
$p(a, b) = 1$.

B1 è violato perché $2 = p(1,2,1) > p(1,1) = 1$.

Il fatto che il nostro sistema rimanga indipendente anche se postuliamo l'algebra booleana *e* *) si può esprimere dicendo che il nostro sistema è «autonomamente indipendente». Se al nostro assioma B1 sostituiamo A4′ e B1′ (cfr. nota 7, piú sopra), allora, com'è naturale, il nostro sistema cessa di essere autonomamente indipendente. L'indipendenza autonoma mi sembra una proprietà interessante (ed auspicabile) dei sistemi d'assiomi per il calcolo della probabilità.

In conclusione, desidero dare, nei termini «autonomi», cioè a dire probabilistici, della nostra teoria, una definizione di un «sistema ammissibile» S, e di un «*campo boreliano di probabilità*» S. Quest'ultimo termine è stato coniato da Kolmogorov, ma io lo uso in un senso leggermente piú ampio di quello in cui lo usa Kolmogorov. Discuterò abbastanza dettagliatamente la differenza fra il trattamento della materia fatto da Kolmogorov e quello fatto da me, perché tale differenza mi sembra illuminante.

Comincio col definire, in termini probabilistici, ciò che intendo quando dico che a è un superelemento di b (e piú ampio di, o eguale a, b), o che b è un sottoelemento di a (ed è logicamente piú forte di, o eguale ad, a). La definizione è la seguente. (Si veda anche la fine dell'appendice *V).

a è un superelemento di b, o b è un sottoelemento di a – in simboli, $a \geq b$ – se, e solo se, $p(a,x) \geq p(b,x)$ per ogni x in S.

Successivamente definisco quello che intendo con «prodotto elementare a di una *sequenza infinita*» $A = a_1, a_2, \ldots$, tutti i membri a_n della quale sono elementi di S.

Supponiamo che alcuni, o magari tutti gli elementi di S siano ordinati in una sequenza infinita, $A = a_1, a_2, \ldots$, tale che a ogni elemento di S è permesso di ricorrere nella sequenza. Per esempio, supponiamo che S consista soltanto dei due elementi 0 e 1; allora $A = 0, 1, 0, 1, \ldots$, e $B = 0, 0, 0, \ldots$, saranno entrambe sequenze infinite di elementi in S, nel senso che intendiamo qui. Ma, naturalmente, il caso piú importante è quello di una sequenza infinita A, tale che tutti, o quasi tutti i suoi membri sono elementi *differenti* di S, che, di conseguenza, conterrà infiniti elementi.

Un caso che presenta un interesse speciale è quello di una *sequenza infinita decrescente* (o, piuttosto, non crescente) cioè a dire di una sequenza $A = a_1, a_2, \ldots$, tale che $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni coppia consecutiva di membri di A.

Possiamo ora definire il *prodotto elementare a* (booleano, in quanto opposto a insiemistico) della sequenza infinita $A = a_1, a_2, \ldots$, come il piú ampio fra quegli elementi di S che sono sottoelementi di ogni elemento a_n appartenente alla sequenza A; o, in simboli,

$a = \pi a_n$, se, e solo se, a soddisfa le due condizioni seguenti:

I) $p(a_n, x) \geq p(a, x)$ per tutti gli elementi a_n di A e per ogni elemento x di S.

II) $p(a, x) \geq p(b, x)$ per tutti gli elementi x di S e per ogni elemento b di S che soddisfa la condizione $p(a_n, y) \geq p(b, y)$, per tutti gli elementi a_n e per ogni elemento y di S.

Per far vedere la differenza tra il nostro prodotto elementare (booleano) a di A e il prodotto insiemistico (interno) o unione di A, confineremo ora la nostra discussione a esempi S, che soddisfino i nostri postulati 2-5, i cui elementi $x, y, z, \ldots$ siano insiemi, tali che xy sia il loro prodotto insiemistico.

Il nostro esempio principale, S_1, a cui farò riferimento come all'«esempio del semintervallo mancante», è il seguente.

S_1 è un sistema di certi sottointervalli semiaperti dell'intervallo universale $u = (0, 1]$. S_1 contiene, precisamente, *a*) la sequenza decrescente A tale che $a_n = (0, \frac{1}{2}, +2^{-n}]$, e, oltre a questa, *b*) i prodotti insiemistici di due qualsiasi dei suoi elementi e i complementi insiemistici di uno qualsiasi dei suoi elementi.

Cosí S_1 non contiene, né il «semintervallo» $b = (0, \frac{1}{2}]$, né alcun sottointervallo non vuoto di b.

Poiché il semintervallo mancante $b = (0, \frac{1}{2}]$ è il prodotto insiemistico della sequenza A, è chiaro che S_1 non contiene il prodotto insiemistico di A. Ma S_1 contiene il «prodotto elementare» (booleano) di A, come l'abbiamo definito qui. Infatti l'intervallo vuoto soddisfa banalmente la condizione

1); e poiché è l'intervallo piú largo che soddisfi 1), soddisferà anche II).

È chiaro, inoltre, che se a S_1 si aggiunge, poniamo, uno qualsiasi degli intervalli $b_1 = (0, 1/8]$, o $b_2 = (0, 3/16]$, ecc., allora il piú grande di questi intervalli sarà il prodotto elementare di A nel senso (booleano) della nostra definizione, anche se nessuno di questi intervalli sarà il prodotto insiemistico di A.

Si potrebbe pensare, per un istante, che a causa della presenza di un elemento vuoto in ogni S, ogni S, contenga, come S_1, un prodotto elementare (nel senso della nostra definizione) di ogni A in S; infatti, se non contiene alcun elemento piú largo che soddisfi la 1), l'elemento vuoto risponderà sempre allo scopo. Che le cose non stiano cosí si può mostrare con un esempio, S_2, che contenga, oltre agli elementi di S_1, gli elementi (piú i prodotti insiemistici di due elementi qualsiasi e il complemento insiemistico di un elemento qualsiasi) della sequenza $B = b_1, b_2$, dove $b_n = (0, (2^n - 1) / 2^{n+2}]$. Si vedrà facilmente che, sebbene ciascun b_n soddisfi la condizione 1) per il prodotto elementare di A, nessuno di essi soddisfa la condizione II); cosicché, di fatto, non c'è in S_2 *nessun elemento piú largo* che soddisfi la condizione 1) per il prodotto elementare di A.

Dunque S_2 non contiene né il prodotto insiemistico di A né un prodotto elementare nel nostro senso (booleano). Ma S_1 e tutti i sistemi ottenuti aggiungendo a S_1 un numero finito di nuovi intervalli (piú prodotti e complementi) conterrà un prodotto elementare di A nel nostro senso, ma non nel senso insiemistico, a meno che non aggiungiamo a S_1 il semintervallo mancante, $b = (0, 1/2]$.

Ricordando che la vuotezza di un elemento a può essere caratterizzata, nel nostro sistema, da $p(\bar{a}, a) \neq 0$, possiamo ora definire nel modo che segue un «sistema ammissibile S» e un «campo boreliano di probabilità, S».

1) Un sistema S che soddisfi i nostri postulati 2-4 si chiama *sistema ammissibile* se, e solo se, S soddisfa il nostro insieme di postulati, e oltre a ciò, soddisfa la seguente *condizione definitoria.*

Sia $bA = a_1b, a_2b, \ldots$ una qualsiasi sequenza decrescente di elementi di S. (Diciamo in questo caso che $A = a_1, a_2, \ldots$ è «decrescente relativamente a *b*»). Allora, se il prodotto elementare *ab* di questa sequenza è in S[12],

$$\lim p(a_n, b) = p(a, b).$$

II) Un sistema ammissibile S si chiama *campo boreliano di probabilità* se, e solo se, c'è in S un prodotto elementare di una qualsiasi sequenza decrescente (assolutamente o relativamente) di elementi di S.

Di queste due definizioni, la I) corrisponde precisamente al cosiddetto «assioma di continuità» di Kolmogorov, mentre la II) svolge nel nostro sistema una parte analoga a quella della definizione data da Kolmogorov di campi boreliani di probabilità.

Si può ora mostrare che *ogni volta che S è un campo boreliano di probabilità nel senso di Kolmogorov, lo è anche nel senso qui definito, secondo cui la probabilità è una funzione-misura computabilmente additiva degli insiemi che sono gli elementi di S.*

Le definizioni di sistemi ammissibili e di campi boreliani di probabilità sono costruite in modo tale che tutti i sistemi S che soddisfano i nostri postulati e contengono soltanto un numero finito di elementi differenti sono sistemi ammissibili e campi boreliani; di conseguenza, le nostre definizioni sono interessanti soltanto in relazione con sistemi *S che contengono un numero infinito di elementi differenti.* Tali sistemi infiniti possono, o non possono, soddisfare l'una o l'altra o tutte e due le nostre condizioni definitorie; in altre parole, per sistemi infiniti le nostre condizioni definitorie sono non-ridondanti o indipendenti.

[12] Qui avrei potuto aggiungere «e se $p(\overline{ab}, ab) \neq 0$, cosicché *ab* sia vuoto»: quest'aggiunta avrebbe avvicinato ancor di piú la mia formulazione a quella di Kolmogorov. Ma questa condizione non è necessaria. Desidero mettere in evidenza, qui, che ho ricevuto considerevole incoraggiamento dalla lettura dell'interessantissimo articolo di A. RÉNYI, *On a New Axiomatic Theory of Probability* [Una nuova teoria assiomatica della probabilità], in «Acta Mathematica Acad. Scient. Hungaricae», 6 (1955), pp. 286-335. Pur essendomi reso conto da anni che il sistema di Kolmogorov doveva essere relativizzato, e pur avendo, in parecchie occasioni, messo in evidenza alcuni vantaggi di un sistema relativizzato, solo dallo scritto di Rényi imparai quanto fertile potesse essere questa relativizzazione. I sistemi relativi da me pubblicati fin dal 1955 sono ancor piú generali del sistema di Rényi, che, come il sistema di Kolmogorov, è insiemistico e non-simmetrico; e si può vedere facilmente che queste ulteriori generalizzazioni possono condurre a semplificazioni considerevoli nel trattamento matematico.

Questa non-ridondanza può essere provata, per la 1), con estrema facilità in quella sua forma menzionata nella nota 12, con l'aiuto dell'esempio del semintervallo mancante S_1, dato piú sopra. Non dobbiamo far altro che definire la probabilità $p(x)$ come eguale a $l(x)$, cioè a dire, alla lunghezza dell'intervallo x. La nostra prima definizione 1) risulta dunque violata, dal momento che lim $p(a_n) = 1/2$, mentre per il prodotto elementare (in S) di A, $p(a) = 0$. La definizione II) è violata dal nostro esempio S_2 (che soddisfa in modo vuoto la prima definizione).

Mentre il primo di questi esempi stabilisce l'indipendenza o, piú precisamente, la non-ridondanza della nostra prima definizione – violandola – esso non stabilisce, cosí com'è, l'indipendenza dell'«assioma di continuità» di Kolmogorov, che è chiaramente soddisfatto dal nostro esempio. Infatti, il semintervallo mancante, $h = (0, 1/2]$, sia in S o no, è l'unico prodotto insiemistico di A, cosicché per il teorico degli insiemi, $a = h$ è vera sia o no a in S. E con $a = h$ abbiamo lim $p(a_n) = p(a)$. Cosí l'assioma di Kolmogorov è soddisfatto (anche se omettiamo la condizione $p(\bar{a}, a) \neq 0$; cfr. nota 12).

Si dovrebbe menzionare a questo proposito che nel suo libro Kolmogorov non riesce a offrire una prova d'indipendenza del suo «assioma di continuità», pur continuando a vantarne l'indipendenza. Ma è possibile ristrutturare la nostra prova d'indipendenza in modo che diventi applicabile all'assioma di Kolmogorov e al suo approccio insiemistico. Lo si può fare scegliendo, invece del nostro S_1, un sistema di intervalli S_3, esattamente simile a S_1, ma basato su una sequenza $C = c_1, c_2, \ldots$, definita da $c_n = (0, 2^{-n}]$ piuttosto che sulla sequenza $A = a_1, a_2, \ldots$ con $a_n = (0, 1/2 + 2^{-n}]$. Possiamo ora mostrare l'indipendenza dell'assioma di Kolmogorov, definendo le probabilità degli elementi della sequenza A nel modo seguente:

$$p(c_n) = l(c_n) + 1/2 = p(a_n).$$

Qui $l(c_n)$ è la lunghezza dell'intervallo c_n. Questa definizione è altamente contraria all'intuizione, perché, ad esempio, assegna a entrambi gli intervalli $(0, 1/2]$, e $(0, 1]$ la probabilità uno, e perciò all'intervallo $(1/2, 1]$ la probabilità zero; e il fatto che violi l'assioma di Kolmogorov (stabilendone cosí l'indipendenza) è strettamente connesso con il suo carattere controintuitivo. Infatti viola l'assioma perché lim $p(c_n) = ½$, anche se $p(c) = 0$. Per via del suo carattere controintuitivo, la *non-contraddittorietà* di questo esempio è ben lontana dall'essere evidente di per sé; e cosí diventa indispensabile provarne la non-contraddittorietà, allo scopo di stabilire la validità di questa prova d'indipendenza dell'assioma di Kolmogorov.

Ma questa prova di non-contraddittorietà è facile se si tiene conto della nostra prova d'indipendenza precedente: se si tiene conto, cioè, della prova, condotta con l'aiuto dell'esempio S_1, dell'indipendenza della nostra prima definizione. Infatti le probabilità $p(a_n)$ e $p(c_n)$ dei due esempi S_1 e S_3 coincidono. E poiché, correlando le due sequenze, A e C, possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di S_1 e di S_3, la non-contraddittorietà di S_1 prova la non-contraddittorietà di S_3.

È chiaro che *ogni* esempio che provi l'indipendenza dell'assioma di Kolmogorov dev'essere egualmente controintuitivo, cosicché la sua non-contraddittorietà dovrà essere provata per mezzo di qualche metodo simile al nostro. In altre parole, la prova dell'indipendenza dell'assioma di Kolmogorov dovrà utilizzare un esempio che è, essenzialmente, basato su una definizione (booleana) di prodotto come la nostra, piuttosto che sulla definizione insiemistica.

Sebbene ogni campo boreliano di probabilità, nel senso stabilito da Kolmogorov, lo sia anche nel nostro senso, non vale l'opposto. Infatti possiamo costruire un sistema S_4 esattamente simile a S_1, in cui $h = (a, ½]$ è ancora mancante, e che contiene, in sua vece, l'intervallo *aperto* $g = (a, ½)$, dove $p(g) = ½$. Definiamo, in modo alquanto arbitrario,

$$\bar{g} = u - g = (½, 1] \quad \text{e} \quad u - (g + \bar{g}) = u\bar{u}$$

(piuttosto che il punto ½). È facile vedere che S_4 è un campo boreliano nel senso da noi stabilito, con g come prodotto elementare di A. Ma S_4 non è un campo boreliano nel senso stabilito da Kolmogorov, dal momento che non contiene il prodotto insiemistico di A: la nostra definizione consente un'*interpretazione mediante un sistema di insiemi*, che non è un sistema d'insiemi boreliano, e in cui prodotto e complemento non sono esattamente il prodotto e il complemento della teoria degli insiemi. Dunque la nostra definizione è piú ampia di quella di Kolmogorov.

Mi sembra che le nostre prove di indipendenza della I) e della II) gettino un po' di luce sulle funzioni esercitate dalla I) e dalla II). La funzione della I) è quella di escludere sistemi del tipo di S_1, allo scopo di assicurare adeguatezza, nel senso della teoria della misura, al prodotto (o limite) di una sequenza decrescente; il limite delle misure deve essere eguale alla misura del limite. La funzione della II) è quella di escludere sistemi quali S_2, con sequenze crescenti senza limiti. Di assicurare che ogni sequenza decrescente abbia un prodotto in S, e ogni sequenza crescente abbia una somma.

Appendice *v

Derivazioni nella teoria formale della probabilità

In quest'appendice mi propongo di dare le derivazioni piú importanti ottenute dal sistema di postulati che è stato spiegato nell'appendice *iv. Mostrerò in qual modo si ottengano le leggi dei limiti superiore e inferiore, di idempotenza, di commutazione, di associazione e distribuzione, e cosí pure come si ottenga una definizione piú semplice di probabilità assoluta. Farò anche vedere in qual modo l'algebra booleana sia derivabile nel sistema. Un trattamento piú esauriente sarà dato altrove.

Come abbreviazione di «se... allora...», userò una freccia, «... → ...»; una doppia freccia «... ⟷ ...» per «se e solo se», «&» per «e»; «(E*a*)...» per «c'è un *a* in *S*, tale che...»; e «(*a*)...» per «per tutti gli *a* in *S*...».

In primo luogo riformulerò il postulato 2 e i sei assiomi operativi che saranno citati tutti nelle prove. (Gli altri postulati saranno usati implicitamente; anche il postulato 2 sarà citato soltanto una volta, nella prova della 5). Leggendo gli assiomi A3 e C, si dovrebbe tener presente che presto proverò – si veda la formula 25 – che $p(a, a) = 1$.

Postulato 2. Se *a* e *b* sono in *S*, allora $p(a, b)$ è un numero reale.

A1 $$(\mathrm{E}c)(\mathrm{E}d)\, p(a, b) \neq p(c, d),$$

A2 $$((c)(p(a, c) = p(b, c)) \rightarrow p(d, a) = p(d, b)),$$

A3 $$p(a, a) = p(b, b).$$

B1 $$p(ab, c) \leq p(a, c),$$

B2 $$p(ab, c) = p(a, bc)\, p(b, c).$$

C $$p(a, a) \neq p(b, a) \rightarrow p(a, a) = p(c, a) + p(\bar{c}, a).$$

Procedo ora alle derivazioni.

1)	$p(a,a) = p(b,b) = k$	Abbreviazione basata su A3
2)	$p((aa)a,a) \leq p(aa,a) \leq p(a,a) = k$	B1, 1
3)	$p((aa)a,a) = p(aa,aa)p(a,a) = k^2$	B2, 1
4)	$k^2 \leq k$	2, 3
5)	$0 \leq k \leq 1$	4 (e postulato 2)
6)	$k \neq p(a,b) \rightarrow k = k+p(\bar{b},b)$	C, 1
7)	$k \neq p(a,b) \rightarrow p(\bar{b},b) = 0$	6
8)	$p(a\bar{b},b) = p(a,\bar{b}b)p(\bar{b},b)$	B2
9)	$k \neq p(a,b) \rightarrow 0 = p(a\bar{b},b) \leq p(a,b)$	7, 8, B1
10)	$k \neq p(a,b) \rightarrow 0 \leq p(a,b)$	9
11)	$0 > p(a,b) \rightarrow k = p(a,b)$	10
12)	$k = p(a,b) \rightarrow 0 \leq p(a,b)$	5
13)	$0 > p(a,b) \rightarrow 0 \leq p(a,b)$	11, 12
14)	$0 \leq p(a,b)$	13 (oppure 10, 12)
15)	$0 \leq p(\bar{a},b)$	14
16)	$k \neq p(a,b) \rightarrow k \geq p(a,b)$	C, 1, 15
17)	$p(a,b) \leq k \leq 1$	16, 5
18)	$0 \leq p(a,b) \leq k \leq 1$	14, 17
19)	$k = p(aa,aa) \leq p(a,aa) \leq k$	1, B1, 17
20)	$k = p(a(aa),a(aa)) \leq p(a,a(aa)) \leq k$	1, B1, 17
21)	$k = p(aa,aa) = p(a,a(aa))p(a,aa) = k^2$	1, B2, 19, 20
22)	$k = k^2$	21
23)	$(\mathrm{E}a)(\mathrm{E}b)\,p(a,b) \neq 0 \rightarrow k = 1$	18, 22
24)	$(\mathrm{E}a)(\mathrm{E}b)\,p(a,b) \neq 0$	A1
25)	$p(a,a) = k = 1$	1, 23, 24
26)	$(\mathrm{E}b)(\mathrm{E}a)\,p(b,a) \neq k$	A1, 1
27)	$(\mathrm{E}a)\,p(\bar{a},a) = 0.$	7, 26

Abbiamo ora enunciato tutte le leggi dei limiti superiore e inferiore; la 14) e la 17), assommate nella 18), mostrano che le probabilità sono limitate da 0 e 1. La 25) e la 27) mostrano che questi limiti sono effettivamente raggiunti. Ci dedichiamo ora alla derivazione delle varie leggi prese di solito o dall'algebra booleana o dal calcolo proposizionale. Prima di tutto deriviamo la legge dell'idempotenza.

28) $1 = p(ab, ab) \leq p(a, ab) = 1$ 25, B1, 17
29) $p(aa, b) = p(a, ab)\,p(a, b)$ B2
30) $p(aa, b) = p(a, b).$ 28, 29

Questa è la legge dell'idempotenza, talvolta anche chiamata «legge della tautologia». Ci dedicheremo ora alla derivazione della legge commutativa.

31) $p(a, bc) \leq 1$ 17
32) $p(ab, c) \leq p(b, c).$ B2, 31, 14

Questa è la seconda legge di monotonia, analoga a B1.

33) $p(a(bc), a(bc)) = 1$ 25
34) $p(bc, a(bc)) = 1$ 33, 32, 17
35) $p(b, a(bc)) = 1$ 34, B1, 17
36) $p(ba, bc) = p(a, bc)$ 35, B2
37) $p((ba)b, c) = p(ab, c)$ 36, B2
38) $p(ba, c) \geq p(ab, c)$ 37, B1
39) $p(ab, c) \geq p(ba, c)$ 38 (sost.)
40) $p(ab, c) = p(ba, c).$ 38, 39

Questa è la legge commutativa per il primo argomento. (Allo scopo di estendere tale legge al secondo argomento, dovremmo usare A2). È stata derivata da 25) semplicemente usando le due leggi di monotonia (B1 e 32) e B2. Passiamo ora alla derivazione della legge associativa.

41) $p(ab, d((ab)c)) = 1$ 35 (sost.)
42) $p(a, d((ab)c)) = 1 = p(b, d((ab)c))$ 41, B1, 17, 32
43) $p(a, (bc)((ab)c)) = 1$ 42 (sost.)
44) $p(a(bc), (ab)c) = p(bc, (ab)c)$ 43, B2
45) $p(bc, (ab)c) = p(b, c((ab)c))\,p(c, (ab)c)$ B2
46) $p(b, c((ab)c)) = 1$ 42 (sost.)
47) $p(c, (ab)c) = 1$ 25, 32, 17
48) $p(a(bc), (ab)c) = 1.$ 44-47

Questa è una forma preliminare della legge di associazione. 62) segue da essa per $A2^+$ (e B2), ma, dove la cosa è possibile, evito di usare A2 o $A2^+$.

49) $p(a(b(cd)), d) = p(cd, b(ad))\,p(b, ad)\,p(a, d)$ 40, B2
50) $p(a(bc), d) = p(c, b(ad))\,p(b, ad)\,p(a, d)$ 40, B2
51) $p(a(bc), d) \geq p(a(b(cd)), d).$ 49, 50, B1

Questa è una specie di debole generalizzazione della prima legge di monotonia, B1.

52) $p(a(b(cd)),(ab)(cd)) = 1$ 48 (sost.)
53) $p(a(b(cd))(ab),cd) = p(ab,cd)$ 52, B2
54) $p(a(b(cd)),cd) \geq p(ab,cd)$ 53, B1
55) $p((a(b(cd)))c,d) \geq p((ab)c,d)$ 54, B2
56) $p(a(b(cd)),d) \geq p((ab)c,d)$ 55, B1
57) $p(a(bc),d) \geq p((ab)c,d)$. 51, 56

Questa è una metà della legge associativa.

58) $p((bc)a,d) \geq p((ab)c,d)$ 57, 40
59) $p((ab)c,d) \geq p(b(ca),d)$ 58 (sost.), 40
60) $p((bc)a,d) \geq p(b(ca),d)$ 58, 59
61) $p((ab)c,d) \geq p(a(bc),d)$. 60 (sost.)

Questa è la seconda metà della legge associativa.

62) $p((ab)c,d) = p(a(bc),d)$. 57, 61

Questa è la forma completa della legge associativa, per il primo argomento (si veda anche la formula g, all'inizio dell'appendice *IV). La legge per il secondo argomento può essere ottenuta applicando A2. (Applicando due volte A2 a ciascun membro della 62 non si ottiene altro che una forma condizionale che ha come antecedente «$p(bc,d) \neq 0 \rightarrow$»).

Ecco ora una generalizzazione dell'assioma di complementazione. D'ora in poi sarò un po' piú conciso nelle mie derivazioni.

63) $p(\bar{b},b) \neq 0 \longleftrightarrow (c)p(c,b) = 1$ 7, 25
64) $p(a,b)+p(\bar{a},b) = 1+p(\bar{b},b)$. C, 25, 63

Questa è una forma non condizionale del principio di complementazione C, che adesso generalizzerò.

Tenendo presente il fatto che la 64) non è in forma condizionale, e che «a» non compare a secondo membro, possiamo sostituire «c» ad «a» e asserire

65) $p(a,b)+p(\bar{a},b) = p(c,b)+p(\bar{c},b)$ 64
66) $p(a,bd)+p(\bar{a},bd) = p(c,bd)+p(\bar{c},bd)$. 65

Moltiplicando per $p(b,d)$, otteniamo:

67) $p(ab,d)+p(\bar{a}b,d) = p(cb,d)+p(\bar{c}b,d)$ B2, 66

Questa è una generalizzazione di 65). Sostituendo abbiamo:

68) $p(ab, c)+p(\bar{a}b, c) = p(cb, c)+p(\bar{c}b, c).$ 67

Tenendo conto di

69) $p(\bar{c}b, c) = p(\bar{c}, c)$ 7, B1, 25, 63

possiamo anche scrivere la 68), piú brevemente e in analogia con 64):

70) $p(ab, c)+p(\bar{a}b, c) = p(b, c)+p(\bar{c}, c).$ 68, 69[1]

Questa è la generalizzazione della forma non condizionale di C e della formula 64).

71) $p(aa, b)+p(\bar{a}a, b) = p(a, b)+p(\bar{b}, b)$ 70

72) $p(\bar{a}a, b) = p(a\bar{a}, b) = p(\bar{b}, b)$ 40, 71, 30

73) $p(\bar{a}a, b)+p(\overline{\bar{a}a}, b) = p(a\bar{a}, b)+p(\overline{a\bar{a}}, b) = 1+p(\bar{b}, b)$ 64

74) $p(\overline{\bar{a}a}, b) = 1 = p(\overline{a\bar{a}}, b).$ 72, 73

Ciò stabilisce il fatto che gli elementi $\overline{a\bar{a}}$ soddisfano la condizione del postulato AP. Otterremo, di conseguenza,

75) $p(a) = p(a, \overline{a\bar{a}}) = p(a, \overline{\bar{a}a}) = p(a, \overline{b\bar{b}}) = p(a, \overline{\bar{b}b});$ 25, 74, AP

[1] Nella derivazione della 70), abbiamo bisogno anche della formula seguente:

$$p(cb, c) = p(b, c),$$

che può essere chiamata «29′)». La sua derivazione, in presenza della 40) e della 32), è analoga ai passi 28 e 29):

28′) $p(ab, ab) = 1 = p(b, ab)$ 25, 32, 17

29′) $p(ba, b) = p(b, ab)p(a, b) = p(a, b).$ B2, 28′

A questa possiamo aggiungere la legge di idempotenza per il secondo argomento

30′) $p(ab, b) = p(a, bb) = p(a, b).$ B2, 25, 29′, 40

Inoltre dalla 28) otteniamo, per sostituzione,

31′) $p(a, a\bar{a}) = 1$ 28

e analogamente, dalla 28),

32′) $p(\bar{a}, a\bar{a}) = 1.$ 28

Per la C, quest'ultima dà luogo a

33′) $p(a, \bar{b}b) = 1.$ 31′, 32′, C

Abbiamo perciò

34′) $(Eb)(a)p(a, b) = 1$ 33′

35′) $(Ea)p(\bar{a}, a) = 1.$ 34′

Si veda anche la 27). Le formule 31′)-35′) *non appartengono ai teoremi dei sistemi ordinari.*

cioè una definizione di probabilità assoluta in una forma piú maneggevole.

Definiamo poi la legge generale dell'addizione:

76) $p(a\bar{b}, c) = p(a, c) - p(ab, c) + p(\bar{c}, c)$ 70, 40
77) $p(\bar{a}\bar{b}, c) = p(\bar{a}, c) - p(\bar{a}b, c) + p(\bar{c}, c)$ 76
78) $p(\bar{a}\bar{b}, c) = 1 - p(a, c) - p(b, c) + p(ab, c) + p(\bar{c}, c)$ 77, 76, 64, 40
79) $p(\overline{\bar{a}\bar{b}}, c) = p(a, c) + p(b, c) - p(ab, c)$. 78, 64

Questa è una forma della legge generale dell'addizione, come si vede facilmente ricordando che «$\overline{\bar{a}\bar{b}}$» significa, nel nostro sistema, lo stesso che «$a+b$» nel senso booleano. Vale la pena menzionare che la 79) ha la forma solita: non è condizionale *ed* è libera dall'insolito «$+p(\bar{c}, c)$». La 79) può essere ulteriormente generalizzata:

80) $p(\overline{\bar{b}\bar{c}}, ad) = p(b, ad) + p(c, ad) - p(bc, ad)$ 79
81) $p(a\overline{\bar{b}\bar{c}}, d) = p(ab, d) + p(ac, d) - p(a(bc), d)$. 80, B2, 40

Questa è una generalizzazione della 79).

Procediamo ora alla derivazione della legge distributiva. Può essere ottenuta dalla 79) e dall'81) e da un semplice lemma 84) che propongo di chiamare il «lemma distributivo», e che è una generalizzazione della 30):

82) $p(a(bc), d) = p(a, (bc)d)p(bc, d) = p((aa)(bc), d)$ B2, 30
83) $p(((aa)b)c, d) = p(a(ab), cd)p(c, d) = p(((ab)a)c, d)$ B2, 62, 40
84) $p(a(bc), d) = p((ab)(ac), d)$. 82, 83, 62

Questo è il «lemma distributivo».

85) $p(\overline{\overline{ab}\,\overline{ac}}, d) = p(ab, d) + p(ac, d) - p((ab)(ac), d)$. 79 (sost.)

A questa formula e all'81), possiamo ora applicare il «lemma distributivo»; otteniamo:

86) $p(a\overline{\bar{b}\bar{c}}, d) = p(\overline{\overline{ab}\,\overline{ac}}, d)$. 81, 85, 84

Si tratta di una forma della prima legge distributiva. Può essere applicata al primo membro della formula seguente:

87) $p(\overline{\bar{b}\bar{\bar{b}}}a, c) = p(\overline{\bar{b}\bar{\bar{b}}}, ac)p(a, c) = p(a, c)$. B2, 74

Otteniamo allora:

88) $p(\overline{\overline{ab}\,\overline{a\bar{b}}}, c) = p(a, c).$ 86, 87, 40

Si può notare che

89) $p(\bar{\bar{a}}b, c) = p(ab, c),$ 68 (sost.)
90) $p(a, c) = p(b, c) \rightarrow p(\bar{a}, c) = p(\bar{b}, c).$ 64

Di conseguenza abbiamo

91) $p(\overline{\overline{\bar{a}\,\bar{b}}}\,\bar{c}, d) = p(\bar{a}\,\overline{\overline{\bar{b}\,\bar{c}}}, d)$ 62, 89, 40

92) $p(\overline{\overline{\overline{\bar{a}\,\bar{b}}}\,\bar{c}}, d) = p(\overline{\bar{a}\,\overline{\overline{\bar{b}\,\bar{c}}}}, d).$ 90, 91

Questa è la legge associativa per la somma booleana. Sostituendo in 40) i complementi di a e b, otteniamo

93) $p(\overline{\bar{a}\,\bar{b}}, c) = p(\overline{\bar{b}\,\bar{a}}, c)$ 40, 90

che è la legge commutativa per la somma booleana. Allo stesso modo si ottiene

94) $p(\overline{\bar{a}\,\bar{a}}, b) = p(a, b)$ 30, 89, 90

che è la legge di idempotenza per la somma booleana. Dalla 87) otteniamo

95) $p(a, b) = p(a, b\overline{c\bar{c}}),$ 87, 40, A2
96) $p(a, b)p(b) = p(ab).$ 95, B2, 75

Che si possono anche scrivere

97) $p(b) \neq 0 \rightarrow p(a, b) = p(ab)/p(b).$ 96

Questa formula mostra che il nostro concetto generalizzato di probabilità relativa coincide, per $p(b) \neq 0$, con il concetto solito, e che il nostro calcolo è una generalizzazione del calcolo ordinario. Che la generalizzazione sia genuina si può vedere dagli esempi dati nell'appendice precedente (l'appendice *IV) e che mostrano la compatibilità del nostro sistema con la seguente formula, E):

E) $(\mathrm{E}a)(\mathrm{E}b)(\mathrm{E}c)\, p(a, b) = 1$ e $p(a, bc) = 0,$

formula che è non-valida in molte interpretazioni finite del nostro S, ma è valida nelle sue normali interpretazioni infinite.

Allo scopo di provare ora che in ogni interpretazione non-contraddittoria S dev'essere un'algebra booleana, osserviamo che

98) $((x)p(a,x) = p(b,x)) \rightarrow p(ay,z) = p(by,z)$ B2
99) $((x)p(a,x) = p(b,x)) \rightarrow p(y,az) = p(y,bz).$ 98, A2

È interessante che la 99) ha bisogno dell'A2: non segue da 98, 40, e B2, perché è impossibile che $p(a,z) = p(b,z) = 0$. (Ciò accade, per esempio, se $\bar{a} = z \neq x\bar{x}$).

100) $((x)(p(a,x) = p(b,x) \,\&\, p(c,x) = p(d,x))) \rightarrow$
$\rightarrow p(ac,y) = p(bd,y).$ 99, B2

Con l'aiuto della 90), della 100) e di A2, si può ora mostrare facilmente e subito, che tutte le volte che è soddisfatta la condizione

*) $p(a,x) = p(b,x)$ per ogni x in S,

ad alcune o a tutte le occorrenze del nome dell'elemento b si può sostituire un qualsiasi nome dell'elemento a in ogni formula ben formata del calcolo, senza cambiarne il valore di verità; in altre parole: la condizione *) garantisce l'*equivalenza rispetto alla sostituzione* di a e di b.

Tenendo presente questo risultato, definiamo ora l'equivalenza booleana di due elementi, a e b, nel modo che segue.

D1) $a = b \longleftrightarrow (x)p(a,x) = p(b,x).$

Da questa definizione otteniamo immediatamente le formule:

A) $a = a$
B) $a = b \rightarrow b = a$
C) $(a = b \;\&\; b = c) \rightarrow a = c$
D) $a = b \rightarrow a$ può sostituire b in alcuni o in tutti i posti di una qualsiasi formula, senza modificarne il valore di verità A2, 90, 100

Possiamo anche introdurre una seconda definizione:

D2) $a = b+c \longleftrightarrow a = \overline{\bar{b}\bar{c}}$

Otteniamo allora:

I) Se a e b sono in S, allora $a+b$ è in S (postulato 3, D2, D1, 90, 100)

II) Se a è in S, allora $\bar{a}$ è in S (postulato 4)

III) $a+b = b+a$ 93, D2

IV) $(a+b)+c = a+(b+c)$ 92, D2

V) $a+a = a$ 94, D2

VI) $ab+a\bar{b} = a$ 88, D2

VII) $(\mathrm{E}a)(\mathrm{E}b)\, a \neq b.$ 27, 74, 90, D1

Ma il sistema A-D2 e I-VI è un ben noto sistema d'assiomi per l'algebra booleana, dovuto a Huntington[2]; ed è noto che da tale sistema sono derivabili tutte le formule valide dell'algebra booleana.

Dunque S è un'algebra booleana. E poiché l'algebra booleana si può interpretare come una logica della derivazione, possiamo asserire che, *nella sua interpretazione logica, il calcolo della probabilità è una generalizzazione genuina della logica della derivazione.*

Piú in particolare, possiamo interpretare

$$a \geq b$$

che è definibile per mezzo di «$ab = b$», nell'interpretazione logica, assegnandole il significato di «a segue da b» (o «b implica logicamente [*entails*] a»). Si può provare facilmente che

$$+) \qquad a \geq b \rightarrow p(a, b) = 1.$$

Si tratta di una formula importante[3] che è asserita da molti autori ma è nondimeno non-valida nei sistemi soliti, purché

[2] Cfr. E. V. HUNTINGTON, in «Transactions Amer. Mathem. Soc.», 35 (1933), pp. 274-304. Il sistema I)-VI) è il «quarto insieme» di Huntington, ed è descritto a p. 280. Alla stessa pagina si possono trovare A)-D) e D_2). La formula V) è ridondante, come ha mostrato Huntington a pp. 557 sg. dello stesso volume. Anche la VII) è assunta da Huntington.

[3] È stata asserita, ad esempio, da JEFFREYS, *Theory of Probability* cit., § 1.2 «Convenzione 3». Ma se la si accetta, il teorema 4 di Jeffreys diventa immediatamente contraddittorio, poiché è asserito senza una condizione come la nostra, «$p(b) \neq 0$». Da questo punto di vista, Jeffreys ha migliorato la formulazione del teorema 2 nella seconda edizione (1948); ma, come è mostrato dal teorema 4 (e da molti altri) il suo sistema è ancora contraddittorio (anche se Jeffreys ha riconosciuto, nella sua seconda edizione, p. 35, che due proposizioni contraddittorie implicano logicamente [*entail*] ogni proposizione; cfr. § 23, nota *2, e la mia risposta a Jeffreys in «Mind», 52, 1943, pp. 47 sgg.).

questi siano non-contraddittori. Infatti, allo scopo di renderla valida, dobbiamo ammettere che[4]

$$p(a, a\bar{a})+p(\bar{a}, a\bar{a}) = 2,$$

anche se abbiamo

$$p(a+\bar{a}, a\bar{a}) = 1.$$

Cioè a dire, formule come $p(a+\bar{a}, b) = p(a, b)+p(\bar{a}, b)$, non devono essere asserite incondizionatamente nel sistema (cfr. il nostro assioma C; cfr. anche nota 1).

L'inversa di $^+$), cioè a dire

$$p(a, b) = 1 \ \rightarrow \ a \geq b$$

non deve, naturalmente, essere dimostrabile, come mostrano il nostro secondo e terzo esempio, che provano la non-contraddittorietà. (Cfr. anche la formula E in questa e nelle appendici precedenti). Ma nel nostro sistema ci sono altre equivalenze valide, quali, ad esempio,

$$\ddagger) \qquad \begin{array}{l} a \geq b \ \longleftrightarrow \ p(a, \bar{a}b) \neq 0 \\ a \geq b \ \longleftrightarrow \ p(a, \bar{a}b) = 1. \end{array}$$

Nessuna di queste equivalenze può valere nei sistemi soliti, in cui $p(a, b)$ è indefinita, a meno che non sia $p(b) \neq 0$. Sembra perfettamente chiaro, perciò, che è errato descrivere i soliti sistemi di teoria delle probabilità come generalizzazioni della logica: in realtà essi sono formalmente inadeguati per questo scopo, dal momento che non implicano logicamente [*entail*] neppure l'algebra booleana.

Il carattere formale del nostro sistema rende possibile interpretarlo, ad esempio, come una logica proposizionale plurivalente (con quanti valori scegliamo, discreti, densi o continui) o come un sistema di logica modale. Ci sono in realtà molti modi per far ciò: ad esempio, possiamo definire «a implica necessariamente b» mediante «$p(b, a\bar{b}) \neq 0$», come si è appena indicato, o «a è logicamente necessaria» con «$p(a, \bar{a}) = 1$». Anche il problema se un'asserzione necessaria sia necessariamente necessaria, trova il suo luogo naturale nella teoria della probabilità: è strettamente connesso con la relazione fra asserzioni probabilistiche primarie e as-

[4] Si vedano le formule 31′ sgg. nella nota 1.

serzioni probabilistiche secondarie, che esercita una funzione importante nella teoria della probabilità (come è mostrato nell'appendice *IX, punto *13 della Terza nota). Piú o meno, se scriviamo «$\vdash x$» per «x è necessaria» (nel senso di «dimostrabile»), e «b» per «$p(a, \bar{a}) = 1$»; possiamo mostrare che

$$\vdash a \longleftrightarrow \vdash b,$$

e perciò troviamo che

$$\vdash a \rightarrow \vdash «p(b, \bar{b}) = 1»,$$

a cui possiamo assegnare il significato, che $\vdash a$ implica logicamente che a è necessariamente necessaria; e poiché questo significa qualcosa come

$$\vdash a \rightarrow \vdash «p(«p(a, \bar{a}) = 1», «\overline{p(a, \bar{a}) = 1}») = 1»,$$

otteniamo asserzioni probabilistiche (secondarie) intorno ad asserzioni probabilistiche (primarie).

Ma naturalmente ci sono altri modi possibili di interpretare la relazione fra un'asserzione probabilistica primaria e un'asserzione probabilistica secondaria. (Alcune interpretazioni ci impedirebbero di trattarle come appartenenti allo stesso livello linguistico, o addirittura come appartenenti allo stesso linguaggio).

Addendum, 1964.

Da quando ho scritto questa nota ho trovato che il seguente sistema di tre assiomi, A, BD e CD è equivalente ai sei assiomi di pp. 369-70 e 390.

A $\quad (\mathrm{E}a)(\mathrm{E}b)p(a, a) \neq p(a, b)$

BD $\quad ((d)p(ab, d) = p(c, d)) \longleftrightarrow (e)(f)(p(a, b) \leq p(c, b) \,\&\, p(a, e) \geq \geq p(c, e) \leq p(b, c) \,\&\, ((p(b, e) \leq p(f, e) \,\&\, p(b, f) \geq p(f, f) \leq \leq p(e, f)) \longrightarrow (p(a, f)p(b, e) = p(c, e))))$

CD $\quad p(\bar{a}, b) = p(b, b) - p(a, b) \longleftrightarrow (\mathrm{E}c)p(b, b) \neq p(c, b)$

Ho anche trovato un esempio che non soddisfa A2 ma soddisfa tutti gli altri assiomi *e* il postulato AP (cfr. nota 10, p. 378). – L'esempio a p. 380-81 può essere modificato (ponendo $p(2) = \frac{1}{2}$, $p(a, b) = 1$ ogni volta che $p(b) = 0$, $p(a, b) = p(ab)/p(b)$ ogni volta che $p(b) \neq 0$ in modo da ottenere un'*algebra booleana* che prova l'indipendenza di C.

Si veda anche il mio *Conjectures and Refutations* cit., pp. 388 sgg., la seconda edizione tedesca (1966) della mia *Logik der Forschung* e «Synthese», 15 (1963), pp. 167-86.

Appendice *VI

Disordine oggettivo, o casualità

Per una teoria oggettivistica della probabilità e per le sue applicazioni a concetti quali il concetto di entropia (o di disordine molecolare), è essenziale dare una caratterizzazione oggettiva del *disordine o casualità* [*randomness*] *come di un tipo di ordine.*

In quest'appendice intendo indicare brevemente alcuni dei problemi generali che questa caratterizzazione può contribuire a risolvere, e il modo in cui essi possono essere affrontati.

1) Si ritiene che la distribuzione delle velocità delle molecole di un gas in equilibrio sia (quasi) *casuale* [*random*]. Analogamente, la distribuzione delle nebulose nell'universo appare casuale, con una densità di occorrenza in generale costante. L'occorrenza della pioggia di domenica, è *casuale*: a lungo andare ogni giorno della settimana riceve quantità eguali di pioggia, e il fatto che sia piovuto mercoledí (o un qualsiasi altro giorno) non può aiutarci a predire se domenica pioverà oppure no.

2) Abbiamo certi *controlli* statistici di casualità.

3) Possiamo descrivere la casualità come «assenza di regolarità»; ma, come vedremo, questa non è una descrizione utile. Infatti non ci sono controlli per la presenza o l'assenza di regolarità in generale, ma solo controlli per la presenza o l'assenza di certe regolarità *specifiche* o date. Cosí i nostri controlli di casualità non sono mai controlli che escludano la presenza di ogni regolarità: possiamo controllare se esista o non esista una correlazione significante tra la pioggia e le domeniche, o se una certa formula per predire la pioggia di domenica – quale, ad esempio, la formula «almeno una volta ogni tre settimane» – funzioni; ma pur potendo scartare questa

formula in forza dei nostri controlli, non possiamo determinare, per mezzo loro, se esista o no una formula migliore.

4) In queste circostanze sembra seducente il dire che la casualità o disordine non è un tipo di ordine che possa essere descritto oggettivamente, e che deve perciò essere interpretata come la *nostra mancanza di conoscenza* nei confronti dell'ordine predominante, ammesso che prevalga un ordine qualsiasi. Credo che si debba resistere a questa tentazione, e che sia possibile sviluppare una teoria che ci permette effettivamente di costruire tipi ideali di disordine (e, naturalmente, anche tipi ideali di ordine, e di tutte le gradazioni fra questi due estremi).

5) Il problema piú semplice in questo campo – il problema che io credo di aver risolto – è la costruzione di un *tipo monodimensionale ideale di disordine*, vale a dire di una sequenza idealmente disordinata.

Il problema di costruire una sequenza di questo genere sorge immediatamente da una qualsiasi teoria frequenziale della probabilità che operi con sequenze infinite. Questo si può mostrare nel modo che segue.

6) Secondo von Mises, una sequenza di 0 e di 1 con equidistribuzione è casuale se non ammette *nessun sistema di scommesse*, cioè a dire, se non ammette nessun sistema che ci consentirebbe di selezionare in anticipo una sottosequenza in cui la distribuzione sia ineguale. Ma, naturalmente, von Mises ammette che qualsiasi sistema di scommesse può, «accidentalmente», funzionare per qualche tempo; si postula soltanto che *a lungo andare* – o, piú precisamente, in un numero infinito di tentativi – il sistema smetterà di funzionare.

Secondo von Mises un collettivo può essere estremamente regolare *nel suo segmento iniziale*; purché diventino irregolari alla fine, la regola di von Mises non è in grado di escludere collettivi che comincino molto regolarmente, ad esempio con

$$00\ 11\ 00\ 11\ 00\ 11\ \ldots$$

e cosí via, per i primi cinquecento milioni di posti.

7) È chiaro che non possiamo controllare empiricamente *questo* genere di casualità differita; ed è chiaro che, ogni volta che controlliamo davvero la casualità in una sequenza, abbiamo in mente un tipo differente di casualità: una sequenza,

che *proprio dall'inizio*, si comporta in una maniera «ragionevolmente casuale».

Ma questa frase «proprio dall'inizio», crea il suo stesso problema. La sequenza 010110 è casuale? È chiaro che tale sequenza è *troppo corta* perché possiamo dire sí o no. Ma se diciamo che, per decidere una questione di questo genere, abbiamo bisogno di una *sequenza lunga*, allora sembra che disdiciamo quello che abbiamo detto prima: sembra che stiamo ritrattando la frase: «proprio dall'inizio».

8) La soluzione di questa difficoltà consiste nella costruzione di una *sequenza idealmente casuale* – di una sequenza, cioè, che per ciascun segmento iniziale, corto o lungo che sia, è tanto casuale quanto è consentito dalla lunghezza del segmento; o, in altre parole, una sequenza il cui grado n di casualità (cioè, la cui libertà n da retroeffetti) cresce col crescere della lunghezza della sequenza, tanto rapidamente quanto è matematicamente possibile.

Come costruire una sequenza di questo genere, è stato mostrato nell'appendice IV del libro. (Si veda specialmente la nota *1 all'appendice IV, nota contenente un riferimento a uno scritto non ancora pubblicato del dottor L. R. B. Elton e mio).

9) L'insieme infinito di tutte le sequenze che rispondono a questa descrizione si può chiamare *il tipo ideale di alternative casuali* con distribuzione eguale.

10) Benché di queste sequenze non si postuli nulla piú se non che sono «fortemente casuali» – nel senso che i segmenti iniziali finiti supererebbero tutti i controlli di casualità – *si può facilmente mostrare che posseggono limiti di frequenza* nel senso di solito richiesto dalle teorie frequenziali. Questo risolve in maniera semplice uno dei problemi centrali del mio capitolo sulla probabilità: il problema dell'eliminazione dell'assioma del limite mediante una riduzione del comportamento limitante [*limit-like*] delle sequenze al loro comportamento casuale in segmenti finiti.

11) La costruzione può essere estesa piuttosto facilmente in entrambe le direzioni del caso monodimensionale, facendo corrispondere il primo, secondo,... degli elementi contrassegnati da un numero dispari al primo, secondo,... posto della direzione positiva, e il primo, secondo,... dei posti contrassegnati con un numero pari al primo, secondo,... posto della di-

rezione negativa; e con i ben noti metodi simili, possiamo estendere la nostra costruzione alle cellule di uno spazio *n*-dimensionale.

12) Mentre altri sostenitori della teoria frequenziale della probabilità – specialmente von Mises, Copeland, Wald e Church – erano interessati soprattutto a definire le sequenze casuali nel modo piú severo, escludendo «tutti» i sistemi di scommesse nel senso piú largo possibile della parola «tutti» (cioè, nel senso piú largo compatibile con una prova che esistono sequenze casuali cosí definite), il mio scopo era ed è piuttosto differente. Fin dall'inizio desideravo rispondere all'obiezione secondo cui la casualità è compatibile con *qualsiasi sequenza iniziale finita*, e mi proponevo di descrivere, con un passaggio all'infinito, sequenze che sorgono *da sequenze casuali finite*. Speravo, con questo metodo, di ottenere due cose: tenermi vicino a quel tipo di sequenza che supererebbe controlli statistici di casualità, e *provare* il teorema del limite. Entrambi questi scopi sono stati ora raggiunti (come si dice al punto 8) con l'aiuto della costruzione esposta nella mia vecchia appendice IV. Ma nel frattempo ho trovato che «l'approccio in termini di teoria della misurazione» alla probabilità è preferibile all'interpretazione frequenziale (si veda il mio *Postscript*, cap. *III), sia per ragioni matematiche sia per ragioni filosofiche. (Il punto decisivo è connesso con l'interpretazione della probabilità in termini di propensione, che ho discusso esaurientemente nel mio *Postscript*). Pertanto, non penso piú che l'eliminazione dell'assioma del limite dalla teoria frequenziale sia molto importante. Tuttavia, la cosa può farsi: possiamo costruire la teoria frequenziale con l'aiuto del tipo ideale delle sequenze casuali costruite nell'appendice IV; e possiamo dire che una sequenza empirica è casuale nella misura in cui i controlli mostrano la sua somiglianza statistica con una sequenza ideale.

Come abbiamo menzionato piú sopra, le sequenze ammesse da von Mises, Copeland, Wald e Church, non sono necessariamente di questo genere. Ma è un fatto che ogni sequenza rifiutata sulla base di controlli statistici, per il fatto che è casuale, può in seguito trasformarsi in una sequenza casuale ammissibile, nel senso stabilito da questi autori.

Addendum, 1967.

13) Oggi, alcuni anni dopo avere raggiunto una soluzione di questo vecchio problema – soluzione che mi avrebbe soddisfatto nel 1934 – non credo piú all'importanza del fatto che si può costruire una teoria frequenziale che sia libera da tutte le vecchie difficoltà. Tuttavia credo ancora che sia possibile caratterizzare la casualità come un tipo di ordine, e costruire modelli oggettivi di sequenze casuali.

14) È significativo che le *sequenze idealmente casuali*, come le ho descritte qui in 8-10, soddisfino il sistema formale delle appendici *IV e *V, e anche quello dell'appendice piú vecchia *II. Supponiamo infatti che S sia un insieme qualsiasi di sequenze casuali di 0 e di 1, tali che $a = a_1, a_2, \ldots$; $b = b_1, b_2, \ldots$, e che, per $a \neq b$, a e b siano indipendenti (e perciò ab sia casuale). Supponiamo che S contenga le due sequenze consistenti soltanto di 0 e di 1. Poniamo

$$\begin{aligned} p(a, b) &= \lim((\textstyle\sum a_n b_n)/\sum b_n), \\ p(ab, c) &= \lim((\textstyle\sum a_n b_n c_n)/\sum c_n), \\ p(\bar{a}, b) &= \lim((\textstyle\sum (1-a_n) b_n)/\sum b_n), \\ p(a) &= \lim((\textstyle\sum a_n)/n); \end{aligned}$$

allora tutti i postulati e gli assiomi delle appendici *IV e *V (eccetto il postulato 1; cfr. p. 383) sono soddisfatti.

Appendice *VII

Probabilità zero e microstruttura di probabilità e contenuto

Nel libro si traccia una netta distinzione fra l'idea della *probabilità* di un'ipotesi e il suo *grado di corroborazione.* Si asserisce che, se diciamo che un'ipotesi è ben corroborata, non diciamo nulla di piú se non che l'ipotesi è stata controllata severamente (deve dunque essere un'ipotesi dotata di un alto grado di controllabilità) e ha resistito bene ai controlli piú severi che siamo stati capaci di progettare fino a questo momento. E si asserisce inoltre che *il grado di corroborazione non può essere una probabilità*, perché non può soddisfare le leggi del calcolo della probabilità. Infatti, le leggi del calcolo della probabilità esigono che di due ipotesi quella che è logicamente piú forte, o fornisce piú informazioni, o è meglio controllabile – e dunque quella che può essere *meglio corroborata* – sia sempre *meno probabile* – in base a qualsiasi prova data – dell'altra. (Cfr. specialmente §§ 82 e 83).

Dunque, in generale, un piú alto grado di corroborazione sarà combinato con un grado di probabilità piú basso; e ciò mostra non soltanto che dobbiamo fare una netta distinzione fra la probabilità (nel senso del calcolo della probabilità) e il grado di corroborazione o di conferma, ma anche che *la teoria probabilistica dell'induzione, o l'idea di una probabilità induttiva, è insostenibile.*

L'impossibilità di una probabilità induttiva è illustrata nel libro (§§ 80, 81 e 83) mediante una discussione di certe idee di Reichenbach, Keynes e Kaila. Uno dei risultati di questa discussione è che *in un universo infinito* (l'universo può essere infinito rispetto al numero delle cose che vi si possono distinguere, o delle regioni spazio-temporali) *la probabilità di una qualsiasi legge universale* (*non-tautologica*) *sarà zero.*

(Un altro risultato è che non dobbiamo assumere acriticamente che gli scienziati tendano a dare alle loro teorie un alto grado di probabilità. Gli scienziati devono scegliere tra alta probabilità e alto contenuto informativo, dal momento che, *per ragioni logiche, non possono averli entrambi.* Messi di fronte a questa scelta, hanno optato finora per un alto contenuto informativo, preferendolo a un'alta probabilità, purché la loro teoria abbia ben resistito ai suoi controlli).

Per «probabilità» intendo qui, o la probabilità logica *assoluta* delle leggi universali, o la probabilità delle leggi, *relativa a qualche prova*, cioè a dire, relativa a un'asserzione singolare o a una congiunzione finita di asserzioni singolari. Cosí, se a è la nostra legge, e b una qualsiasi prova empirica, io affermo che

1) $$p(a) = 0$$

e anche che

2) $$p(a, b) = 0.$$

Queste formule verranno discusse nella presente appendice.

Le due formule, 1) e 2), sono equivalenti. Infatti, come hanno osservato Jeffreys e Keynes, se la probabilità «primaria» di un'asserzione a (cioè, la probabilità logica assoluta di a) è zero, allora zero dev'essere la sua probabilità relativa a una qualsiasi prova finita b. Possiamo infatti assumere che per ogni prova finita b, abbiamo $p(b) \neq 0$. Infatti $p(a) = 0$ implica logicamente [*entails*] $p(ab) = 0$, e poiché $p(a, b) = p(ab)/p(b)$, otteniamo la 2) dalla 1). D'altra parte possiamo ottenere la 1) dalla 2): infatti, se la 2) vale per ogni b probante – per quanto debole o «quasi tautologica» essa sia – possiamo assumere che valga anche per una prova-zero, cioè a dire per la tautologia $t = \overline{b\bar{b}}$; e che $p(a)$ possa essere definita come eguale a $p(a, t)$.

Ci sono molti argomenti a favore della 1) e della 2). In primo luogo possiamo considerare la definizione classica della probabilità come del numero delle possibilità *favorevoli* diviso per il numero di *tutte* le possibilità (eguali). Possiamo poi derivare la 2), ad esempio, se identifichiamo le possibilità favorevoli con le prove favorevoli. È chiaro che, in questo caso, $p(a, b) = 0$; infatti le prove favorevoli non possono essere altro che finite, mentre in un universo infinito le possibilità devono chiaramente essere infinite. (Nulla dipende qui dall'«infinità», perché qualsiasi universo sufficientemente grande darà luogo, con qualsiasi grado di approssimazione desiderato, al medesimo risultato; e noi sappiamo che il nostro universo è estremamente grande, a confronto con la quantità di prove che abbiamo a nostra disposizione).

Questa semplice considerazione è forse un poco vaga, ma può essere rafforzata considerevolmente se dalla definizione classica tentiamo di derivare la 1) invece della 2). A questo fine possiamo interpretare l'asserzione universale *a* come logicamente implicante [*entailing*] un prodotto infinito di asserzioni singolari, ciascuna dotata di una probabilità che, naturalmente, dev'essere minore dell'unità. Nel caso piú semplice *a* stessa può essere interpretata come un tale prodotto infinito; cioè a dire, possiamo porre $a =$ «tutto ciò che ha la proprietà A»; o, in simboli, «$(x)Ax$», che si può leggere: «per qualsiasi valore di x scegliamo, x ha la proprietà A»[1]. In questo caso A può essere interpretata come il prodotto infinito $a = a_1 a_2 a_3 \ldots$ dove $a_i = Ak_i$, e dove k_i è il nome dell'i-esimo individuo del nostro universo di discorso infinito.

Possiamo ora introdurre il nome «a^n» per il prodotto delle prime n asserzioni singolari, $a_1 a_2 \ldots a_n$, cosicché a può essere scritta:

$$a = \lim_{n \to \infty} a^n$$

[1] Qui «x» è una variabile individuale che varia sull'(infinito) universo del discorso. Possiamo scegliere, ad esempio, $a =$ «Tutti i cigni sono bianchi» = «Per ogni valore di x, x ha la proprietà A», dove «A» si definisce come «essere bianco o non essere un cigno». Possiamo anche esprimere ciò in un modo leggermente diverso, assumendo che x vari sulle regioni spazio-temporali dell'universo e «A» sia definita come «non abitato da un cigno non-bianco». Anche le leggi di forma piú complessa – ad esempio di forma quale «$(x)(y)(xRy \to xSy)$» – si possono scrivere «$(x)Ax$», dal momento che possiamo definire «A» per mezzo di

$$Ax \longleftrightarrow (y)(xRy \to xSy).$$

Possiamo forse pervenire alla conclusione che le leggi naturali hanno una forma diversa da quella descritta qui (cfr. appendice *X): che sono logicamente ancora *piú forti* di quanto non si assuma qui; e che, quando le facciamo entrare a forza in una forma come «$(x)Ax$», il predicato A diventa essenzialmente non-osservativo (cfr. le note *1 e *2 alla Terza nota ristampata nell'appendice *IX) anche se, naturalmente, è controllabile deduttivamente. Ma in questo caso le nostre considerazioni rimangono valide a fortiori.

e (vedi p. 386)

$$3) \qquad p(a) = \lim_{n\to\infty} p(a^n).$$

È chiaro che possiamo interpretare a^n come l'asserzione che, all'interno della sequenza finita di elementi $k_1, k_2, ..., k_n$, tutti gli elementi posseggono la proprietà A. Ciò rende facile applicare la definizione classica alla valutazione di $p(a^n)$. C'è soltanto *una possibilità che sia favorevole* all'asserzione a^n: si tratta della possibilità che tutti gli n individui k_i senza eccezione, posseggano la proprietà A invece della proprietà non-A. Ma ci sono in tutto 2^n possibilità, dal momento che dobbiamo assumere che per ogni individuo k_i è possibile o possedere la proprietà A o possedere la proprietà non-A. Di conseguenza, la teoria classica dà:

$$4^c) \qquad p(a^n) = 1/2^n.$$

Ma dalla 3) e dalla 4^c) otteniamo immediatamente la 1).

L'argomentazione «classica» che conduce alla 4^c) non è del tutto adeguata, anche se, io credo, è essenzialmente corretta.

L'inadeguatezza consiste semplicemente nell'assunzione che A e non-A siano egualmente probabili. Infatti si può ragionare – credo correttamente – che, poiché si suppone che a descriva una legge di natura, le varie a_i sono asserzioni esemplificatorie e perciò piú probabili che le loro negazioni, che sono falsificatori potenziali (cfr. § 28, nota *1). Quest'obiezione, comunque, si riferisce a una parte inessenziale del ragionamento. Infatti, qualunque probabilità – eccettuata l'unità – attribuiamo ad A, il prodotto infinito a avrà probabilità zero (presupponendone l'indipendenza, il che sarà discusso piú in là). In realtà, ci siamo qui imbattuti in un caso particolarmente banale della *legge di probabilità uno-o-zero* (che possiamo anche chiamare, con un'allusione alla neurofisiologia, «il principio del tutto o del nulla»). In questo caso, la legge può essere formulata cosí: se a è il prodotto infinito di $a_1, a_2, ...$ dove $p(a_i) = p(a_j)$, e dove ogni a_i è indipendente da tutti gli altri, allora vale la proposizione che segue:

$$4) \quad p(a) = \lim_{n\to\infty} p(a^n) = 0 \quad \text{a meno che} \quad p(a) = p(a^n) = 1.$$

Ma è chiaro che $p(a) = 1$ è inaccettabile (non soltanto dal mio punto di vista, ma anche dal punto di vista dei miei avversari induttivisti, che non possono ovviamente accettare la conseguenza che la probabilità di una legge universale non può mai essere accresciuta dall'esperienza). Infatti «Tutti i cigni sono neri» dovrebbe avere probabilità 1, cosí come «Tutti i cigni sono bianchi», e cosí pure per tutti gli altri colori, di modo che «Esiste un cigno nero» e «Esiste un cigno bianco», ecc., avrebbero tutte probabilità zero, nonostante la loro intuibile debolezza logica. In altre parole $p(a) = 1$ equivarrebbe ad asserire, su basi puramente logiche, con probabilità 1, che l'universo è vuoto.

Cosí la 4) consolida la 1).

Credo che quest'argomentazione (compresa l'assunzione di indipendenza, che discuteremo piú avanti) sia incontestabile. C'è però un certo numero di argomentazioni piú deboli che non presuppongono l'indipendenza, e tuttavia conducono alla 1). Ad esempio, potremmo ragionare nel modo che segue.

Nella nostra derivazione si assumeva che per ogni k_i è logicamente possibile che k_i abbia la proprietà A e, alternativamente, che abbia la proprietà non-A: ciò conduce, essenzialmente, alla 4). Ma si potrebbe anche assumere, forse, che quelle che dobbiamo considerare come nostre possibilità fondamentali non siano le possibili proprietà di ogni individuo nell'universo di n individui, ma piuttosto le possibili proporzioni con cui le proprietà A e non-A possono comparire in un campione di individui. In un campione di n individui, le proporzioni possibili con cui A può comparire sono $0, 1/n, \ldots, n/n$. Se consideriamo come nostre possibilità fondamentali, le occorrenze di una qualsiasi di queste proporzioni, e trattiamo quindi tali occorrenze come equiprobabili («distribuzione laplaciana»[2]) allora alla 4) dovrebbe essere sostituita la

5) $$p(a^n) = 1/n, \text{ cosicché } \lim p(a^n) = 0.$$

[2] È l'assunzione che sta sotto la derivazione di Laplace della sua famosa «regola di successione»; ecco perché la chiamo «distribuzione laplaciana». Si tratta di un'assunzione adeguata se il nostro problema è quello di *puro e semplice campionamento*; sembra inadeguata se quello che ci interessa è (come nel caso di Laplace) una successione di eventi individuali. Cfr. anche appendice *IX, punti 7 sgg. della mia Terza nota; e la nota 10 all'appendice *VIII.

Anche se, dal punto di vista di una derivazione della 1), la formula 5) è molto piú debole che non la 4^c), essa ci permette tuttavia di derivare la 1), e ci permette di derivarla senza identificare i casi osservati coi casi favorevoli, o assumere che il numero dei casi osservati sia finito.

Un'argomentazione molto simile, che conduce alla 1), potrebbe essere la seguente. Possiamo considerare il fatto che ogni legge universale *a implica logicamente* [*entails*] (ed è perciò almeno tanto egualmente probabile quanto) un'ipotesi statistica *h* della forma «$p(x, y) = 1$», e che la probabilità assoluta di *h* può essere calcolata con l'aiuto della distribuzione laplaciana, col risultato di $p(h) = 0$. (Cfr. appendice *IX, Terza nota, specialmente *13). Ma poiché *a* implica logicamente *h*, ciò porta a $p(a) = 0$, cioè a dire, alla 1).

A me sembra che questa prova sia la piú semplice e la piú convincente: rende possibile sostenere la 4) *e* la 5) assumendo che la 4) valga per *a* e la 5) per *h*.

Finora le nostre considerazioni erano basate sulla definizione classica di probabilità. Ma arriveremo allo stesso risultato se in sua vece adotteremo, come nostra base, l'interpretazione logica del calcolo formale della probabilità. In questo caso il problema diventa un problema di dipendenza o di indipendenza delle asserzioni.

Se consideriamo di nuovo *a* come il prodotto logico delle asserzioni singolari $a_1, a_2, \ldots$, allora la sola assunzione ragionevole sembra essere che, in assenza di una qualsiasi informazione (che non sia tautologica) dobbiamo considerare tutte queste asserzioni singolari come reciprocamente *indipendenti*, cosicché a_i possa essere seguita da a_j o dalla sua negazione $\bar{a}_j$, con le probabilità

$$p(a_j, a_i) = p(a_j)$$
$$p(\bar{a}_j, a_i) = p(\bar{a}_j) = 1 - p(a_j).$$

Ogni altra assunzione equivarrebbe a postulare *ad hoc* una specie di retroeffetto; o, in altre parole, a postulare che esista qualcosa come una connessione causale tra a_i e a_j. Ma è ovvio che questa sarebbe un'assunzione non-logica, sintetica, che dovrebbe essere formulata come un'ipotesi. Per questa ragione non può far parte di una teoria puramente logica della probabilità.

Lo stesso punto può essere formulato, in modo un po' differente, cosí: in presenza di qualche ipotesi, poniamo h, possiamo naturalmente avere

6) $$p(a_j, a_i h) > p(a_j, h).$$

Infatti h può informarci dell'esistenza di una specie di retroeffetto. Di conseguenza, dovremmo allora avere:

7) $$p(a_i a_j, h) > p(a_i, h)\, p(a_j, h),$$

dal momento che la 7) è equivalente alla 6). Ma in assenza di h, o se h è una tautologia, o, in altre parole, se quello che ci interessa sono le probabilità logiche assolute, allora la 7) dovrà essere sostituita da

8) $$p(a_i a_j) = p(a_i) p(a_j)$$

che significa che a_i e a_j sono *indipendenti*, ed è equivalente a

9) $$p(a_j, a_i) = p(a_j).$$

Ma l'assunzione dell'indipendenza reciproca conduce, insieme con $p(a_i) < 1$, a $p(a) = 0$, come prima; cioè a dire, conduce alla 1).

Dunque la 8), cioè l'assunzione dell'indipendenza reciproca delle asserzioni singolari, a_i, conduce alla 1); e soprattutto per questa ragione alcuni autori hanno, direttamente o indirettamente, rifiutato la 8). L'argomentazione è stata, invariabilmente, che la 8) dev'essere falsa, perché, se fosse vera, *non potremmo imparare dall'esperienza*: la conoscenza empirica sarebbe impossibile. Ma ciò è scorretto: possiamo imparare dall'esperienza anche se $p(a) = p(a, b) = 0$; ad esempio, $C(a, b)$ – cioè a dire, il grado di corroborazione di a per mezzo dei controlli b – può nondimeno accrescersi con nuovi controlli (cfr. appendice *IX). Cosí quest'argomentazione «trascendentale» fallisce il suo bersaglio; ad ogni modo, non colpisce la mia teoria[3].

[3] Un'argomentazione che faccia appello al fatto che possediamo conoscenza, o che possiamo imparare dall'esperienza, o concluda da questo fatto che la conoscenza o l'apprendere dall'esperienza devono essere possibili; e concluda inoltre che ogni teoria, che implichi logicamente l'impossibilità della conoscenza o dell'imparare dall'esperienza, dev'essere falsa, si può chiamare «argomentazione trascendentale». (Questa è un'allusione a Kant). Io

Ma prendiamo ora in considerazione il punto di vista secondo cui la 8) è falsa, o, in altre parole, che

$$p(a_i a_j) > p(a_i)\, p(a_j)$$

è valida, e di conseguenza è valida

$$p(a_j, a_i) > p(a_j),$$

e anche la seguente:

$$^{+}) \qquad p(a_n, a_1 a_2 \dots a_{n-1}) > p(a_n).$$

Questa teoria asserisce che, una volta che si sia trovato che qualche k_i possiede la proprietà A, la probabilità che un altro k_j possegga la stessa proprietà cresce; e cresce ancor di piú, se abbiamo trovato la proprietà in questione in un certo numero di casi. O, per dirla con le parole di Hume, $^{+}$) asserisce «*che quei casi*» (ad esempio, k_n) «*di cui non abbiamo avuto alcuna esperienza, somiglieranno probabilmente a quelli di cui abbiamo avuto esperienza*».

La citazione, eccettuata la parola «probabilmente», è presa dalla critica di Hume all'induzione[4]. E la critica di Hume vale pienamente nel caso di $^{+}$) o della sua formulazione in parole, che abbiamo scritto in corsivo. Infatti, ragiona Hume, «*anche dopo aver osservato la frequente e costante congiunzione di oggetti, non abbiamo nessuna ragione per trarre inferenze riguardanti qualsiasi oggetto oltre quelli di cui abbiamo avuto esperienza*»[5]. Se qualcuno dovesse suggerire che la nostra esperienza ci autorizza a trarre inferenze da oggetti os-

credo che un'argomentazione trascendentale possa davvero essere valida se usata criticamente contro una teoria che implichi logicamente l'impossibilità della conoscenza o dell'imparare dall'esperienza. Ma bisogna andare molto cauti nell'usarla. La conoscenza empirica, *in qualche senso* della parola «conoscenza», esiste. Ma in altri sensi – ad esempio, nel senso di conoscenza *certa* o di conoscenza *dimostrabile* – non esiste. E non dobbiamo assumere acriticamente di avere conoscenza «probabile» («probabile», cioè, nel senso del calcolo della probabilità). In realtà, io sostengo che non abbiamo conoscenza probabile in questo senso. Io credo, infatti, che quella che possiamo chiamare «conoscenza empirica», compresa la «conoscenza scientifica», consista di tentativi di indovinare, e che molti di questi tentativi non sono probabili (ossia hanno probabilità zero), anche se può darsi che siano molto ben corroborati. Cfr. anche *Postscript* §§ *28 e *32.

[4] *A Treatise of Human Nature* cit., libro I, parte III, § VI (il corsivo è di Hume). Cfr. anche *Postscript* cit., § *2, nota 1 e § *50, nota 2.

[5] *A Treatise of Human Nature* cit., § XII. (Il corsivo è di Hume). La citazione successiva dal § VI.

servati a oggetti inosservati, allora, dice Hume, «io riproporrei la mia domanda: *perché da quest'esperienza formiamo conclusioni che vanno oltre quegli esempi passati di cui abbiamo avuto esperienza?*». In altre parole, Hume mette in evidenza che quando facciamo appello all'esperienza allo scopo di giustificare *una qualsiasi* conclusione riguardante casi non osservati – *anche pure e semplici conclusioni probabili*, aggiunge nel suo *Abstract* – ci troviamo coinvolti in un regresso all'infinito. Nell'*Abstract* leggiamo infatti: «È evidente che Adamo, nonostante tutta la sua scienza, non sarebbe mai stato in grado di *dimostrare* che il corso della natura deve continuare ad essere, in modo uniforme, il medesimo... Anzi, vado ancora piú in là, e asserisco che neppure con argomentazioni *probabili* poteva provare che il futuro dev'essere conforme al passato. Tutte le argomentazioni probabili sono costruite sul presupposto che c'è conformità tra il futuro e il passato, e perciò non possono mai provarlo»[6]. Dunque, la $^{+}$) non è giustificabile in base all'esperienza; tuttavia, per essere logicamente valida, dovrebbe avere il carattere di una tautologia, valida in ogni universo logicamente possibile. Ma è chiaro che le cose non stanno cosí.

Dunque, la $^{+}$), se fosse vera, dovrebbe avere il carattere di un *principio d'induzione sintetico a priori*, e non quello di un'asserzione analitica, o logica. Ma non è affatto sufficiente, neppure come principio d'induzione. Infatti la $^{+}$) può essere vera e cionondimeno $p(a) = 0$ può essere valida. (Un esempio di teoria che accetta $^{+}$) – che, come abbiamo visto, dev'essere sintetica – come valida a priori, e nel medesimo tempo accetta $p(a) = 0$, è dato dalla teoria di Carnap[7]).

[6] Cfr. *An Abstract of a Book Lately Published, Entitled A Treatise of Human Nature* cit., p. 15. Cfr. § 81, nota 2. (Il corsivo è di Hume).

[7] L'esigenza fatta valere da Carnap, che la sua «lambda» (che come ho mostrato è la reciproca di una misura di dipendenza) debba essere finita, implica logicamente la nostra $^{+}$); cfr., di CARNAP, *The Continuum of Inductive Methods* [Il continuo dei metodi induttivi], 1952. Nondimeno Carnap accetta $p(a) = 0$, che secondo Jeffreys, implicherebbe logicamente l'impossibilità di imparare dall'esperienza. E tuttavia Carnap basa la sua esigenza che «lambda» debba essere finita, e cosí che $^{+}$) sia valida, esattamente sulla stessa argomentazione trascendentale alla quale fa appello Jeffreys: che senza di essa non potremmo imparare dall'esperienza. Cfr. il suo *Logical Foundations of Probability* cit., p. 565 e il mio contributo al volume dedicato a Carnap, della Library of Living Philosophers, a cura di P. A. Schilpp, specialmente la nota 87. Questo contributo si trova ora in *Conjectures and Refutations* cit.

Un efficace principio probabilistico dell'induzione dovrebbe essere ancora piú forte di +). Tale principio dovrebbe permetterci, almeno, di concludere che per qualche prova singola appropriata, b, possiamo ottenere $p(a, b) > \frac{1}{2}$, o, in parole, che accumulando prove in suo favore, a può essere resa piú probabile della sua negazione. Ma ciò è possibile soltanto se la 1) è falsa, cioè a dire se abbiamo $p(a) > 0$.

Una prova piú diretta della falsità della +) e una prova della 2) si possono ottenere da un'argomentazione che Jeffreys ci offre nella sua *Theory of Probability*, § 1.6[8]. Jeffreys discute una formula che designa col numero 3) e che nel nostro simbolismo equivale all'asserzione che, purché sia $p(b_i, a) = 1$ per ogni $i \leq n$, cosicché $p(ab^n) = p(a)$, deve valere la seguente formula:

$$10) \quad p(a, b^n) = p(a)/p(b^n) = \\ = p(a)/p(b_1)\, p(b_2, b^1) \dots p(b_n, b^{n-1}).$$

Discutendo questa formula, Jeffreys dice (ancora una volta uso i miei simboli in luogo dei suoi): «Dunque, con un numero sufficiente di verificazioni, deve accadere una di queste tre cose: 1) La probabilità di a, in base alle informazioni disponibili, è maggiore di 1. 2) È sempre 0. 3) $p(b_n, b^{n-1})$ tenderà a 1». A queste parole aggiunge che il caso 1) è impossibile (banalmente impossibile), cosicché rimangono soltanto 2) e 3). Ora io dico che l'assunzione che per qualche oscura ragione logica il caso 3) valga universalmente (e se dev'essere usato nell'induzione deve valere universalmente, e in realtà, a priori) può essere facilmente confutata. Infatti, la sola condizione di cui ci sia bisogno per derivare la 10), lasciando da parte $0 < p(b_i) < 1$, è che *esiste* qualche asserzione a, tale che $p(b^n, a) = 1$. Ma questa condizione può *sempre* essere soddisfatta, per qualsiasi sequenza di asserzioni, b_i. Si assuma, infatti, che b_i siano i resoconti sui lanci di una moneta; allora è sempre possibile costruire una legge universale a che implica logicamente i rapporti su tutti gli $n-1$ lanci della moneta osservati, e che ci permette di predire tutti gli ulteriori lanci della moneta (anche se probabilmente in modo

[8] Traduco i simboli di Jeffreys nei miei, tralasciando la sua H, perché nulla nell'argomentazione ci impedisce dal considerarla o tautologica o almeno irrilevante; in ogni caso, la mia argomentazione può facilmente essere riformulata senza omettere l'H di Jeffreys.

scorretto)[9]. Dunque la legge richiesta, a, esiste sempre, ed esiste sempre anche un'altra legge, a', che dà luogo agli stessi primi $n-1$ risultati, ma per l'n-esimo lancio predice il risultato opposto. Sarebbe perciò paradossale accettare il caso 3) di Jeffreys, dal momento che per un n sufficientemente grande otterremmo sempre $p(\bar{b}_n, b^{n-1})$ prossimo ad 1, e anche (per l'altra legge, a') $p(b_n, b^{n-1})$ prossimo ad 1. Di conseguenza, il ragionamento di Jeffreys, a cui dal punto di vista matematico è impossibile sfuggire, si può usare per provare il suo caso 2), che, si dà il caso, coincide con la mia formula 2), come è stata formulata all'inizio di quest'appendice[10].

Possiamo riassumere la nostra critica di $^+$) nel modo che segue. Alcuni credono che, per ragioni puramente logiche, la probabilità che la prossima cosa che incontreremo sia rossa sarà aumentata dal numero di cose rosse che abbiamo visto in passato. Ma questa è una credenza nella magía: nella magía del linguaggio umano. Infatti «rosso» è semplicemente un predicato: e ci saranno sempre predicati A e B che convengono entrambi alle cose che abbiamo finora osservato, ma, per quanto riguarda la prossima cosa che incontreremo, conducono a predizioni probabilistiche incompatibili. Può darsi che questi predicati non compaiano nei linguaggi ordinari, tuttavia essi possono sempre essere costruiti. (Abbastanza stranamente, la credenza magica che io critico qui, si trova fra coloro che costruiscono linguaggi artificiali e non fra gli analisti del linguaggio ordinario). Criticando in questo modo la $^+$) io difendo, naturalmente, il principio dell'*indipendenza* (logica assoluta) delle varie a_n da qualsiasi combinazione $a_i a_j$ ...; cioè a dire, le mie critiche equivalgono a una difesa della 4) e della 1).

[9] Si noti che nelle condizioni sotto le quali viene derivata la 10) non c'è nulla che imponga che b_i abbia la forma «$B(k_i)$», con un predicato comune «B», e perciò nulla che ci impedisca di assumere che b_i = «k_i è testa» e b_j = «k_j è croce». Nondimeno, possiamo costruire un predicato «B» in modo che ogni b_i abbia la forma «$B(k_i)$»: possiamo definire «B» come «avente la proprietà testa o croce, rispettivamente, se e solo se l'elemento corrispondente della sequenza determinata dalla legge matematica a è 0 o 1, rispettivamente». (Si può osservare che un predicato come questo può essere definito solo rispetto a un universo di individui che siano *ordinati* o che possano essere *ordinati*; ma questo è, naturalmente, il solo caso che ci interessi, se pensiamo ad applicazioni ai problemi della scienza. Cfr. la mia prefazione del 1958, e § *49, nota 2 del *Postscript*).

[10] Lo stesso Jeffreys trae la conclusione opposta: adotta come valida la possibilità asserita nel caso 3).

Ci sono ulteriori prove della 1). Una di queste, che fondamentalmente è dovuta a un'idea di Jeffreys e Wrinch [11] sarà discussa piú a fondo nell'appendice *VIII. La sua idea principale può essere espressa (con qualche leggera modificazione) nel modo che segue.

Supponiamo che *e* sia un *explicandum*, o, piú precisamente, un insieme di fatti singolari o dati che desideriamo spiegare con l'aiuto di una legge universale. Ci sarà, in generale, un numero infinito di spiegazioni possibili – e addirittura un numero infinito di spiegazioni (che *si escludono* a vicenda, dati i dati *e*) – tali che la somma delle loro probabilità (data *e*) non può essere maggiore dell'unità. Ma ciò significa che la probabilità di quasi tutte le spiegazioni in parola dev'essere zero, a meno che non possiamo ordinare le possibili leggi in una sequenza infinita, in modo da poter attribuire a ciascuna di esse una probabilità positiva cosicché la loro somma converga e non superi l'unità. E significa, inoltre, che alle leggi che compaiono per prime in questa sequenza si deve (in generale) attribuire una probabilità maggiore che non alle leggi che, nella sequenza, compaiono piú tardi. Dovremmo perciò assicurarci che sia soddisfatta l'importante *condizione di non-contraddittorietà* che segue:

Il nostro metodo per ordinare le leggi non deve mai porre una legge prima di un'altra, se è possibile provare che la probabilità di quest'ultima legge è maggiore della probabilità della prima.

Jeffreys e Wrinch avevano qualche ragione intuitiva per credere che fosse possibile trovare un metodo per ordinare le leggi che soddisfacesse la condizione di non-contraddittorietà: proponevano di ordinare le teorie esplicative secondo la loro semplicità decrescente («postulato della semplicità») o secondo la loro complessità crescente, misurando la complessità mediante il numero dei parametri adattabili della legge. Ma si può mostrare (e lo si mostrerà nell'appendice *VIII) che questo metodo per ordinare, cosí come qualsiasi altro metodo possibile, viola la condizione di non-contraddittorietà.

Otteniamo cosí $p(a, e) = 0$ per tutte le ipotesi esplicative,

[11] «Philos. Magazine», 42 (1921), pp. 369 sgg.

quali che possano essere i dati *e*; cioè a dire: otteniamo la 2) e perciò, indirettamente, la 1).

Un aspetto interessante di quest'ultima prova è dato dal fatto che essa è valida anche in un universo finito, purché le nostre ipotesi esplicative siano formulate in un linguaggio matematico che ci permetta un'infinità di ipotesi (che si escludono a vicenda). Ad esempio, possiamo costruire il seguente universo [12]. Su una scacchiera molto estesa qualcuno dispone piccoli dischi o pedine di dama, secondo la regola seguente: c'è una funzione matematica definita, ossia una curva, nota a lui ma non a noi, e le pedine possono essere messe soltanto su quadratini che giacciono sulla curva; entro i limiti definiti da questa regola, i pezzi possono essere disposti a casaccio. Il nostro compito consiste nell'osservarlo mentre dispone i pezzi e nel trovare, se ci è possibile, una «teoria esplicativa», cioè a dire la curva matematica ignota o una curva molto vicina ad essa. È chiaro che ci sarà un'infinità di soluzioni possibili, che sono matematicamente incompatibili, anche se relativamente ai pezzi posti sulla scacchiera alcune di queste soluzioni non si potranno distinguere tra loro. Naturalmente, qualunque di queste teorie può essere «confutata» da dischi posti sulla scacchiera dopo che la teoria è stata enunciata. Pur potendosi scegliere che l'«universo» delle posizioni possibili dei pezzi sulla scacchiera sia un universo finito, esisteranno nondimeno infinite teorie esplicative matematicamente incompatibili. Naturalmente mi rendo conto che gli strumentalisti o gli operazionalisti potrebbero dire che le differenze fra due teorie qualsiasi che determinano gli stessi quadrati, sono «prive di significato». Ma lasciando da parte il fatto che *quest'esempio non forma parte della mia argomentazione* – cosicché non ho affatto bisogno di replicare a quest'obiezione – si dovrebbe notare quello che segue. In molti casi sarà possibile dare «significato» a queste differenze «insignificanti», rendendo la nostra maglia sufficientemente sottile, cioè a dire, suddividendo i nostri quadrati).

La discussione dettagliata del fatto che la mia condizione di non-contraddittorietà non può essere soddisfatta, si trove-

[12] Un esempio simile è usato nell'appendice *VIII, testo relativo alla nota 2.

rà nell'appendice *VIII. Abbandonerò ora il problema della validità delle formule 1) e 2) allo scopo di procedere alla discussione di un problema formale che sorge dal fatto che queste formule sono valide, cosicché tutte le teorie universali – quali che sia il loro contenuto – hanno probabilità zero.

Non può esserci alcun dubbio che il contenuto, o la forza logica, di una teoria universale può differire molto da quello di un'altra teoria universale. Si prendano le due leggi: $a_1 =$ = «Tutti i pianeti si muovono secondo cerchi», e $a_2 =$ «Tutti i pianeti si muovono secondo ellissi». Per il fatto che tutti i cerchi sono ellissi (con eccentricità zero), a_1 implica logicamente [*entails*] a_2, ma non viceversa. Il contenuto di a_1 è di gran lunga maggiore del contenuto di a_2. (Naturalmente ci sono teorie diverse e logicamente piú forti di a_1; ad esempio: «Tutti i pianeti si muovono in cerchi concentrici intorno al Sole»).

Il fatto che il contenuto di a_1 supera il contenuto di a_2 è del massimo significato per tutti i nostri problemi. Ad esempio, ci sono *controlli* di a_1 – cioè a dire, tentativi di confutare a_1 scoprendo qualche deviazione dalla traiettoria circolare – che non sono controlli di a_2; ma non potrebbe esistere nessun controllo genuino di a_2 che non fosse, al medesimo tempo, un tentativo di confutare a_1. Cosí a_1 può essere controllata piú severamente di a_2; ha un grado di controllabilità maggiore e, se resiste a controlli piú severi, raggiungerà un grado di corroborazione piú alto di quello che può raggiungere a_2.

Relazioni simili possono valere fra due teorie, a_1 e a_2, anche se a_1 non implica logicamente a_2, ma implica logicamente, in sua vece, una teoria della quale a_2 è un'ottima approssimazione. (Cosí, a_1 può essere la dinamica di Newton e a_2 le leggi di Keplero, che non seguono dalla teoria di Newton, ma semplicemente ne «seguono con buona approssimazione»; cfr. anche § *15 del mio *Postscript*). Anche qui, la teoria di Newton è meglio controllabile, perché il suo contenuto è maggiore[13].

[13] Qualunque cosa C. G. Hempel possa intendere con «prova confermante» di una teoria, è chiaro che non può intendere il risultato di controlli

Ora, la nostra prova della 1) mostra che queste differenze in contenuto e in controllabilità non possono essere espresse immediatamente nei termini della probabilità logica assoluta delle teorie a_1 e a_2, poiché $p(a_1) = p(a_2) = 0$. E se, come suggerisco nel mio libro, definiamo una misura del contenuto, $C(a)$, mediante $C(a) = 1-p(a)$, otteniamo di nuovo $C(a_1) = C(a_2)$, cosicché le differenze di contenuto che ci interessano in questa sede non risultano espresse da queste misure. (Analogamente, la differenza fra un'asserzione autocontraddittoria $a\bar{a}$ e una teoria universale a, resta inespressa, dal momento che $p(a\bar{a}) = p(a) = 0$, e $C(a\bar{a}) = 1$)[14].

che corroborano la teoria. Infatti, nei suoi articoli sull'argomento («Journal of Symbolic Logic», 8, 1943, pp. 122 sgg., e specialmente «Mind», 54, 1945, pp. 1 sgg. e 97 sgg.; 55, 1946, pp. 79 sgg.), enuncia («Mind», 54, pp. 102 sgg.) tra le sue condizioni di adeguatezza la condizione seguente (8.3): se e è una prova confermante di parecchie ipotesi, poniamo h_1 e h_2, allora h_1, h_2 ed e devono formare un insieme non-contraddittorio di asserzioni.

Ma i casi piú tipici e interessanti parlano in sfavore di ciò. Supponiamo che h_1 e h_2 siano le teorie della gravitazione di Einstein e di Newton. Esse conducono a risultati incompatibili per quanto riguarda i forti campi gravitazionali e i corpi animati da grande velocità e perciò si contraddicono a vicenda. E tuttavia tutte le prove note in favore della teoria di Newton sono anche prove in favore della teoria di Einstein, e corroborano entrambe le teorie. La situazione è molto simile per le teorie di Newton e di Keplero, o di Newton e di Galileo. (Allo stesso modo, tutti i tentativi falliti di trovare un cigno rosso o un cigno bianco, corroborano tutte e due le teorie seguenti, che si contraddicono l'una con l'altra, in presenza dell'asserzione «Esiste qualche cigno»: I) «Tutti i cigni sono bianchi» e II) «Tutti i cigni sono neri»).

Molto generalmente, supponiamo che ci sia un'ipotesi h, corroborata dal risultato e di severi controlli, e supponiamo che h_1 e h_2 siano due teorie incompatibili, ciascuna delle quali implica logicamente h. (h_1 sia ah e h_2 $\bar{a}h$). Allora ogni controllo di h è un controllo sia di h_1 sia di h_2, perché ogni confutazione riuscita di h confuterebbe sia h_1 sia h_2. (Ma, naturalmente, per decidere fra h_1 e h_2 andremo in cerca di controlli cruciali). Naturalmente con «verificazioni» e «esemplificazioni» le cose vanno altrimenti. Ma non necessariamente «verificazioni» e «esemplificazioni» hanno qualcosa da fare coi *controlli*.

Tuttavia, lasciando da parte questa critica, si dovrebbe osservare che nel linguaggio modello di Hempel non si può esprimere l'identità; si veda il suo articolo sul «Journal of Symbolic Logic», 8 (1943) l'ultimo capoverso di p. 143 (riga 5 dal basso) e la mia prefazione del 1958, p. XXVIII. Per una «semplice» («semantica») *definizione di esemplificazione* cfr. l'ultima nota del mio articolo in «Mind», 64 (1955), p. 391.

[14] Che un'asserzione autocontraddittoria possa avere la stessa probabilità di un'asserzione sintetica non-contraddittoria è *inevitabile in ogni teoria della probabilità* che venga applicata a un universo di discorso infinito: questa è una semplice conseguenza della legge della moltiplicazione, che esige che $p(a_1 a_2 \ldots a_n)$ tenda a zero purché tutte le a_i siano reciprocamente indipendenti. Dunque la probabilità di lanciare n «testa» successivamente è, secondo

Tutto ciò non significa che almeno in alcuni casi non possiamo esprimere la differenza di contenuto fra a_1 e a_2 in termini di probabilità. Ad esempio, il fatto che a_1 implica logicamente a_2, ma non viceversa, darebbe origine a

$$p(a_1, a_2) = 0; \quad p(a_2, a_1) = 1$$

anche se avessimo, nel medesimo tempo, $p(a_1) = p(a_2) = 0$.

Dunque dovremmo avere

$$p(a_1, a_2) < p(a_2, a_1)$$

che starebbe a indicare che il contenuto di a_1 è maggiore.

Il fatto che ci siano queste differenze di contenuto e di probabilità logica assoluta, che non possono essere espresse immediatamente dalle misure corrispondenti, si può esprimere dicendo che esiste una «*microstruttura*» di contenuto e di probabilità logica, che può permetterci di differenziare tra contenuti e probabilità logiche maggiori e minori, anche in casi in cui le misure $C(a)$ e $p(a)$ siano troppo grossolane e insensibili alle differenze; cioè anche nei casi in cui tali misure darebbero come risultato l'eguaglianza. Allo scopo di esprimere questa microstruttura, possiamo usare i simboli «$\succ$» («è piú alto») e «$\prec$» («è piú basso»), in luogo dei simboli ordinari «>» e «<». (Possiamo usare «$\succeq$» o: «è piú alto

tutte le teorie della probabilità $1/2^n$, e diventa zero se il numero dei lanci diventa infinito.

Un problema simile di teoria della probabilità è il seguente. Si mettano in un'urna n palle contrassegnate coi numeri da 1 a n, e le si mescolino. Qual è la probabilità di estrarre una palla contrassegnata con un numero primo? La ben nota soluzione di questo problema, come quella del problema precedente, tende a zero quando n tende all'infinito; ciò significa che la probabilità di estrarre una palla contrassegnata da un numero divisibile diventa 1 per $n \to \infty$, anche se nell'urna c'è un numero infinito di palle contrassegnate con un numero non-divisibile. Questo risultato dev'essere lo stesso in *ogni* teoria adeguata della probabilità. Pertanto non si deve enucleare una particolare teoria della probabilità, quale la teoria frequenziale, e criticarla come «almeno leggermente paradossale», perché fornisce questo risultato perfettamente corretto. (Una critica di questo genere si troverà in W. KNEALE, *Probability and Induction* [Probabilità e induzione], 1949, p. 156). A proposito del nostro ultimo «problema della teoria della probabilità» – quello di estrarre palle numerate – l'attacco di Jeffreys contro coloro che parlano della «distribuzione di probabilità dei numeri primi» mi sembra egualmente infondato. (Cfr. *Theory of Probability* cit., 2ª ed., p. 38, in nota).

o egualmente alto», e «$\preceq$»). L'uso di questi simboli può essere spiegato dalle regole seguenti:

1) «$C(a) \succ C(b)$», e cosí pure il suo equivalente «$p(b) \prec p(a)$» si possono usare per asserire che il contenuto di a è maggiore di quello di b – *almeno* nel senso della microstruttura del contenuto. Assumeremo dunque che $C(a) \succ C(b)$ implichi logicamente $C(a) \succeq C(b)$ e che questa formula, a sua volta, implichi logicamente $C(a) \geq C(b)$, cioè a dire, la falsità di $C(a) < C(b)$. Non vale nessuna delle implicazioni [*entailments*] nel senso opposto.

2) $C(a) \succeq C(b)$ e $C(a) \preceq C(b)$, insieme, implicano logicamente $C(a) = C(b)$, ma $C(a) = C(b)$ è compatibile con $C(a) \succ C(b)$, o con $C(a) \prec C(b)$ e, naturalmente, anche con $C(a) \succeq C(b)$ e con $C(a) \preceq C(b)$.

3) $C(a) > C(b)$ implica logicamente sempre $C(a) \succ C(b)$.

4) Regole corrispondenti varranno per $p(a) \succ p(b)$, ecc.

Sorge ora il problema di determinare i casi in cui possiamo dire che $C(a) \succ C(b)$ sussiste, anche quando si abbia $C(a) = C(b)$. Un certo numero di casi sono sufficientemente chiari: ad esempio, l'implicazione logica [*entailment*] unilaterale di b da parte di a. Piú in generale, suggerisco la regola seguente:

Se per tutti gli universi *finiti* sufficientemente grandi (cioè, per tutti gli universi con piú di N membri, per un N sufficientemente grande) abbiamo $C(a) > C(b)$ e dunque, d'accordo con la regola 3), $C(a) \succ C(b)$, manteniamo $C(a) \succ C(b)$ per un universo infinito, anche se, per un universo infinito, otteniamo $C(a) = C(b)$.

Questa regola sembra coprire la maggior parte dei casi che presentano qualche interesse, anche se, forse, non li copre tutti [15].

[15] Problemi imparentati con questo sono discussi, abbastanza dettagliatamente, nell'articolo estremamente stimolante di J. G. KEMENY, *A Logical Measure Function* [Una funzione di misura logica], in «Journal of Symbolic Logic», 18 (1953), pp. 289 sgg. Il linguaggio modello di Kemeny è il secondo dei tre linguaggi ai quali faccio allusione nella mia seconda prefazione. Secondo me, è di gran lunga il piú interessante dei tre. Tuttavia, come Kemeny mostra a p. 294, il suo linguaggio è tale che in esso non possono non essere indimostrabili teoremi infinitistici (quali il principio che ogni numero ha un successore). Esso perciò non può contenere il sistema dell'aritmetica ordinaria.

È chiaro che il problema di a_1 = «Tutti i pianeti si muovono secondo cerchi» e di a_2 = «Tutti i pianeti si muovono secondo ellissi» è coperto dalla nostra regola, ed è pure coperto dalla regola il caso in cui si mettano a confronto a_1 e a_3 = «Tutti i pianeti si muovono secondo ellissi aventi un'eccentricità diversa da zero»; infatti $p(a_3) > p(a_1)$ varrà in tutti gli universi finiti sufficientemente grandi (negli universi, poniamo, delle osservazioni possibili) nel semplice senso che le possibilità compatibili con a_3 sono di piú di quelle compatibili con a_1.

La microstruttura di contenuto e di probabilità, discussa in queste pagine, non riguarda soltanto i limiti, 0 e 1, dell'intervallo di probabilità, ma riguarda in linea di principio tutte le probabilità comprese tra 0 e 1. Supponiamo infatti che a_1 e a_2 siano leggi universali con $p(a_2) = 0$ e $p(a_1) \prec p(a_2)$, come prima; supponiamo che b non sia implicata logicamente nè da a_1 né da a_2, né dalle loro negazioni; e supponiamo che $0 < p(b) = r < 1$. Avremo allora

$$p(a_1 \vee b) = p(a_2 \vee b) = r$$

e nel medesimo tempo

$$p(a_1 \vee b) \prec p(a_2 \vee b).$$

Analogamente avremo

$$p(\bar{a}_1 b) = p(\bar{a}_2 b) = r$$

e nel medesimo tempo

$$p(\bar{a}_1 b) \succ p(\bar{a}_2 b),$$

dal momento che $p(\bar{a}_1) \succ p(\bar{a}_2)$, anche se, naturalmente, $p(\bar{a}_1) = p(\bar{a}_2) = 1$. Dunque, per ogni b tale che $p(b) = r$, possiamo avere una c_1 tale che $p(c_1) = p(b)$ e $p(c_1) \prec p(b)$, e anche una c_2 tale che $p(c_2) = p(b)$ e $p(c_2) \succ p(b)$.

La situazione discussa qui è importante per il trattamento della *semplicità o dimensione di una teoria*. Questo problema sarà ulteriormente discusso nella prossima appendice.

Appendice *VIII

Contenuto, semplicità e dimensione

Come ho indicato nel libro[1], io non credo che si debbano creare ostacoli all'uso del linguaggio scientifico impedendo allo scienziato di impiegare liberamente, ogni volta che gli conviene, nuove idee, predicati, concetti «occulti», o qualunque altra cosa. Per questa ragione non posso dichiararmi d'accordo con i vari tentativi compiuti recentemente per introdurre nella filosofia della scienza il metodo dei calcoli artificiali o «sistemi linguistici», che dovrebbero essere modelli di un «linguaggio della scienza» semplificato. Credo che finora questi tentativi siano stati, non soltanto inutili, ma abbiano addirittura contribuito all'oscurità e alla confusione predominanti nella filosofia della scienza.

Nel § 38 e nell'appendice I ho spiegato brevemente che, se avessimo a nostra disposizione asserzioni (assolutamente) atomiche – o, il che è lo stesso, *predicati* (assolutamente) *atomici* – potremmo introdurre, come misura del *contenuto* di una teoria, il reciproco del minimo numero di *asserzioni atomiche* richiesto per confutare quella teoria. Infatti, poiché il grado di contenuto di una teoria è lo stesso che il grado di controllabilità o di confutabilità della teoria stessa, la teoria che fosse confutabile da un numero minore di asserzioni atomiche sarebbe anche la teoria piú facilmente confutabile, o controllabile, e dunque la teoria dotata del contenuto piú grande. (In breve, quanto piú piccolo è il numero di asserzioni atomiche di cui c'è bisogno per comporre un falsificatore potenziale, tanto piú grande sarà il contenuto della teoria).

Ma io non voglio operare né con la finzione delle asserzio-

[1] Cfr. § 38, specialmente il testo che segue la nota 2 e l'appendice I; cfr. anche la mia prefazione del 1958.

ni atomiche né con un sistema linguistico artificiale in cui ci siano rese disponibili le asserzioni atomiche. Mi sembra infatti perfettamente chiaro che nella scienza non esistono predicati atomici «naturali» di cui possiamo disporre. Sembra che a qualcuno dei logici piú antichi i predicati «uomo» e «mortale» si siano presentati come esempi di qualcosa che somiglia ai predicati atomici. Carnap usa, come esempi, «blu» o «caldo», presumibilmente perché «uomo» e «mortale» sono idee estremamente complesse che (come può pensare qualcuno) possono essere definite in termini di idee piú semplici, quali appunto «blu» e «caldo». Tuttavia è caratteristico della discussione scientifica che né questi, né alcuno degli altri predicati siano trattati come predicati (assolutamente) atomici. Secondo il problema che si sta considerando, non soltanto «uomo» e «mortale», ma anche «blu» e «caldo» possono essere trattati come predicati altamente complessi; «blu», ad esempio, come il colore del cielo, che può essere esplicato nei termini della teoria atomica. Anche il termine fenomenico «blu» può essere trattato, in certi contesti, come definibile: come un carattere di immagini visive correlate con certi stimoli fisiologici. È caratteristico della discussione scientifica che essa proceda liberamente; e il tentativo di privarla della sua libertà incatenandola sul letto di Procuste di un sistema linguistico prestabilito segnerebbe, se avesse successo, la fine della scienza.

Per queste ragioni ho rifiutato in anticipo l'idea di usare asserzioni atomiche allo scopo di misurare il grado di *contenuto, o di semplicità*, di una teoria, e ho suggerito che si potesse usare, in sua vece, l'idea di asserzioni *relativamente atomiche*; e, inoltre, l'idea di *dominio di asserzioni* che sono relativamente atomiche rispetto a una teoria o a un insieme di teorie, al controllo delle quali siano rilevanti; di un dominio F che potrebbe essere interpretato come un *dominio di applicazione* della teoria o dell'insieme di teorie.

Se prendiamo di nuovo a nostro esempio, come nell'appendice precedente, le due teorie: a_1 = «Tutti i pianeti si muovono secondo cerchi» e a_2 = «Tutti i pianeti si muovono secondo ellissi», possiamo prendere, come nostro dominio, tutte le asserzioni della forma: «All'istante x il pianeta y era nella posizione z», che saranno le nostre asserzioni relativamente atomiche. E se assumiamo di sapere già che la traiettoria del pianeta è una curva piana, possiamo prendere una carta millimetrata che rappresenta il dominio e segnare su di essa le varie posizioni, registrando in ciascun caso il tempo e il nome del pianeta in questione, cosicché ciascuna registrazione rappresenti una delle asserzioni relativamente atomiche. (Naturalmente possiamo rendere la rappresentazione tridimensionale contrassegnando la posizione con uno spillo la cui lunghezza rappresenta il tempo, misurato a partire da qualche istante che si assume eguale a zero, mentre per indicare i nomi dei vari pianeti si potrebbero usare i diversi colori delle capocchie degli spilli).

Ho spiegato, soprattutto nei §§ 40-46 e nella mia vecchia appendice I, in che modo si potesse usare, come misura della complessità di una teoria, il numero minimo delle asserzioni relativamente atomiche necessarie per confutare una certa teoria. E ho fatto vedere che la *semplicità formale* di una teoria si può misurare mediante il *basso numero dei suoi parametri* nella misura in cui questo basso numero non è il risultato di una riduzione «formale» (invece che «materiale») del numero dei parametri (cfr. specialmente §§ 40, 44-45 e l'appendice I).

Ora tutti questi confronti fra la semplicità delle teorie o dei loro contenuti equivarranno, chiaramente, a confronti fra la «microstruttura» dei loro contenuti, nel senso spiegato nell'appendice precedente, perché le loro probabilità assolute saranno tutte eguali (saranno, cioè eguali a zero). E io desidero mostrare prima di tutto che il numero dei parametri di una teoria (rispetto a un dominio d'applicazione) può davvero essere interpretato come misurante la microstruttura del suo contenuto.

A questo scopo, devo far vedere che *per un universo finito sufficientemente grande, la teoria con il maggior numero di parametri sarà sempre piú probabile (nel senso classico) della teoria con il numero di parametri piú piccolo.*

Ciò si può mostrare nel modo seguente. Nel caso di un dominio di applicazioni geometrico continuo, il nostro universo di eventi possibili, ciascuno descritto da una possibile asserzione relativamente atomica è, naturalmente, infinito. Come si è mostrato nei §§ 38-39, in questo caso possiamo confrontare due teorie rispetto alla *dimensione*, piuttosto che rispetto al *numero*, delle possibilità che lasciano aperte; delle possibilità, cioè che sono ad esse favorevoli. La dimensione di queste possibilità si rivela eguale al numero dei parametri. Sostituiamo ora all'universo infinito delle asserzioni relativamente atomiche, un universo *finito* (anche se molto grande) di asserzioni relativamente atomiche, corrispondente all'esempio della scacchiera nell'appendice precedente[2]. Cioè a dire, assumiamo che ogni asserzione relativamente atomica si riferisca a un piccolo *quadrato* il cui lato ε è la posizione di un pianeta, e non ai punti del piano, e che le posizioni possibili non si sovrappongono[3]. In modo un poco diverso dall'esempio dell'appendice precedente, sostituiamo ora, alle varie *curve* che sono le rappresentazioni geometriche usuali delle nostre teorie, «quasi curve» (di larghezza approssimativamente eguale ad ε), cioè a dire, insiemi, o catene, di quadrati. Come risultato di tutto ciò, il numero delle possibili teorie diventa finito.

Consideriamo ora la rappresentazione di una teoria con *d* parametri, che nel caso continuo era rappresentata da un continuo *d*-dimensionale i cui punti (*d*-uple) rappresentavano ciascuno una curva. Troviamo che possiamo ancora usare una simile rappresentazione, salvo che al continuo *d*-dimensionale si sostituirà una disposizione *d*-dimensionale di «cubi» *d*-dimensionali (di lato ε). Ciascuno di questi piccoli cubi rappresenterà ora una «quasi curva», e dunque una delle possibilità favorevoli alla teoria; e la disposizione *d*-dimensionale rappresenterà l'insieme di tutte le «quasi curve» compatibili colla, o favorevoli alla, teoria.

Ma ora possiamo dire che la teoria con numero minore di parametri – cioè a dire, l'*insieme* di quasi curve che è rappresentato da una disposizione con numero piú basso di dimensioni – non soltanto avrà un numero piú basso di dimensioni, ma conterrà anche un numero minore di «cubi», cioè, di possibilità favorevoli.

[2] Cfr. appendice *VII, testo relativo alla nota 12.

[3] L'assunzione che le possibili posizioni non si sovrappongono si fa allo scopo di semplificare l'esposizione. Potremmo altrettanto bene assumere che due quadrati qualsiasi che giacciano nel medesimo intorno si sovrappongano parzialmente – diciamo, per un quarto della loro area; oppure potremmo sostituire ai quadrati cerchi che si sovrappongano (che si sovrappongano in modo da metterci in grado di coprire con essi l'intiera area). Quest'ultima assunzione sarebbe un po' piú vicina a un'interpretazione delle «posizioni» come di risultati mai assolutamente esatti delle possibili *misurazioni* delle posizioni.

Dunque siamo giustificati ad applicare i risultati del paragrafo precedente: se a_1 ha meno parametri di a_2, possiamo asserire che, in un universo sufficientemente grande ma finito, avremo

$$p(a_1) < p(a_2)$$

e perciò

$$*) \qquad p(a_1) \prec p(a_2).$$

Ma la formula *) rimane valida quando assumiamo che ε tenda a zero, il che, al limite, equivale a sostituire, all'universo finito, un universo infinito. Perveniamo, perciò, al seguente *teorema*.

1) Se il numero di parametri di a_1 è minore del numero di parametri di a_2, allora l'assunzione

$$p(a_1) > p(a_2)$$

contraddice le leggi del calcolo della probabilità.

Scrivendo «$d_F(a)$», o, piú semplicemente, «$d(a)$», per la dimensione della teoria a (rispetto al dominio d'applicazione F) possiamo formulare il nostro teorema nel modo seguente.

$$1) \qquad \text{Se } d(a_1) < d(a_2), \text{ allora } p(a_1) \prec p(a_2);$$

di conseguenza, «$p(a_1) > p(a_2)$» è incompatibile con «$d(a_1) < d(a_2)$».

Questo teorema (che è implicito in quello che abbiamo detto nel corpo del libro) va d'accordo con le considerazioni seguenti. Per essere confutata, una teoria a richiede un minimo di $d(a)+1$ asserzioni relativamente atomiche. Quelli che possiamo chiamare i suoi «*falsificatori piú deboli*» consistono di una congiunzione di $d(a)+1$ asserzioni relativamente atomiche. Ciò significa che, se $n \leq d(a)$, *nessuna* congiunzione di n asserzioni relativamente atomiche è logicamente abbastanza forte perché se ne possa derivare $\bar{a}$, cioè la negazione di a. Di conseguenza la forza o contenuto di $\bar{a}$ può essere misurata mediante $d(a)+1$, dal momento che a sarà piú forte di ogni congiunzione di $d(a)$ asserzioni relativamente atomiche, ma certamente non sarà piú forte di alcune congiunzioni di $d(a)+1$ asserzioni siffatte. Ma dalla regola di probabilità.

$$p(\bar{a}) = 1-p(a)$$

sappiamo che la probabilità di una teoria a decresce col crescere della probabilità della sua negazione $\bar{a}$ e viceversa, e che tra i contenuti di a e di $\bar{a}$ reggono le stesse relazioni. Da questo vediamo, di nuovo, che $d(a_1) < d(a_2)$ significa che il contenuto di a_1 è maggiore di quello di a_2, cosicché $d(a_1) < d(a_2)$ implica logicamente $p(a_1) \prec p(a_2)$, ed è dunque *incompatibile* con $p(a_1) > p(a_2)$. Ma questo risultato non è nient'altro che il teorema 1), derivato qui sopra.

Il nostro teorema è stato derivato considerando universi finiti, ed è in realtà perfettamente indipendente dalla transizione a universi infiniti. Esso è perciò indipendente dalle formule 1) e 2) dell'appendice precedente, cioè a dire, dal fatto che in un universo infinito abbiamo, per ogni legge universale a e per ogni prova finita e,

2) $$p(a) = p(a, e) = 0.$$

Possiamo perciò usare legittimamente la 1) per un'altra derivazione della 2); e questo si può davvero fare, se utilizziamo un'idea dovuta a Dorothy Wrinch e a Harold Jeffreys.

Come abbiamo brevemente indicato nell'appendice precedente[4], Wrinch e Jeffreys osservarono che, se abbiamo un numero infinito di teorie esplicative reciprocamente incompatibili, o esclusive, la somma delle probabilità di queste teorie non può essere maggiore dell'unità, cosí che quasi tutte queste probabilità devono essere zero, a meno che non ci sia possibile ordinare le teorie in una sequenza e assegnare, a ciascuna di esse, come sua probabilità, un valore preso da una sequenza convergente di frazioni la cui somma non sia maggiore di 1. Ad esempio, possiamo prendere le seguenti assegnazioni: possiamo assegnare il valore $1/2$ alla prima teoria, $1/2^2$ alla seconda, e, in generale, $1/2^n$ all'n-esima. Ma possiamo anche assegnare, a ciascuna delle prime 25 teorie, il valore $1/50$, cioè a dire, $1/(2 \cdot 25)$; a ciascuna delle successive 100, poniamo, il valore $1/400$, cioè a dire, $1/(2^2 \cdot 100)$, e cosí via.

[4] Cfr. appendice *VII, testo relativo alla nota 11.

Comunque possiamo costruire l'ordine delle teorie, e comunque possiamo assegnare loro le nostre probabilità, ci sarà sempre qualche valore di probabilità *piú grande*, poniamo P (quale $1/2$ nel nostro primo esempio, o $1/50$), e questo valore P sarà assegnato al massimo a n teorie (dove n è un numero finito e $n.P < 1$). Ciascuna di queste n teorie, alla quale è stata assegnata la probabilità massima P, ha una *dimensione*. Sia D la piú grande dimensione presente fra queste n teorie, e sia a_1 quella di tali teorie con $d(a_1) = D$. È chiaro allora che nessuna delle teorie con dimensioni maggiori di D sarà fra le nostre n teorie con probabilità massima. Sia a_2 una teoria con una dimensione maggiore di D, cosicché $d(a_2) > D = d(a_1)$. Allora l'assegnazione conduce a

–) $$d(a_1) < d(a_2); \text{ e } p(a_1) > p(a_2).$$

Questo risultato mostra che il nostro teorema 1) è violato. Ma un'assegnazione della specie descritta, che conduca a questo risultato, è inevitabile se vogliamo evitare di assegnare la medesima probabilità, cioè zero, a tutte le teorie. Di conseguenza il nostro teorema 1) implica logicamente l'assegnazione di probabilità zero a tutte le teorie.

Wrinch e Jeffreys, per parte loro, arrivarono a un risultato molto diverso. Essi credevano che la possibilità della conoscenza empirica richiedesse la possibilità di alzare la probabilità di una legge accumulando prove in suo favore. Da ciò conclusero che la 2) dev'essere falsa, e, inoltre, che doveva esistere un metodo legittimo per assegnare probabilità non-zero a una sequenza infinita di teorie esplicative. Cosí Wrinch e Jeffreys trassero conclusioni fortemente positive dall'argomentazione «trascendentale» (come l'ho chiamata nell'appendice precedente)[5]. Credendo, come credevano, che un accrescimento della probabilità significhi un accrescimento della conoscenza (cosicché l'ottenere un'alta probabilità diventa uno scopo della scienza) non presero in considerazione la possibilità che *possiamo imparare dall'esperienza una quantità sempre maggiore di cose intorno alle leggi universali, senza mai aumentarne la probabilità*, che possiamo

[5] Cfr. appendice *VII, nota 3.

controllare e corroborare alcune di queste leggi sempre meglio, aumentando cosí il loro *grado di corroborazione*, senza alterare la loro *probabilità*, il cui valore rimane zero.

Jeffreys e Wrinch non descrissero mai in modo sufficientemente chiaro la sequenza di teorie e l'assegnazione di valori di probabilità. La loro idea principale, chiamata il «postulato di semplicità»[6] era che le teorie dovrebbero essere ordinate in modo che la loro complessità, o numero di parametri, cresca, mentre le probabilità che essi assegnano alle teorie decresce; questo significherebbe, tra l'altro, che *due qualsiasi* teorie della sequenza violerebbero il nostro teorema 1). Ma, come osservò lo stesso Jeffreys, questo modo di ordinare le teorie non può essere realizzato completamente. Infatti possono esistere teorie con *lo stesso numero* di parametri. Jeffreys stesso dà, come esempi, $y=ax$ e $y=ax^2$, e dice, al loro proposito: «le leggi che contengono lo stesso numero di parametri si possono considerare aventi la stessa probabilità primaria»[7]. Ma il numero di leggi che hanno probabilità primaria è infinito, perché lo stesso esempio di Jeffreys può essere continuato all'infinito: $y = ax^3$, $y = ax^4$, ..., $y = ax^n$, e cosí via, per $n \to \infty$. Dunque, per ciascun numero di parametri lo stesso problema si ripresenterebbe per l'intera sequenza.

Inoltre proprio Jeffreys riconosce, nello stesso § 3.0[8], che una legge, poniamo a_1, può essere ottenuta da una legge a_2 con un parametro in piú, assumendo che quel parametro sia eguale a zero; e riconosce che in questo caso $p(a_1) < p(a_2)$, poiché a_1 è un *caso speciale* di a_2, cosí che ad a_1 appartiene un numero minore di possibilità[9]. Cosí, in questo caso speciale, riconosce che, d'accordo col nostro teorema 1), una teoria con un minor numero di parametri sarà meno probabile di una teoria con un numero maggiore di parametri. Ma ricono-

[6] Nella sua *Theory of Probability* cit., § 3.0, Jeffreys dice, del «postulato di semplicità», che «non è... un postulato separato, ma un'applicazione immediata della regola 5». Ma tutto ciò che la regola 5 contiene, quanto a riferimenti alla regola 4 (entrambe le regole sono formulate nel § 1.1), è una forma molto vaga del principio «trascendentale». Cosí, essa non ha nessuna influenza sulla nostra argomentazione.

[7] *Ibid.*, § 3.0 (1ª ed., p. 95; 2ª ed., p. 100).

[8] *Ibid.*, 1ª ed., p. 96; 2ª ed., p. 101.

[9] *Ibid.*, osserva che «metà della probabilità primaria [di a_2] è concentrata in $\alpha_{m+1} = 0$», il che sembra voler dire che $p(a_1) = p(a_2)/2$; ma se il numero dei parametri di a_2 è maggiore di 2, questa regola può condurre a contraddizioni.

sce questo fatto solo in questo caso speciale; e non commenta per nulla il fatto che tra il suo postulato di semplicità e questo caso potrebbe benissimo sorgere una contraddizione. Tutto considerato, non tenta mai di mostrare che il postulato di semplicità non contraddice al suo sistema d'assiomi; ma tenendo presente il caso speciale menzionato (che, naturalmente, segue dal suo sistema d'assiomi) sarebbe dovuto essere chiaro che c'era urgente bisogno d'una prova di non-contraddittorietà.

La nostra considerazione mostra che una prova di non-contraddittorietà non si può dare, e che il «postulato di semplicità» deve necessariamente contraddire ogni sistema d'assiomi adeguato per la probabilità; esso infatti deve violare il nostro teorema 1).

Nel concludere quest'appendice, desidero tentare qualcosa che somigli a una spiegazione del perché Wrinch e Jeffreys possano aver considerato il loro «postulato di semplicità» come inoffensivo, come incapace di creare guai.

Si dovrebbe tener presente che Wrinch e Jeffreys furono i primi a identificare la semplicità col basso numero di parametri. (Io non mi limito semplicemente a identificarli: distinguo tra una riduzione formale e una riduzione materiale del numero dei parametri – cfr. i §§ 40, 44, 45 – cosí che la semplicità intuitiva diventa simile alla semplicità formale; ma altrimenti la mia teoria della semplicità concorda, su questo punto, con quella di Wrinch e Jeffreys). Essi videro anche chiaramente che la semplicità è una delle cose a cui gli scienziati tendono: che gli scienziati preferiscono una teoria semplice a una teoria piú complicata, e che perciò tentano prima le teorie piú semplici. Su tutti questi punti Wrinch e Jeffreys avevano ragione. Avevano anche ragione quando credevano che ci sono relativamente poche teorie semplici, e molte teorie complesse, il cui numero cresce col numero dei loro parametri.

Quest'ultimo fatto può averli indotti a credere che le teorie complesse siano le meno probabili (perché la probabilità disponibile deve in qualche modo essere distribuita fra le varie teorie). E poiché assunsero anche che un alto grado di probabilità sia indicativo di un alto grado di conoscenza e sia perciò uno degli scopi a cui tendono gli scienziati, pensarono forse che fosse intuitivamente evidente che la teoria piú semplice (e perciò piú desiderabile) si debba identificare con la teoria piú probabile (e perciò piú desiderabile): in caso contrario lo scopo dello scienziato diventerebbe contraddittorio. Cosí il postulato della semplicità sembra necessario per ragioni intuitive, e perciò, a fortiori, non-contraddittorio.

Ma non appena ci rendiamo conto che lo scienziato non tende e non può tendere a un alto grado di probabilità, e che l'impressione opposta è dovuta al fatto che si scambia erroneamente l'idea intuitiva di probabilità con un'altra idea intuitiva (qui chiamata «grado di corroborazione»)[10], diventerà anche chiaro che la semplicità, o basso numero di parametri, è collegata con l'improbabilità piuttosto che con la probabilità, e tende a crescere col crescere dell'improbabilità. E cosí diventerà anche chiaro che un alto grado di semplicità è nondimeno legato con un alto grado di corroborazione. Infatti un alto grado di controllabilità o di corroborabilità è lo stesso che un'alta improbabilità primaria, o semplicità.

Il problema della corroborazione verrà discusso nell'appendice che segue.

[10] Nel punto 8 della mia Terza nota, ristampata nell'appendice *IX, si mostra che se h è un'ipotesi statistica che asserisce «$p(a, b) = 1$», allora, dopo che h ha superato n severi controlli, il suo grado di corroborazione sarà $n/(n+2) = 1-(2/(n+2))$. C'è una sorprendente similarità fra questa formula e la «regola di successione» di Laplace, secondo la quale la probabilità che h supererà il suo prossimo controllo è $(n+1)/(n+2) = 1-1/(n+2)$. La similarità numerica di questi risultati, insieme con la mancata distinzione fra probabilità e corroborazione, può forse spiegare perché sia intuitivamente sembrato che il risultato di Laplace, e altri risultati simili, fossero soddisfacenti. Io credo invece che il risultato di Laplace sia errato, perché credo che la sua assunzione (penso a quella che chiamo «distribuzione laplaciana») non valga nei casi che Laplace ha in mente. Ma queste assunzioni valgono per altri casi: ci permettono di stimare la probabilità assoluta di un resoconto su un campione statistico. Cfr. la Terza nota dell'appendice *IX.

Addendum, 1967.

Se ricordiamo quello che si è detto nella vecchia appendice 1 (p. 315), intorno alla *dimensione di una teoria, a, relativa a un dominio F* – cioè $d_F(a)$, e quello che si è detto in quest'appendice intorno ai «*falsificatori piú deboli*» di una teoria, possiamo introdurre una misura *della semplicità o contenuto di a*, relativamente a F, $Ct_F(a)$, nel modo seguente:

$$Ct_F(a) = 1/(d_F(a)+1).$$

Questa è una misura della *microstruttura del contenuto* di una teoria (relativamente a F): infatti può essere applicata laddove le probabilità diventano indistinguibili, perché $p(a) = 0$.

Fra parentesi, la semplicità dovrebbe sempre essere considerata come *relativa a un dato problema di spiegazione.* (Cfr. cap. 10, nota 24, p. 241 del mio *Conjectures and Refutations*, nella seconda edizione (riveduta) del 1965 (e anni successivi)).

Appendice *IX

Corroborazione, peso delle prove e controlli statistici

Le tre note ristampate qui sotto nella presente appendice furono originariamente pubblicate in «The British Journal for the Philosophy of Science» [1].

Ancor prima che il mio libro venisse pubblicato, mi rendevo conto che il problema del grado di corroborazione era uno di quei problemi che dovevano essere analizzati piú a fondo. Per «problema del grado di corroborazione» intendo il problema: I) di mostrare che esiste una misura (che chiameremo grado di corroborazione) della *severità dei controlli* ai quali una teoria è stata sottoposta e della maniera in cui ha superato questi controlli, o non è riuscita a superarli e, II), di mostrare che *questa misura non può essere una probabilità*, o, piú precisamente, che non soddisfa le leggi formali del calcolo delle probabilità.

Uno schizzo della soluzione di entrambi questi problemi – e specialmente del secondo – era già contenuto nel mio libro. Ma mi rendevo conto che c'era bisogno di qualcosa di piú. Non era affatto sufficiente mostrare il fallimento delle teorie della probabilità esistenti – ad esempio quelle di Keynes, di Jeffreys, o di Kaila, o di Reichenbach, nessuno dei quali è stato capace di consolidare la loro dottrina centrale: che una legge o una teoria universali possano mai raggiungere una probabilità > ½. (Non riuscirono neppure a dimostrare che una legge universale, o una teoria, possa mai avere una probabilità diversa da zero). Ciò di cui c'era bisogno era un trattamento perfettamente generale. Perciò mi proposi di costruire un calcolo formale delle probabilità che potesse essere interpretato in vari sensi. Avevo in mente: I) il senso lo-

[1] «BJPS», 5 (1954), pp. 143 sgg. (Si vedano anche le correzioni alle pp. 334 e 359); 7 (1957), pp. 350 sgg. e 8 (1958), pp. 294 sgg.

gico, delineato nel libro come probabilità logica (assoluta) delle asserzioni; II) il senso di probabilità logica relativa delle asserzioni o proposizioni, cosí com'era stato preso in considerazione da Keynes; III) il senso di calcolo delle frequenze relative nelle sequenze; IV) il senso di calcolo di una misura di campi [*ranges*] o di predicati, classi, o insiemi.

Naturalmente, lo scopo ultimo era il mostrare che il *grado di corroborazione non è una probabilità*, cioè a dire che *non è una delle possibili interpretazioni del calcolo della probabilità*. Tuttavia mi resi conto che il compito di costruire un calcolo formale non era solo indispensabile per questo scopo, ma era anche interessante in se stesso.

Tutto questo ebbe come risultato il mio articolo pubblicato su «Mind» e ristampato qui come appendice *II, e altri lavori che mi tennero occupato per molti anni e tendono sia a semplificare il mio sistema d'assiomi, sia a produrre un calcolo della probabilità in cui $p(a, b)$ – la probabilità di a, data b – possa avere valori definiti, e non 0/0, anche quando $p(b)$ è eguale a zero. Naturalmente, il problema sorge perché la definizione

$$p(a, b) = p(ab)/p(b)$$

cessa di essere valida quando $p(b) = 0$.

Il trovare una risoluzione di quest'ultimo problema si rivelò indispensabile, perché mi resi presto conto che, allo scopo di definire $C(x, y)$ – il grado di corroborazione della teoria x in base alle prove y – dovevo operare con qualche inversa $p(y, x)$, chiamata da Fisher la «*verisimiglianza* [*likelihood*] di x» (alla luce della prova y, o data y; si noti che sia la mia «corroborazione» sia la verisimiglianza di Fisher hanno come scopo la misurazione dell'accettabilità dell'ipotesi x; ecco perché x è importante, mentre y rappresenta soltanto le mutevoli prove empiriche o, come io preferisco dire, i resoconti *dei risultati di controlli*). Ora io ero convinto che, se x è una teoria, $p(x) = 0$. Vidi perciò che dovevo costruire un nuovo calcolo della probabilità in cui la verisimiglianza, $p(y, x)$ potesse essere un numero definito diverso da 0/0, anche nel caso in cui x fosse una teoria universale con $p(x) = 0$.

Spiegherò ora brevemente come sorga il problema di $p(y, x)$, il problema, cioè, della verisimiglianza di x.

Se ci chiedono di fornire un criterio del fatto che la prova

y sostiene, o corrobora, o conferma un'asserzione x, la risposta piú ovvia è: «che y *fa crescere* la probabilità di x». Possiamo mettere questa risposta in simboli e scrivere «$Co(x, y)$» per «x è sostenuta o corroborata o confermata da y». Possiamo allora formulare il nostro criterio nel modo che segue.

1) $Co(x, y)$ se, e solo se, $p(x, y) > p(x)$.

Questa formulazione ha tuttavia un difetto. Infatti se x è una teoria universale e y una qualche prova empirica, allora, come abbiamo visto nelle due appendici precedenti[2],

2) $p(x) = 0 = p(x, y)$.

Ma da questo seguirebbe che, per una teoria x e una prova y, $Co(x, y)$ è sempre falsa; o, in altre parole, che una legge universale non può mai essere sostenuta, o corroborata o confermata da prove empiriche.

(Questo vale non solo per un universo infinito, ma anche per un qualsiasi universo estremamente grande, come il nostro; in questo caso, infatti, $p(x, y)$ e $p(x)$ saranno entrambe incommensurabilmente piccole, e cosí praticamente eguali).

Questa difficoltà può comunque essere superata nel modo seguente. Tutte le volte che $p(x) \neq 0 \neq p(y)$, abbiamo

3) $p(x, y) > p(x)$ se, e solo se, $p(y, x) > p(y)$,

cosicché possiamo trasformare la 1) in

4) $Co(x, y)$ se, e solo se, $p(x, y) > p(x)$ o $p(y, x) > p(y)$.

Supponiamo ora di nuovo che x sia una *legge universale*, e che y sia la prova empirica, che, poniamo, segue da x. In questo caso, cioè tutte le volte che y segue da x, diremo, intuitivamente, che $p(y, x) = 1$. E poiché y è empirica, cosicché $p(y)$ sarà certo minore di 1, troviamo che si può applicare la 4) e che l'asserzione $Co(x, y)$ sarà vera. Cioè a dire, x può essere corroborata da y se y segue da x, purché $p(y) < 1$. Cosí da un punto di vista intuitivo la 4) è perfettamente soddisfacente; ma allo scopo di operare liberamente con la 4) dobbiamo avere un calcolo della probabilità in cui $p(y, x)$ sia un numero definito – nel nostro caso, 1 – e non $0/0$, anche se

[2] Cfr. specialmente appendice *VII, formule 1) e 2) e appendice *VIII, formula 2).

$p(x) = 0$. Allo scopo di ottenere ciò, come abbiamo spiegato piú sopra, è stata fornita una generalizzazione del calcolo usuale.

Mi ero già reso conto di tutto questo al tempo in cui comparve la mia nota su «Mind» (cfr. appendice *II), ma la pressione di altri lavori che consideravo piú urgenti, mi impedí di completare le mie ricerche in questo campo. Solo nel 1954 pubblicai, nella Prima nota ristampata qui, i miei risultati a proposito del grado di corroborazione; e altri sei mesi trascorsero prima che pubblicassi un altro sistema di assiomi per la probabilità relativa[3] (sistema equivalente a quello che si trova nell'appendice *IV, anche se meno semplice di quest'ultimo) che soddisfaceva l'esigenza che $p(x, y)$ sia un numero definito anche nel caso che $p(y)$ sia eguale a zero. Quest'articolo forniva i prerequisiti tecnici per una definizione soddisfacente di verisimiglianza e di grado di corroborazione o di conferma.

La mia Prima nota, *Grado di conferma*, pubblicata nel 1954 nel «BJPS», contiene una confutazione matematica di tutte quelle teorie dell'induzione che identificano il grado al quale un'asserzione è sostenuta o confermata o corroborata dai controlli empirici, col suo grado di probabilità nel senso del calcolo della probabilità. La confutazione cinsiste nel mostrare che se identifichiamo il grado di corroborazione o di conferma con la probabilità, dobbiamo per forza adottare un certo numero di punti di vista altamente paradossali, tra i quali c'è la seguente asserzione, chiaramente autocontraddittoria:

*) Ci sono casi in cui x è fortemente sostenuta da z e y è fortemente infirmata da z, mentre, nel medesimo tempo, x è confermata da z a un grado minore di quanto sia confermata y.

Un semplice esempio, che mostra che questa disastrosa conseguenza seguirebbe nel caso che identificassimo corroborazione o conferma e probabilità, si troverà sotto il punto 6 della mia Prima nota[4]. Tenendo conto della brevità di quel

[3] Cfr. «BJPS», 6 (1955), pp. 56-57.

[4] Al contrario dell'esempio dato qui nel testo, gli esempi offerti ai punti 5 e 6 della mia Prima nota sono i piú semplici che potevo dare, cioè a dire, operano con il minor numero possibile di proprietà esclusive equiprobabili.

passo, mi sarà forse concesso, qui, di spiegare di nuovo questo punto.

Consideriamo il lancio successivo di un dado omogeneo. Supponiamo che x sia l'asserzione «Verrà un sei»; sia y la sua negazione; sia, cioè, $y = \bar{x}$ e sia z l'informazione: «Verrà un numero pari».

Abbiamo le seguenti probabilità assolute:

$$p(x) = 1/6; \;\; p(y) = 5/6; \;\; p(z) = 1/2.$$

Inoltre, abbiamo le seguenti probabilità relative:

$$p(x, z) = 1/3; \;\; p(y, z) = 2/3.$$

Vediamo che x è sostenuta dall'informazione z, perché z fa crescere la probabilità di x da $1/6$ a $2/6 = 1/3$. Vediamo anche che y è infirmata da z, perché z fa decrescere la probabilità di y della stessa quantità, da $5/6$ a $4/6 = 2/3$. Abbiamo nondimeno $p(x, z) < p(y, z)$. Quest'esempio prova il teorema seguente:

5) Esistono asserzioni x, y e z che soddisfano la formula

$$p(x, z) > p(x) \;\&\; p(y, z) < p(y) \;\&\; p(x, z) < p(y, z).$$

Ovviamente, qui a «$p(y, z) < p(y)$» possiamo sostituire la piú debole «$p(y, z) \leq p(y)$».

Naturalmente, questo teorema è ben lontano dall'essere paradossale. E lo stesso vale per il suo corollario 6), che otteniamo sostituendo a «$p(x, z) > p(x)$» e «$p(y, z) \leq p(y)$», le espressioni «$Co(x, z)$» e «$\sim Co(y, z)$» – cioè a dire, «non-$Co(y, z)$» – rispettivamente, d'accordo con la formula 1) data piú sopra:

6) Esistono asserzioni x, y e z, che soddisfano la formula

$$Co(x, z) \;\;\&\; \sim Co(y, z) \;\;\&\;\; p(x, z) < p(y, z).$$

Come la 5), il teorema 6) esprime un fatto che abbiamo stabilito col nostro esempio: che x può essere sostenuta da z, e y può essere infirmata da z e che, ciononostante, x, data z, può essere meno probabile di y, data z.

Ciò vale anche per l'esempio dato nella nota relativa al punto 5. (Per quanto riguarda il punto 5, sembra che ci sia un equivalente, benché piú complicato, in *Logical Foundations of Probability* cit., di Carnap, § 71; non sono stato in grado di seguirlo, per via della sua complessità. Per quanto riguarda il mio punto 6, né nel libro di Carnap, né in alcun altro libro, ho trovato un esempio che gli corrispondesse).

Comunque, se ora nella 6) identifichiamo il grado di conferma e probabilità sorge subito un'evidente autocontraddizione. In altre parole, la formula

$$**) \qquad Co(x,z) \;\&\; {\sim}Co(y,z) \;\&\; C(x,z) < C(y,z)$$

è chiaramente autocontraddittoria, e perciò non può essere soddisfatta da nessun insieme di asserzioni.

Abbiamo cosí provato che l'identificazione del grado di corroborazione o conferma con la probabilità (e anche con la verisimiglianza) è assurda, sia su basi formali sia su basi intuitive: conduce all'autocontraddizione.

Qui «grado di corroborazione o di conferma» può essere preso in un senso piú largo di quello che io ho in mente di solito. Mentre di solito prendo quest'espressione come sinonimo di «grado di severità dei controlli che una teoria ha superato», qui la uso come «grado a cui un'asserzione x è sostenuta da un'asserzione y».

Se prendiamo in esame questa formula, vediamo che dipende soltanto da due assunzioni:

a) La formula 1);

b) L'assunzione che qualsiasi asserzione della forma seguente è *autocontraddittoria*:

***) x ha la proprietà P (ad esempio, la proprietà «caldo») e y non ha la proprietà P e y ha la proprietà P in grado piú alto di x (ad esempio, y è piú caldo di x).

Ogni lettore attento della mia Prima nota, e specialmente dell'esempio dato al punto 6, troverà che là tutto ciò è chiaramente implicato eccettuata forse la formulazione ***) delle contraddizioni *) e **). Ammetto che qui la cosa è messa sotto una forma piú esplicita, ma lo scopo della mia nota non era tanto quello di criticare, quanto piuttosto di dare una definizione del grado di corroborazione.

Le critiche contenute nella mia nota erano dirette contro *tutti* quelli che, esplicitamente o implicitamente, identificano il grado di corroborazione, o di conferma, o di accettabilità, con la probabilità; i filosofi a cui pensavo in modo speciale erano Keynes, Jeffreys, Reichenbach, Kaila, Hosiasson e, tra i piú recenti, Carnap.

Per quanto riguarda Carnap, scrissi a piè di pagina una nota critica che, credo, parla di per se stessa. Tale critica era motivata dal fatto che Carnap, quando formula criteri di adeguatezza per il grado di conferma, parla del consenso di «praticamente tutte le teorie moderne del grado di conferma», ma non menziona il mio dissenso, nonostante il fatto che il termine «*degree of confirmation*» (grado di conferma) da lui introdotto nella lingua inglese, non sia altro che la traduzione del termine, coniato da me, «*Grad der Bewährung*» (cfr. § 79, nota *1). Inoltre, io desideravo mettere in evidenza il fatto che la sua distinzione della probabilità in probabilità$_1$ (= al suo grado di conferma) e probabilità$_2$ (= frequenza statistica) è insufficiente; che ci sono, a dir poco, almeno due interpretazioni del calcolo della probabilità (l'interpretazione logica e l'interpretazione statistica) e che *oltre queste* c'è il mio grado di corroborazione che, come ho mostrato qui e come avevo mostrato nella mia nota, *non è una probabilità.*

Sembra che questa mia nota a piè di pagina, lunga dieci righe, abbia attirato su di sé maggiore attenzione di quanta non ne abbia attirata il resto della mia nota. Essa provocò una discussione sul «BJPS»[5], in cui Bar-Hillel asserí che la mia critica a quella che egli chiama «la teoria corrente della conferma» (cioè, la teoria di Carnap) è puramente verbale, e che tutto quello che io avevo da dire era stato anticipato da Carnap; e provocò una recensione del mio scritto nel «Journal of Symbolic Logic»[6] in cui Kemeny riassunse la mia nota con le parole: «La tesi principale di questo articolo è che né le misure del grado di conferma, proposte da Carnap, né qualsiasi altra assegnazione di probabilità logica, sono adatte a misurare i gradi di conferma».

Ma questa non era certo la mia tesi principale. La mia nota costituiva la continuazione di alcuni miei lavori pubblicati quindici anni prima che fosse scritto il libro di Carnap; e per quanto riguarda le critiche, il punto in discussione – l'identificazione di corroborazione o conferma o accettabilità e probabilità – pur non essendo, naturalmente, la tesi principale

[5] Cfr. «BJPS», 6 (1955), pp. 155-63, e 7 (1956), pp. 243-56.

[6] Cfr. «Journal of Symbolic Logic», 20 (1955), p. 304. Ecco un errore di fatto nella recensione di Kemeny: alla riga 16 dal basso della pagina citata, «misura del sostegno dato da y a x» si dovrebbe leggere «misura del potere esplicativo di x rispetto a y».

del libro di Carnap, è ben lontano dall'essere una tesi originale di Carnap: qui infatti egli non fa altro che seguire la tradizione di Keynes, Jeffreys, Reichenbach, Kaila, Hosiasson e altri. Inoltre, sia Bar-Hillel sia Kemeny suggeriscono che queste critiche, nella misura in cui valgono per la teoria di Carnap, sono puramente verbali e che non c'è ragione per cui la teoria di Carnap debba essere abbandonata. Mi sento perciò costretto a dire ora, molto chiaramente, che la teoria di Carnap è autocontraddittoria, e che la sua contraddittorietà non è una faccenda di poco conto a cui si possa porre riparo facilmente, ma è dovuta a errori nei suoi fondamenti logici.

In primo luogo, entrambe le assunzioni *a*) e *b*) – che, come abbiamo visto, sono sufficienti per la prova che il grado di conferma non dev'essere identificato con la probabilità – sono esplicitamente asserite nella teoria di Carnap: *a*), cioè a dire la nostra formula 1), si può trovare nel libro di Carnap come formula 4), a p. 464[7]; *b*), cioè a dire ***), o l'assunzione che la nostra **) è autocontraddittoria, si può trovare a p. 73 del libro di Carnap, dove l'autore scrive: «Se la proprietà Caldo e la relazione Piú caldo fossero designate da..., poniamo, "*P*" e "*R*", allora "*Pa* . ~*Pb* . *Rba*" sarebbe autocontraddittoria». Ma questa è la nostra ***). Naturalmente è in certo modo del tutto irrilevante per la mia argomentazione (che mostra l'assurdità dell'identificazione di C e p) che *a*) e *b*) siano o no ammesse esplicitamente in un libro; ma si dà il caso che nel libro di Carnap lo siano.

Inoltre, la contraddizione spiegata qui è cruciale per Carnap: accettando la 1), o, piú precisamente, definendo, alle pp. 463 sg., «x è confermata da y» con l'aiuto di «$p(x, y) > p(x)$» (nel nostro simbolismo) Carnap mostra che il significato che egli intende di «grado di confermazione» (il suo «*explicandum*») è *grosso modo* il medesimo che intendo io. Si tratta dell'idea intuitiva di sostegno fornito dalle prove empiriche. (Kemeny, *loc. cit.*, sbaglia quando suggerisce il contrario. In realtà un'«attenta lettura» del mio articolo – e, dovrei aggiungere, del libro di Carnap – *non* «mostrerà che

[7] Cfr. anche la formula 6) a p. 464. La formula 4) di Carnap a p. 464 è scritta sotto forma di equivalenza, ma questo non fa alcuna differenza. Si noti che Carnap scrive «t» per «tautologia», uso questo che ci permetterebbe di scrivere $p(x, t)$ in luogo di $p(x)$.

Popper e Carnap hanno in mente due differenti *explicanda*», ma mostrerà che, parlando della sua probabilità$_1$, Carnap aveva in mente, senza accorgersene, due «*explicanda*» diversi e incompatibili: uno di essi era la mia C, l'altro la mia p; e mostrerà che io avevo ripetutamente messo in evidenza i pericoli di questa confusione, ad esempio proprio nell'articolo recensito da Kemeny). Pertanto, qualsiasi cambiamento dell'assunzione *a*) sarebbe un cambiamento *ad hoc*. Non sono le mie critiche ad essere «puramente verbali», ma i tentativi di salvare la «teoria corrente della conferma».

Per ulteriori dettagli non posso far altro che rinviare alla discussione avvenuta sulle pagine del «BJPS». Mi sia concesso dire che sia questa discussione sia la recensione di Kemeny sul «Journal of Symbolic Logic» mi lasciarono piuttosto deluso. Da un punto di vista razionale, la situazione mi sembra piuttosto seria. In questa nostra età postrazionalistica si scrive un numero sempre maggiore di libri in linguaggio simbolico, e diventa sempre piú difficile vederne il perché: dove vada a parare tutto questo e perché dovrebbe essere necessario lasciarsi seccare da volumi di banalità scritte in simboli. Sembra quasi che il simbolismo stia diventando un valore di per se stesso, da riverire per la sua sublime «esattezza»: una nuova espressione della vecchia ricerca della certezza, un nuovo rituale simbolico, un nuovo sostituto della religione. Tuttavia il solo possibile valore di questo genere di cose – la sola scusante possibile per le sue dubbie pretese all'esattezza – sembra questa. Una volta che si siano individuati un errore o una contraddizione non c'è piú posto per le evasioni verbali: li si può provare, e questo è quanto. (Frege non tentò manovre evasive quando venne a conoscenza delle critiche di Russell). Cosí, se uno deve sorbirsi un sacco di noiosi tecnicismi, e un formalismo di inutile complessità, gli dovrebbe almeno essere concesso sperare di essere ricompensato dalla pronta accettazione di una prova diretta di contraddittorietà: di una prova consistente del piú semplice dei controesempi. Invece è stata una delusione il vedersi mettere di fronte evasioni puramente verbali, combinate con l'asserzione che le critiche da me fatte valere erano «puramente verbali».

Ma non si deve essere impazienti. Da Aristotele in poi, l'indovinello dell'induzione ha convertito molti filosofi all'irrazionalismo: allo scetticismo o al misticismo. E anche se la filosofia dell'identità di *C* e di *p* sembra aver superato piú d'una tempesta dal tempo di Laplace in poi, io credo ancora che un giorno sarà abbandonata. Non posso davvero convincermi che i difensori della fede saranno per sempre soddisfatti dal misticismo e dallo hegelismo e continueranno a sostenere «$C = p$» come un assioma autoevidente, o come l'oggetto abbagliante di un'intuizione induttiva. (Dico «abbagliante», perché mi sembra un oggetto i cui contemplatori sono percossi da cecità non appena vanno a sbattere contro le sue contraddizioni logiche).

Mi sarà forse concesso di dire, qui, che considero la dottrina secondo cui *il grado di corroborazione o di accettabilità non può essere una probabilità*, come una delle scoperte piú interessanti della filosofia della conoscenza. La si può formulare, molto semplicemente, cosí. Un resoconto del risultato del controllo di una teoria può essere riassunto con una valutazione. Tale valutazione può assumere la forma dell'assegnazione alla teoria di un certo grado di corroborazione. Ma non potrà mai assumere la forma dell'assegnazione, alla teoria, di un grado di probabilità. Infatti *la probabilità di un'asserzione (date alcune asserzioni di controllo) semplicemente non esprime un apprezzamento della severità dei controlli che la teoria ha superato, o della maniera in cui li ha superati.* La ragione principale di ciò è che il *contenuto* di una teoria – che è la stessa cosa che la sua *improbabilità* – determina la sua *controllabilità* e la sua *corroborabilità.*

Io credo che queste due idee – *contenuto* e *grado di corroborazione* – siano gli strumenti logici piú importanti sviluppati nel mio libro [8].

[8] Per quanto posso saperne, il riconoscimento della significanza del *contenuto empirico* o potere assertorio di una teoria; il suggerimento che il contenuto cresce col crescere della classe dei falsificatori potenziali di una teoria – cioè a dire, degli stati di cose che vieta o esclude (cfr. §§ 23 e 31) – e l'idea che il contenuto può essere misurato mediante l'improbabilità della teoria, non sono state prese da nessun'altra fonte che non fosse «tutto il mio lavoro». Fui perciò sorpreso quando, nell'*Introduction to Semantics* [Introduzione alla semantica], 1942, p. 151, di Carnap, lessi, in relazione alla sua definizione di «contenuto»: «... il potere assertorio di un enunciato consiste nel fatto che esso esclude certi stati di cose (Wittgenstein): quanto piú esclude, tanto piú asserisce». Scrissi a Carnap chiedendogli particolari e ri-

E come introduzione questo può bastare. Nelle tre note che seguono ho lasciato la parola «conferma», anche se ora dovrei scrivere soltanto «corroborazione». Ho anche lasciato «$P(x)$», dove ora scrivo di solito «$p(x)$». Ma ho corretto alcuni errori di stampa[9] e ho aggiunto alcune note a piè di pagina, precedute da asterischi e anche due nuovi punti, *13 e *14, alla fine della Terza nota.

Grado di conferma.

1. Lo scopo di questa nota è di proporre e discutere una definizione in termini di probabilità *del grado al quale un'asserzione x è confermata da un'asserzione y.* (Ovviamente, quest'ultima frase dev'essere considerata identica a: «*il grado al quale un'asserzione y conferma un'asserzione x*»). Denoterò questo grado col simbolo «$C(x, y)$», che si legge: «*il grado di conferma di x da parte di y*». In casi particolari, x può essere un'ipotesi, h; e y può essere una qualche prova empirica, e, in favore di h o contro h, o neutrale rispetto ad h. Ma $C(x, y)$ sarà applicabile anche a casi meno tipici.

La definizione dev'essere data in termini di probabilità. Farò uso sia di $P(x, y)$, cioè, della probabilità (relativa) di x data y, sia di $P(x)$, cioè della probabilità (assoluta) di x[1]. Ma una di queste due probabilità dovrebbe essere sufficiente.

cordandogli certi passi rilevanti del mio libro. Nella sua risposta, Carnap disse che il suo riferimento a Wittgenstein era dovuto a un errore di memoria, e che in effetti aveva in mente un passo del mio libro, e ripeté questa correzione nel suo *Logical Foundations of Probability* cit., p. 406. Menziono qui questo fatto, perché in un certo numero di articoli pubblicati dopo il 1942, l'idea di contenuto – nel senso di contenuto empirico o informativo – è stata attribuita (senza fare però riferimenti precisi) a Wittgenstein o a Carnap, e qualche volta a Wittgenstein e a me. Ma non vorrei che qualcuno pensasse che io l'ho presa da Wittgenstein, o da qualcun altro, senza riconoscerlo: come studioso della storia delle idee credo che sia estremamente importante fare riferimento alle proprie fonti. (Si veda anche la mia discussione nel § 35, sulla distinzione fra *contenuto logico* e *contenuto empirico*, in cui si fa riferimento a Carnap nelle note 1 e 2).

[9] Naturalmente ho anche incorporato le correzioni menzionate in «BJPS», 5, pp. 334 e 359.

[1] «$P(x)$» può essere definita, in termini di probabilità relativa, dal *definiens* «$P(x, \overline{z\bar{z}})$», o, piú semplicemente, «$P(x, \overline{x\bar{x}})$». (Uso dappertutto «$xy$» per denotare la congiunzione di x e y, e «$\bar{x}$» per denotare la negazione di x). Poiché abbiamo, in generale, $P(x, y\overline{z\bar{z}}) = P(x, y)$, e $P(x, yz) = P(xy, z)/P(y, z)$,

2. Si assume spesso che il grado di conferma di x da parte di y debba essere lo stesso che il grado di probabilità (relativa) di x data y, cioè, che $C(x, y) = P(x, y)$. Il mio primo compito consiste ora nel mostrare l'inadeguatezza di questo punto di vista.

3. Consideriamo due asserzioni contingenti: x e y. Dal punto di vista della conferma di x da parte di y, ci saranno due casi estremi: il caso in cui y sostiene completamente x (o y convalida [*establishes*] x) quando x segue da y, e il caso in cui y infirma [*undermines*] completamente o confuta, o invalida [*disestablishes*] x, quando da y segue $\bar{x}$. Un terzo caso di speciale importanza è quello dell'indipendenza o irrilevanza reciproche, caratterizzato da $P(xy) = P(x)\,P(y)$. Il suo valore di $C(x, y)$ starà al di sotto della fondazione e al di sopra dell'invalidazione.

Fra questi tre casi speciali – convalidazione, indipendenza e invalidazione – ci saranno casi intermedi: *sostegno parziale* (quando y implica logicamente parte del contenuto di x); ad esempio, se la nostra y contingente segue da x, ma non viceversa, allora y è essa stessa parte del contenuto di x e implica logicamente parte del contenuto di x, sostenendo x; e *scalzamento* [*undermining*] *parziale* di x da parte di y (quando y sostiene parzialmente $\bar{x}$); ad esempio, se y segue da $\bar{x}$. Diremo allora che y sostiene x, o che infirma $\bar{x}$, in tutti i casi in cui $P(xy)$ o $P(\bar{x}y)$, rispettivamente, superano i valori che dovrebbero avere se fossero indipendenti. (È facile vedere che dal punto di vista di questa definizione i tre casi – sostegno, scalzamento e indipendenza – esauriscono il campo delle possibilità e si escludono vicendevolmente).

4. Si consideri ora la congettura che ci sono tre asserzioni, x_1, x_2 e y, tali che I), x_1 e x_2 sono, ciascuna, indipendenti da y (o scalzate da y), mentre II), y sostiene la loro congiunzione x_1x_2. Ovviamente, in questo caso dovremmo dire che y

otteniamo $P(x, y) = P(xy)/P(y)$, formula molto utile per definire la probabilità relativa in termini di probabilità assoluta. (Si veda la mia nota in «Mind», 47, 1938, pp. 275 sg., dove identificavo la probabilità assoluta con quella che nella mia *Logik der Forschung*, Vienna 1935 [spec. §§ 34 sg. e 83] chiamavo «probabilità logica», dal momento che il termine «probabilità logica» è meglio usato per l'«interpretazione logica» sia di $P(x)$ sia di $P(x, y)$, interpretazione contrapposta alla loro «interpretazione statistica», che qui può essere ignorata).

conferma x_1x_2 a un grado piú alto di quanto confermi x_1 o x_2; in simboli:

4.1) $$C(x_1, y) < C(x_1x_2, y) > C(x_2, y)$$

ma ciò sarebbe incompatibile col punto di vista secondo cui $C(x, y)$ è una probabilità, cioè con

4.2) $$C(x, y) = P(x, y)$$

poiché per le probabilità abbiamo la formula generalmente valida

4.3) $$P(x_1, y) \geq P(x_1x_2, y) \leq P(x_2, y)$$

che, in presenza della 4.1), contraddice la 4.2). Dunque dovremmo lasciar cadere la 4.2). Ma tenendo presente $0 \leq P(x, y) \leq 1$, la 4.3) è una conseguenza immediata del principio generale della moltiplicazione per le probabilità. Dunque dovremmo scartare un tale principio per il grado di conferma. Inoltre, è chiaro che dovremmo tralasciare anche il principio speciale dell'addizione. Infatti, poiché $P(x, y) \geq \geq 0$, una conseguenza di questo principio è

4.4) $$P(x_1x_2 \text{ } o \text{ } x_1\bar{x}_2, y) \geq P(x_1x_2, y).$$

Ma questa formula non potrebbe restare valida per $C(x, y)$, visto e considerato che l'alternativa x_1x_2 *o* $x_1\bar{x}_2$ è equivalente a x_1, cosicché, per sostituzione a primo membro della 4.1) otteniamo:

4.5) $$C(x_1x_2 \text{ } o \text{ } x_1\bar{x}_2, y) < C(x_1x_2, y).$$

In presenza della 4.4) la 4.5) contraddice la 4.2)[2].

5. Questi risultati dipendono dalla congettura che esistano asserzioni x_1, x_2 e y, tali che 1), x_1 e x_2 sono ciascuna indi-

[2] Nel suo *Logical Foundations of Probability* cit., p. 285, Carnap usa i principî di moltiplicazione e di addizione come «*convenzioni sull'adeguatezza*» *riguardanti il grado di conferma*. Il solo argomento che egli offre in favore dell'adeguatezza di questi principî è che «essi sono generalmente accettati praticamente in tutte le moderne teorie della probabilità$_1$», cioè, della nostra $P(x, y)$ che Carnap identifica con «grado di conferma». Ma lo stesso termine «grado di conferma» («*Grad der Bewährung*») fu introdotto da me nei §§ 82 e 83 della mia *Logik der Forschung* (libro al quale Carnap fa qualche volta riferimento) allo scopo di mostrare che sia la probabilità logica sia la probabilità statistica sono *inadeguate* e non servono al grado di conferma, dal momento che la confermabilità deve crescere col crescere della controllabilità, e dunque con l'improbabilità logica (assoluta) e il contenuto. (Vedi piú avanti).

pendente da y (o scalzata da y) mentre, II), y sostiene x_1x_2. Proverò questa congettura mediante un esempio [3].

Si prendano alcuni gettoni colorati, «a», «b», ..., con quattro proprietà che si escludono a vicenda e sono egualmente probabili: blu, verde, rosso e giallo. Sia x_1 l'asserzione «a è blu o verde»; x_2 = «a è blu o rosso»; y = «a è blu o giallo». Allora tutte le nostre condizioni risultano soddisfatte. (Che y sostenga x_1x_2 è ovvio; y segue da x_1x_2 e la sua presenza fa crescere la probabilità di x_1x_2 fino al doppio del valore che ha in assenza di y).

6. Ma possiamo anche costruire un esempio ancor piú sorprendente che mostri l'inadeguatezza dell'identificazione di $C(x, y)$ e $P(x, y)$. Scegliamo x_1 in modo che sia fortemente sostenuta da y, e x_2 in modo che sia fortemente scalzata da y. Dovremo cosí esigere che $C(x_1, y) > C(x_2, y)$. Ma x_1 e x_2 possono essere scelte in modo che $P(x_1, y) < P(x_2, y)$. L'esempio è questo: si prenda x_1 = «a è blu»; x_2 = «a non è rosso» e y = «a non è giallo». Allora $P(x_1) = 1/4$; $P(x_2) = 3/4$ e $1/3 = P(x_1, y) < P(x_2, y) = 2/3$. Che y sostenga x_1 e scalzi x_2 è chiaro da queste cifre, e anche dal fatto che y segue da x_1 e anche da $\bar{x}_2$ [*1].

7. Perché $C(x, y)$ e $P(x, y)$ sono state cosí persistentemente confuse? Perché non ci si è resi conto che è assurdo dire che certe prove y, da cui x è completamente indipendente, possono tuttavia «confermare» x? E che x può «confermare» fortemente x, anche se y scalza x? E questo anche se y è tutta quanta la prova di cui possiamo disporre? Io non conosco la risposta a queste domande, ma posso avanzare alcuni suggerimenti. In primo luogo c'è la fortissima tendenza a pensare che, qualunque cosa possiamo chiamare cosí, la «verisimiglianza» o «probabilità» di un'ipotesi debba essere una probabilità nel senso del calcolo delle probabilità. Allo scopo di districare i vari problemi impliciti in questo punto, io distinsi, vent'anni fa, ciò che allora chiamavo «grado di conferma» dalla probabilità sia logica sia statistica. Ma sfor-

[3] L'esempio soddisfa la I) per l'*indipendenza*, piuttosto che per lo *scalzamento*. (Per ottenerne uno per lo *scalzamento*, si aggiunga l'ambra come quinto colore e si ponga y = «a è ambra o blu o giallo»).

[*1] Questo fatto – cioè a dire, $p(y, x_1) = p(y, \bar{x}_2) = 1$ – significa che la «verisimiglianza» di Fisher, di x_1, e dunque di $\bar{x}_2$, alla luce di y, è massimale. Si veda l'introduzione alla presente appendice, in cui viene elaborata l'argomentazione delineata nel testo.

tunatamente il termine «grado di conferma» fu presto usato da altri come un nuovo nome per la probabilità (logica), forse sotto l'influenza della credenza, errata, che la scienza, incapace di raggiungere la certezza, debba tendere a una specie di *Ersatz*: alla piú alta probabilità raggiungibile.

Ecco un altro suggerimento. Sembra che la frase «il grado di conferma di x da parte di y» sia stata rigirata in «il grado al quale y conferma x», o «*il potere di y di sostenere x*». Tuttavia, in questa forma sarebbe stato perfettamente ovvio che, in un caso in cui y sostiene x_1 e infirma x_2, $C(x_1, y) < C(x_2, y)$ è assurda, anche se $P(x_1, y) < P(x_2, y)$ può essere perfettamente in ordine, indicando, in tal caso, che avevamo $P(x_1) < P(x_2)$ con cui cominciare. Inoltre, sembra che ci sia una tendenza a confondere le misure *di* aumento o diminuzione con le misure *che* aumentano e diminuiscono (come mostra la storia dei concetti di velocità, accelerazione e forza). Ma, come vedremo, il potere di y di sostenere x è essenzialmente una *misura dell'aumento o della diminuzione*, dovuti a y, della probabilità di x. (Cfr. anche 9 VII, piú sotto).

8. In risposta a tutto questo si dirà forse che è in ogni caso legittimo dare a $P(x, y)$ qualsiasi nome si voglia, e dunque anche il nome di «grado di conferma». Ma la questione che dobbiamo affrontare non è una questione puramente verbale.

Il grado di conferma di un'ipotesi x da parte di una prova empirica y, dovrebbe essere usato per stimare il grado al quale x è *spalleggiata dall'esperienza*. Ma $P(x, y)$ non può servire a questo scopo, dal momento che $P(x_1, y)$ può essere piú alta di $P(x_2, y)$ anche quando x_1 è infirmata da y e x_2 è sostenuta da y, dal momento che ciò è dovuto al fatto che $P(x, y)$ dipende molto fortemente da $P(x)$, cioè dalla probabilità assoluta di x, che non ha assolutamente nulla da fare con le prove empiriche.

Inoltre, il grado di conferma dovrebbe avere un'influenza sulla questione se dobbiamo *accettare*, o *scegliere*, una certa ipotesi x, anche solo in via di tentativo; un alto grado di conferma dovrebbe caratterizzare un'ipotesi come «buona» (o «accettabile»), mentre un'ipotesi sconfermata dovrebbe essere «cattiva». Ma qui $P(x, y)$ non ci può aiutare. *Lo scopo primario della scienza non sono le alte probabilità. La scienza tende a un alto contenuto informativo, ben spalleggiato* *dall'esperienza. Ma un'ipotesi può essere molto probabile semplicemente perché non ci dice nulla, o ci dice molto poco.* Un alto grado di probabilità non è perciò un'indicazione di «bontà»: può essere, semplicemente, un sintomo di basso contenuto informativo. D'altra parte, $C(x, y)$ deve, e può, essere definita in modo che solo le ipotesi dotate di un alto contenuto informativo possano raggiungere alti gradi di conferma. La *confermabilità* di x (cioè, il grado massimo di conferma che un'asserzione x può raggiungere) dovrebbe crescere col crescere di $C(x)$, cioè col crescere della misura del contenuto di x, che è eguale a $P(\bar{x})$ e perciò al *grado di controllabilità* di x. Cosí, mentre $P(\overline{x\bar{x}}, y) = 1$, $C(\overline{x\bar{x}}, y)$ dovrebbe essere zero.

9. Una definizione di $C(x, y)$ che soddisfi tutti questi, e altri *desiderata* indicati nella mia *Logik der Forschung*, e, oltre questi, altri piú forti, può essere basata su $E(x, y)$, cioè su una misura non additiva del *potere esplicativo di x rispetto a y*, progettata in modo da avere come limiti inferiore e superiore -1 e $+1$. Tale misura è definita nel modo seguente:

9.1) Sia x non-contraddittoria[4] e $P(y) \neq 0$; definiamo allora

$$E(x, y) = \frac{P(y, x) - P(y)}{P(y, x) + P(y)}.$$

$E(x, y)$ può anche essere interpretata come una misura non additiva della dipendenza di y da x, o come il sostegno dato a y da x (e viceversa). Essa soddisfa il piú importante dei nostri *desiderata*, ma non tutti: ad esempio, víola la VIII *c*), e soddisfa la III) e la IV) solo approssimativamente, in casi speciali. Per rimediare a questi difetti, propongo di definire $C(x, y)$ nel modo seguente[*2].

[4] Questa condizione può essere lasciata cadere se accettiamo la convenzione generale che $P(x, y) = 1$ ogni volta che y è contraddittoria.

[*2] La definizione che segue è una definizione alternativa un po' piú semplice, che soddisfa anche le mie condizioni di adeguatezza, o *desiderata*. (L'enunciai per la prima volta in «BJPS», 5, p. 359).

9.2*) $$C(x, y) = \frac{P(y, x) - P(y)}{P(y, x) - P(xy) + P(y)}.$$

Analogamente, io pongo ora

10.1*) $$C(x, y, z) = \frac{P(y, xz) - P(y, z)}{P(y, xz) - P(xy, z) + P(y, z)}.$$

9.2) Sia x non-contraddittoria e $P(x) \neq 0$; definiamo allora

$$C(x, y) = E(x, y)(1 + P(x)P(x, y)).$$

Questa definizione è meno semplice, poniamo, di $E(x, y)(1 + P(xy))$ che soddisfa la maggior parte dei nostri *desiderata* ma víola la IV), mentre per $C(x, y)$ vale il teorema che essa soddisfa tutti i seguenti *desiderata*:

I) $C(x, y) \gtreqless 0$ rispettivamente se, e solo se, y sostiene x, o è indipendente da x, o infirma x.

II) $-1 = C(\bar{y}, y) \leq C(x, y) \leq C(x, x) \leq 1$.

III) $0 \leq C(x, x) = C(x) = P(\bar{x}) \leq 1$.

Si noti che $C(x)$, e perciò $C(x, x)$ è una misura additiva del contenuto di x, definibile mediante $P(\bar{x})$, cioè mediante la probabilità assoluta che ha x di essere falsa, o la possibilità [*likelihood*] che ha x di venir *confutata*. Dunque la *confermabilità* è eguale alla *confutabilità o controllabilità*[5].

IV) Se y implica logicamente x, allora $C(x, y) = C(x, x) = C(x)$.

V) Se y implica logicamente $\bar{x}$, allora $C(x, y) = C(\bar{y}, y) = -1$.

VI) Supponiamo che x abbia un alto contenuto – cosicché $C(x, y)$ si approssimi a $E(x, y)$ – e che y sostenga x. (Ad esempio, possiamo prendere y come la totalità delle prove empiriche a nostra disposizione). *Allora, per ogni y data, $C(x, y)$ cresce col crescere del potere di x di spiegare y* (cioè di spiegare quantità sempre maggiori del contenuto di y), e perciò con l'*interesse scientifico* di x.

VII) Se $C(x) = C(y) \neq 1$, allora $C(x, u) \gtreqless C(y, w)$, ogni volta che $P(x, u) \gtreqless P(y, w)$[*3].

VIII) Se x implica logicamente y, allora: *a*) $C(x, y) \geq 0$; *b*) per ogni x data, $C(x, y)$ e $C(y)$ crescono insie-

[5] Cfr. § 83 della mia *Logik der Forschung* cit., che ha per titolo «Confermabilità, controllabilità, probabilità logica». (Dopo «logica» si dovrebbe inserire «assoluta», d'accordo con la terminologia della mia nota in «Mind», *loc. cit.*)

[*3] La condizione «$\neq 1$» non era stampata né nel testo originale né nelle correzioni pubblicate.

me e *c*), per ogni *y* data, $C(x, y)$ e $P(x)$ crescono insieme[6].

IX) Se $\bar{x}$ è non-contraddittoria e implica logicamente *y*, allora: *a*) $C(x, y) \leq 0$; *b*) per ogni *x* data, $C(x, y)$ e $P(y)$ crescono insieme; e *c*) per ogni *y* data, $C(x, y)$ e $P(x)$ crescono insieme.

10. Tutte le nostre considerazioni senza eccezione possono essere relativizzate rispetto a qualche informazione iniziale, *z*; aggiungendo nei posti appropriati frasi come «in presenza di *z*, assumendo $P(z, \overline{zz}) \neq 0$». La definizione relativizzata del grado di conferma diventa:

10.1) $$C(x, y, z) = E(x, y, z)(1 + P(x, z)P(x, yz))$$

dove

10.2) $$E(x, y, z) = \frac{P(y, xz) - P(y, z)}{P(y, xz) + P(y, z)}.$$

$E(x, y, z)$ è il potere esplicativo di *x* rispetto a *y*, in presenza di *z*[7].

11. Ci sono, io credo, alcuni *desiderata* intuitivi che non possono essere soddisfatti da nessuna definizione formale. Per esempio, una teoria è tanto meglio confermata quanto piú ingegnosi sono stati i nostri tentativi falliti di confutarla. Pur non incorporando tutto quello che, di quest'idea, può essere formalizzato, la mia definizione ne incorpora almeno un po'. Ma non si può formalizzare completamente l'idea di tentativo sincero e ingegnoso[8].

[6] La VII) e la VIII) contengono i soli *desiderata* importanti che siano soddisfatti da $P(x, y)$.

[7] Sia x_1 la teoria della gravitazione di Einstein, x_2 quella di Newton; *y* le prove empiriche (interpretate) disponibili oggi, ivi comprese le leggi «accettate» (purché le nostre condizioni per *y* siano soddisfatte non ha importanza se delle teorie in questione non ne è compresa nessuna, o una sola, o vi sono comprese tutt'e due); sia ancora *z* una parte di *y*, ad esempio una scelta delle prove disponibili un anno fa. Siccome possiamo assumere che x_1 spieghi di *y*, piú di quanto non ne spieghi x_2, otteniamo $C(x_1, y, z) \geq C(x_2, y, z)$ per ogni *z*, e $C(x_1, y, z) > C(x_2, y, z)$ per ogni *z* adatta, che contenga qualcuna delle condizioni iniziali rilevanti. Questo segue dalla VI) – *anche se dovessimo assumere* che $P(x_1, yz) = P(x_2, yz) = P(x_1) = P(x_2) = 0$.

[8] Ci sono molti modi per avvicinarsi di piú a quest'idea. Ad esempio, pos-

Secondo me il modo particolare in cui qui si definisce $C(x, y)$ non è importante. Ciò che può essere importante sono i *desiderata, e il fatto che possono essere soddisfatti insieme.*

Seconda nota sul grado di conferma.

1. Facendo riferimento alla mia definizione di contenuto, il professor J. G. Kemeny[1] e, indipendentemente da lui, il dottor C. L. Hamblin[2], hanno suggerito che il *contenuto* di x, denotato da «$C(x)$», dovrebbe essere misurato da $-\log_2 P(x)$, invece che da $1-P(x)$, come io suggerii originariamente. (Uso qui i miei simboli). Se si adotta questo suggerimento i miei *desiderata*[3] relativi al *grado di conferma* di x da parte di y, denotato da $C(x, y)$, devono essere leggermente modifi-

siamo accentuare maggiormente il valore degli esperimenti cruciali definendo

$$C_{a,b}(h) = (C(h, e_b) \prod_{i=1}^{n} C(h, c_i, e_a))^{1/(n+1)}$$

dove $c_1, c_2, \ldots$ è la sequenza degli esperimenti fatti fra gli istanti t_a e t_b. Abbiamo $t_a < t_1 \leq t_i \leq t_n = t_b$. e_a ed e_b sono tutte le prove (che possono comprendere leggi) *accettate* agli istanti t_a e t_b. Postuliamo $P(c_i, e_b) = 1$ e (per assicurarci che si siano contati solo nuovi esperimenti) $P(c_i, e_a) \neq 1$ e $P(c_i, Uc_j) \neq 1$, ogni volta che $j < i$. («Uc_j» *è l'universalizzazione spazio-temporale di* c_j).

* Oggi sarei propenso a trattare questa questione in modo differente. Molto semplicemente, possiamo distinguere tra la formula «$C(x, y)$» (o «$C(x, y, z)$») e le *applicazioni* di questa formula a quello che intendiamo, intuitivamente, per corroborazione o accettabilità. Sarà allora sufficiente dire che $C(x, y)$ non deve essere interpretato come grado di corroborazione, e non deve essere applicato a problemi di accettabilità, a meno che y non rappresenti i risultati (totali) di sinceri tentativi di confutare x. Cfr. anche il punto *14 della mia Terza nota.

Ho messo qui tra parentesi «totale», perché c'è un'altra possibilità da prendere in considerazione: possiamo limitare i nostri controlli a un certo campo d'applicazione F (cfr. la vecchia appendice I, e l'appendice *VIII); possiamo cosí relativizzare C e scrivere «$C_F(x, y)$». Si può dire, semplicemente, che la corroborazione totale di una teoria è la somma delle sue corroborazioni nei suoi vari domini (indipendenti) d'applicazione.

[1] JOHN G. KEMENY, in «Journal of Symbolic Logic», 18 (1953), p. 297. (Il riferimento di Kemeny è alla mia *Logik der Forschung* cit.).

[2] C. L. HAMBLIN, *Language and the Theory of Information* [Linguaggio e teoria dell'informazione], tesi sottoposta all'Università di Londra nel maggio 1955 (inedita); cfr. p. 62. Il dottor Hamblin produsse la sua definizione indipendentemente dall'articolo del professor Kemeny (al quale fa riferimento nella sua tesi).

[3] *Degree of Confirmation* [Grado di conferma], in «BJPS», 5 (1954), pp. 143 sgg.: cfr. anche p. 334.

cati; in II) e V) dobbiamo sostituire, a ± 1, $\pm\infty$, e la III) diventa:

III) $0 \leq C(x, xy) = C(x, x) = C(x) = -\log_2 P(x) \leq +\infty$.

Gli altri *desiderata* rimangono tali e quali erano.

Il dottor Hamblin suggerisce[4] di definire il grado di conferma per mezzo di

1) $$C(x, y) = \log_2(P(xy)/P(x)P(y))$$

che, per sistemi finiti ma non necessariamente per sistemi infiniti, è lo stesso che

2) $$C(x, y) = \log_2(P(y, x)/P(y)),$$

formula, questa, che ha il vantaggio di rimanere determinata anche se $P(x) = 0$, cosa che può accadere nel caso in cui x sia una teoria universale. La formula relativizzata corrispondente sarebbe

3) $$C(x, y, z) = \log_2(P(y, xz)/P(y, z)).$$

Comunque, come osserva il dottor Hamblin, la definizione 1) non soddisfa il mio *desideratum* VIII *c*), e lo stesso vale per la 2) e la 3). Non risultano soddisfatti neanche i *desiderata* IX *b*) e *c*).

Ora, secondo me, il *desideratum* VIII *c*) segna la differenza tra una misura del potere esplicativo e una misura della conferma. La prima può essere simmetrica in x e in y, la seconda non può esserlo. Infatti, supponiamo che y segua da x (e sostenga x) e che a sia sconfermata da y. In questo caso non sembra soddisfacente il dire che ax è sempre confermata da y tanto bene quanto lo è x. (Ma sembra che non ci sia nessuna ragione per cui ax e x non debbano avere lo stesso potere esplicativo rispetto a y, dal momento che y è completamente spiegata da entrambe). Ecco perché io ritengo che VIII *c*) non dovrebbe essere lasciato cadere.

Cosí, io preferisco considerare la 2) e la 3) come definizioni altamente adeguate di *potere esplicativo* – di $E(x, y)$ e di $E(x, y, z)$ – piuttosto che di grado di conferma. Quest'ultimo

[4] C. L. HAMBLIN, *Language and the Theory of Information* cit., p. 83. Un suggerimento simile (in cui, tuttavia si specifica 2 come base del logaritmo) è contenuto nella recensione del dottor I. J. Good al mio *Degree of Confirmation*; cfr. «Mathematical Review», 16 (1955), p. 376.

può essere definito, in base al potere esplicativo, in molti modi differenti, cosí da soddisfare la VIII c). Uno di questi modi è il seguente (credo però che si possano trovare modi migliori):

4) $$C(x, y) = E(x, y)/(1 + nP(x)P(\bar{x}, y))$$

5) $$C(x, y, z) = E(x, y, z)/(1 + nP(x, z)P(\bar{x}, yz)).$$

Qui possiamo scegliere $n \geq 1$. E se desideriamo che VIII c) abbia un effetto marcato, dobbiamo rendere grande il numero n.

Nel caso in cui x sia una teoria universale con $P(x) = 0$, e y sia una prova empirica, la differenza fra E e C scompare, come nelle mie definizioni originali, secondo quanto è richiesto dal *desideratum* VI). E scompare anche se x segue da y. Cosí, dei vantaggi dell'operare con una misura logaritmica, ne rimane almeno qualcuno: come è stato spiegato da Hamblin, il concetto definito dalla 1) diventa strettamente imparentato con l'idea fondamentale di teoria dell'informazione. Anche God fa alcuni commenti su questo punto (cfr. nota 4).

La transizione dalle vecchie definizioni alle nuove è preservatrice dell'ordine. (Come implicano le osservazioni di Hamblin, questo vale anche per il potere esplicativo). Cosí la differenza è una differenza soltanto metrica.

2. Le definizioni di potere esplicativo, e ancor piú quelle di grado di conferma (o di corroborazione o di accettabilità, o di attestazione, o comunque le si voglia chiamare), dànno naturalmente un pieno peso al «*peso delle prove*» (o al «peso di un argomento», come lo chiamò Keynes nel suo capitolo VI) [*1]. Ciò diventa ovvio con le nuove definizioni, basate sui suggerimenti di Hamblin, definizioni che, se ci interessano le questioni metriche, sembrano presentare vantaggi considerevoli.

3. Tuttavia dobbiamo renderci conto che la metrica della nostra C dipenderà interamente dalla metrica di P. *Ma una metrica soddisfacente di P non può esserci; vale a dire, non può esserci una metrica della probabilità logica, che è basata su considerazioni puramente logiche.* Per mostrare ciò, prendiamo in considerazione la probabilità logica di una qualsiasi

[*1] Cfr. la mia Terza nota.

proprietà fisica misurabile (variabile casuale non-discreta), quale, per prendere l'esempio piú semplice, la lunghezza. Adottiamo il presupposto (favorevole ai nostri oppositori) che dei suoi valori ci siano dati certi limiti finiti, logicamente necessari, *l* e *u*. Supponiamo che ci sia data una funzione di distribuzione per la probabilità logica di questa proprietà, ad esempio una funzione generalizzata di equidistribuzione fra *l* e *u*. Possiamo scoprire che un cambiamento delle nostre teorie, desiderabile dal punto di vista empirico, conduce a una correzione non-lineare della *misura* della nostra proprietà (basata, poniamo, sul metro di Parigi). Allora dev'essere corretta anche la «probabilità logica»; e ciò mostra che la sua metrica dipende dalla nostra conoscenza empirica e non può essere definita a priori, in termini puramente logici. In altre parole, la metrica della «probabilità logica» di una proprietà misurabile dipenderebbe dalla metrica della proprietà misurabile medesima; e poiché quest'ultima è correggibile sulla base di teorie empiriche, non può esistere nessuna misura puramente «logica» della probabilità.

Queste difficoltà possono essere superate, in larga misura ma non del tutto, facendo uso della nostra «conoscenza di fondo» *z*. Ma esse convalidano, secondo me, la significanza dell'approccio topologico sia al problema del grado di conferma sia a quello della probabilità logica [*2].

Però, anche se dovessimo scartare tutte le considerazioni metriche, dovremmo ancora aderire, credo, al concetto di probabilità quale è definito implicitamente dai sistemi d'assiomi ordinari della teoria della probabilità. Tali sistemi mantengono la loro piena significanza, esattamente come la geometria pura (metrica) mantiene la sua significanza anche se non siamo in grado di definire un'asta di un metro in termini di geometria pura (metrica). Questo fatto è particolar-

[*2] Ora credo di aver superato queste difficoltà, per quanto riguarda un sistema *S* (nel senso dell'appendice *IV) i cui elementi siano *asserzioni probabilistiche*; cioè a dire, per quanto riguarda la metrica logica della *probabilità delle asserzioni probabilistiche* o, in altre parole, la metrica logica delle *probabilità secondarie*. Il metodo della risoluzione è risolto nella mia Terza nota, punti 7 sgg., si veda specialmente il punto *13.

Per quanto riguarda le proprietà primarie, io credo che le difficoltà descritte qui nel testo non siano affatto esagerate. (Naturalmente, *z* può aiutare, mettendo in evidenza, o assumendo, che in certi casi siamo di fronte a un insieme finito di possibilità simmetriche o eguali).

mente importante se si tiene presente il bisogno di *identificare l'indipendenza logica con l'indipendenza probabilistica* (teorema speciale della moltiplicazione). Se assumiamo un linguaggio come quello di Kemeny (che, comunque, cessa di valere per proprietà continue) o un linguaggio con asserzioni *relativamente atomiche* (come è indicato nell'appendice I della mia *Logic of Scientific Discovery*) dovremo postulare l'indipendenza per gli enunciati atomici o relativamente atomici (nella misura, naturalmente, in cui non sono «logicamente dipendenti» nel senso di Kemeny). *In base a una teoria probabilistica dell'induzione* viene fuori, allora, che se identifichiamo indipendenza logica e indipendenza probabilistica nel modo qui descritto *non possiamo imparare nulla.* Ma *possiamo imparare* benissimo nel senso delle mie funzioni C. Ciò equivale a dire che possiamo corroborare le nostre teorie.

In relazione a ciò possiamo ancora menzionare due punti.

4. Il primo punto è questo. In base ai miei sistemi d'assiomi per la probabilità relativa[5], $P(x, y)$ può essere considerata come definita per ogni valore di x e di y, compresi valori quali $P(y) = 0$. Piú in particolare, nell'interpretazione logica del sistema, ogni volta che x segue da y, $P(x, y) = 1$ anche se $P(y) = 0$. Non c'è dunque nessuna ragione per dubitare che la nostra definizione funzioni per linguaggi che contengono sia asserzioni singolari sia leggi universali, anche se queste ultime hanno tutte probabilità zero, come accade, ad esempio, se impieghiamo la funzione-misura m di Kemeny, postulando $P(x) = m(x)$. (Nel caso delle nostre definizioni di E e di C, non c'è alcun bisogno di rinunziare ad assegnare peso eguale ai «modelli»; cfr. Kemeny, *op cit.*, p. 307. Al contrario, ogni rinuncia siffatta dev'essere considerata come una deviazione da un'interpretazione *logica*, dal momento che violerebbe l'eguaglianza di indipendenza logica e indipendenza probabilistica, richiesta in 3).

5. Ed ecco il secondo punto. Fra i *desiderata* derivati, ciò che segue non è soddisfatto da tutte le definizioni di «x è confermata da y», proposte da altri autori. Potrebbe perciò

[5] Cfr. «BJPS», 6, pp. 56 sg. (Cfr. anche le pp. 176 e 351). Versioni semplificate sono date in *British Philosophy in the Mid-Century* cit., p. 191, e nella mia *Logic of Scientific Discovery*, appendice *IV.

essere menzionato separatamente, come un decimo *desideratum*[6].

x) Se x è confermata o corroborata o sostenuta da y, cosí che $C(x, y) > 0$, allora *a*), $\bar{x}$ è sempre infirmata da y, vale a dire, $C(\bar{x}, y) < 0$, e, *b*), x è sempre infirmata da $\bar{y}$, cioè, $C(x, \bar{y}) < 0$.

Mi sembra chiaro che questo *desideratum* è una condizione indispensabile di adeguatezza, e che ogni definizione proposta che non lo soddisfi è intuitivamente paradossale.

Terza nota sul grado di corroborazione o di conferma.

In questa nota desidero fare alcuni commenti sul problema del *peso delle prove* e sui *controlli statistici.*

1. La teoria della corroborazione, o «conferma», proposta nelle mie due Note precedenti sul «grado di conferma»[1] è in grado di risolvere con facilità il cosiddetto *problema del peso delle prove.*

Questo problema fu sollevato la prima volta da Peirce e discusso abbastanza dettagliatamente da Keynes, che parla di solito del «peso di un argomento» e della «quantità di prove». Il termine «peso delle prove» è preso da J. M. Keynes e da I. J. Good[2]. Il prendere in considerazione il «peso delle prove» conduce, nell'ambito della teoria soggettivistica della probabilità, a paradossi che, secondo me, sono insolubili all'interno di questa teoria.

[6] Si confronti l'osservazione in «BJPS», 5 (1954), alla fine del primo capoverso di p. 144.

[1] «BJPS», 5 (1954), pp. 143, 324 e 359, e 7 (1957), p. 350. Cfr. anche 6 (1955) e 7 (1956), pp. 244, 249. Al primo capoverso della mia «Seconda nota» si dovrebbe aggiungere un riferimento a un articolo di R. CARNAP e Y. BAR-HILLEL, *Semantic Information* [Informazione semantica], in «BJPS», 4 (1953), pp. 147 sgg. Inoltre, la prima frase della nota 1 di p. 351 si dovrebbe leggere: «*Op. cit.*, p. 83», e non come è ora, perché si tratta del riferimento alla tesi del dottor Hamblin. * (Quest'ultima correzione è stata fatta nella versione stampata in questo libro).

[2] Cfr. C. S. PEIRCE, *Collected Papers*, 1932, vol. 2, p. 421 (pubblicato originariamente nel 1878); J. M. KEYNES, *A Treatise on Probability* cit., pp. 71-78 (cfr. anche pp. 312 sg. «la quantità di prova» e l'*Indice*); I. J. GOOD, *Probability and the Weight of Evidence* [La probabilità e il peso delle prove], 1950, pp. 62 sg. Cfr. anche C. I. LEWIS, *An Analysis of Knowledge and Valuation* [Analisi della conoscenza e della valutazione], 1946, pp. 292-93; e R. CARNAP, *Logical Foundations of Probability* cit., pp. 554-55.

2. Per «teoria soggettivistica della probabilità», o «interpretazione soggettivistica del calcolo della probabilità», intendo una teoria che interpreti la probabilità come una misura della nostra ignoranza o della nostra conoscenza parziale, o, ad esempio, del grado di razionalità delle nostre credenze, alla luce delle prove che abbiamo a disposizione.

(Mi sia concesso di menzionare, fra parentesi, che il termine piú comunemente usato, «grado di credenza razionale», può essere il sintomo di una leggera confusione, dal momento che ciò che realmente si intende è il «grado di razionalità di una credenza». La confusione sorge nel modo seguente. Si comincia con lo spiegare la probabilità come una misura della forza o dell'intensità di una credenza o di una convinzione, intensità misurabile, poniamo, in base alla nostra prontezza nell'accettare le nostre chances in una scommessa. In seguito ci si rende conto che in realtà l'intensità della nostra credenza dipende spesso dai nostri desideri o dai nostri timori piuttosto che da argomentazioni razionali; cosí, con un leggero cambiamento, si interpreta la probabilità come l'intensità, o il grado, di una credenza, *nella misura in cui è giustificabile razionalmente*. Ma a questo stadio, è chiaro che il riferimento all'intensità di una credenza, o al suo grado, diventa un sovrappiú; pertanto a «grado di credenza» si dovrebbe sostituire «grado di razionalità di una credenza». Non si prendano queste osservazioni come se io intendessi che sono pronto ad accettare *qualsiasi* forma dell'interpretazione soggettivistica. Si veda il punto 12, piú avanti, e il capitolo *II del mio *Postscript*).

3. Per risparmiare spazio, spiegherò il problema del peso delle prove limitandomi a dare un esempio dei paradossi che ho menzionato poco fa. Si potrebbe chiamare «*il paradosso della prova ideale*».

Sia z una certa moneta, e sia a l'asserzione: «l'n-esimo lancio di z (non ancora osservato) darà come risultato testa». Nell'ambito della teoria soggettivistica si può assumere che la probabilità assoluta (o primaria) dell'asserzione a sia eguale a ½, cioè a dire:

1) $$P(a) = \tfrac{1}{2}.$$

Ora, supponiamo che e sia una qualche *prova statistica*, cioè a dire un *resoconto statistico* basato sull'osservazione di migliaia o forse anche di milioni di lanci di z, e supponiamo che questa prova e sia *idealmente favorevole* all'ipotesi che z è rigorosamente simmetrica, cioè che è una «buona» moneta, con equidistribuzione. (Si noti che qui e non è il resoconto completo e dettagliato di ciascuno di questi lanci – possiamo supporre che questi resoconti siano andati perduti – ma soltanto un *sommario statistico* del resoconto completo; ad esempio, può essere l'asserzione: «Su un milione di lanci osservati di z, testa è venuto in 500 000 ± 20 casi». Si vedrà dal punto 8, che una prova e' con 500 000 ± 20 casi sarebbe ancora ideale, se si adottano le mie funzioni C ed E; in realtà, dal punto di vista di queste funzioni, e è ideale precisamente perché implica logicamente e'). Per quanto riguarda $P(a, e)$ non abbiamo dunque altra scelta se non quella di assumere che

2) $$P(a, e) = \tfrac{1}{2}.$$

Ciò significa che, alla luce della prova e, la probabilità di ottenere testa rimane invariata; infatti ora abbiamo

3) $$P(a) = P(a, e).$$

Ma secondo la teoria soggettivistica, la 3) significa che, tutto sommato, e è un'informazione (assolutamente) irrilevante rispetto ad a.

Ora tutto ciò è piuttosto sorprendente; perché significa, in termini piú espliciti, che il nostro cosiddetto «*grado di credenza razionale*» *nell'ipotesi a dovrebbe essere lasciato completamente immutato dalla conoscenza probante, e, che abbiamo accumulato*; che l'assenza di qualsiasi prova statistica a proposito di z giustifica esattamente lo stesso «grado di credenza razionale» giustificato dalla ponderosa prova di milioni di osservazioni che, *prima facie*, dovrebbero sostenere, o confermare, o rafforzare, la nostra credenza.

4. Ed ecco le ragioni per cui io non credo che questo paradosso possa essere risolto nell'ambito della teoria soggettivistica.

Il *postulato fondamentale della teoria soggettivistica* è il postulato che i gradi di razionalità delle credenze alla luce di prove esibiscono un *ordine lineare*; che possono essere misurati, come i gradi della temperatura, su una scala unidimensionale. Ma da Peirce a Good, tutti i tentativi di risolvere il problema del peso delle prove nell'ambito della teoria soggettivistica sono proceduti introducendo, oltre alla probabilità, *un'altra misura della razionalità della credenza alla luce delle prove.* È del tutto irrilevante che a questa misura si dia il nome di «un'altra dimensione della probabilità» o di «grado di fiducia che si può prestare alla luce delle prove» o di «peso delle prove». Ciò che invece è rilevante è l'ammissione (implicita) che non è possibile attribuire ordine lineare ai gradi di razionalità delle credenze alla luce di queste prove: che può esserci *piú d'un modo in cui le prove possono influenzare la razionalità di una credenza.* Quest'ammissione è sufficiente a scalzare il postulato fondamentale su cui è basata la teoria soggettivistica.

Cosí l'ingenua credenza che ci sono realmente generi intrinsecamente differenti di entità, alcune delle quali possono essere forse chiamate «grado di razionalità della credenza» e altre «grado di fiducia» o «sostegno delle prove» non è piú in grado di salvare la teoria soggettivistica di quanto non lo sia la credenza, egualmente ingenua, che queste varie misure «esplicano» differenti «*explicanda*»: infatti, la pretesa che qui esista un «*explicandum*» – quale il «grado di credenza razionale» – passibile di «esplicazione» in termini di probabilità, sta in piedi, o cade, con quello che ho chiamato il «postulato fondamentale».

5. Tutte queste difficoltà scompaiono non appena interpretiamo le nostre probabilità *oggettivisticamente.* (Nel contesto di questo articolo non ha alcuna importanza che l'interpretazione oggettivistica sia un'interpretazione *puramente* statistica o un'interpretazione in termini di propensione [3]). Secondo l'interpretazione oggettivistica dobbiamo introdurre b, cioè la formulazione delle condizioni dell'esperimento (le condizioni che definiscono la successione degli esperimenti da cui prendiamo il nostro esempio); ad esempio, b può essere l'informazione: «il lancio in questione sarà un lancio di z, reso casuale [*randomized*] da un movimento rotatorio».

[3] Per l'interpretazione della probabilità «in termini di propensione», si vedano i miei cinque articoli (specialmente *Three Views Concerning Human Knowledge*, *Philosophy of Science: A Personal Report*, ora nel mio libro *Conjectures and Refutations* cit., a cui si fa riferimento nelle note alle pp. 341 e 342).

Inoltre dobbiamo introdurre l'ipotesi probabilistica *oggettivistica* h, cioè a dire, l'ipotesi «$P(a, b) = \frac{1}{2}$»[4].

Dal punto di vista della teoria oggettivistica ciò che soprattutto ci interessa è l'ipotesi h, cioè a dire l'asserzione

$$«P(a, b) = \tfrac{1}{2}».$$

6. Se ora prendiamo in considerazione la prova statistica idealmente favorevole e, che ci ha condotto al «paradosso della prova ideale», è perfettamente ovvio che, dal punto di vista della teoria oggettivistica, e dev'essere considerata come una prova che influisce su h e non come una prova che influisce su a: è idealmente favorevole ad h ed è perfettamente neutrale rispetto ad a. Assumendo che i vari lanci siano *indipendenti o casuali*, per *qualsiasi* prova, e, la teoria oggettivistica dà luogo, in modo perfettamente naturale, al risultato $P(a, be) = P(a, b)$; dunque e è davvero irrilevante per a, in presenza di b.

Siccome e è la prova in favore di h, il nostro problema si trasforma naturalmente nella questione di come la prova e corrobori h (o «confermi» h). La risposta è che se e è una prova idealmente valida, allora sia $E(h, e)$ sia $C(h, e)$, cioè il grado di corroborazione di h, data e, si avvicinerà a 1 se la dimensione del campione su cui è basata e tende all'infinito[5]. Dunque la prova ideale produce un comportamento corrispondentemente ideale di E e di C. Di conseguenza non sorge alcun paradosso, e noi possiamo misurare con perfetta naturalezza *il peso della prova e rispetto all'ipotesi h*, sia mediante $E(h, e)$, sia mediante $C(h, e)$, sia ancora – attenendoci piú strettamente all'idea di Keynes – mediante i valori assoluti dell'una o dell'altra di queste funzioni.

[4] Si noti che «b» può essere interpretata, alternativamente, non come il nome di un'asserzione, ma come il nome di una sequenza di lanci – nel qual caso dovremmo interpretare «a» come il nome di una classe di eventi, piuttosto che come il nome di un'asserzione; ma in ogni caso «h» rimane il nome di un'asserzione.

[5] Sia E sia C sono definite nella mia Prima nota. Qui è sufficiente ricordare che $E(h, e) = (P(e, h) - (P(e)))/(P(e, h) + P(e))$, e che in quasi tutti i casi importanti C si approssima a E. In «BJPS», 5 (1954), p. 324, suggerii di definire

$$C(x, y, z) = (P(y, xz) - P(y, z))/(P(y, xz) - P(xy, z) + P(y, z)).$$

Di qui assumendo che z (la «conoscenza di fondo») sia tautologica o (se si preferisce questo modo di esprimersi) non esista, otteniamo $C(x, y)$.

7. Se, come nel nostro caso, h è un'ipotesi statistica ed e è il resoconto dei risultati di controlli statistici di h, allora $C(h, e)$ è una misura del grado a cui questi controlli hanno corroborato h, esattamente come nel caso di un'ipotesi non statistica.

Si dovrebbe comunque menzionare che, al contrario di quanto accade per un'ipotesi non-statistica, se h è un'ipotesi statistica, qualche volta potrebbe essere molto facile stimare i valori numerici di $E(h, e)$ e anche di $C(h, e)$[6]. (In 8 indicherò brevemente in qual modo potrebbero procedere tali calcoli in casi semplici, compreso, naturalmente, il caso di $h =$ «$p(a, b) = 1$»).

L'espressione

$$4) \qquad P(e, h) - P(e)$$

è d'importanza cruciale per le funzioni $E(h, e)$ e $C(h, e)$; in effetti queste funzioni non sono altro che due modi differenti per «normalizzare» l'espressione 4); esse perciò crescono e decrescono con la 4). Ciò significa che allo scopo di trovare una *buona* asserzione di controllo, e, – cioè un'asserzione che, se è vera, è altamente favorevole a h – dobbiamo costruire un resoconto statistico e tale che, I), e renda $P(e, h)$ – che è la «verisimiglianza» di h data e, di cui parla Fisher – grande, cioè quasi eguale a 1, e tale che, II), e renda $P(e)$ piccola, cioè quasi eguale a 0. Avendo costruito una siffatta asserzione di controllo, e, dobbiamo sottoporre e stessa a controlli empirici. (Cioè a dire, dobbiamo *tentare* di trovar prove che confutino e).

Ora, sia h l'asserzione

$$5) \qquad P(a, b) = r$$

e sia e l'asserzione «In un campione, che ha la dimensione n e soddisfa la condizione b (o che è preso a caso dalla popola-

[6] È molto probabile che in casi calcolabili numericamente si trovi che le funzioni logaritmiche suggerite da Hamblin e Good (cfr. la mia Seconda nota) rappresentano miglioramenti nei confronti delle funzioni da me suggerite originariamente. Inoltre, si dovrebbe osservare che da un punto di vista numerico (ma non dal punto di vista teorico che sta sotto i miei *desiderata*) le mie funzioni e il «grado di sostegno fattuale» di Kemeny e Oppenheim porteranno, nella maggioranza dei casi, a risultati simili.

zione b) a è soddisfatta in $n(r \pm \delta)$ casi»[*1]. Allora, specialmente per i piccoli valori di δ, possiamo porre

$$6) \qquad P(e) \approx 2\delta\ ^{*2}.$$

Possiamo addirittura porre $P(e) = 2\delta$: ciò infatti significherebbe che assegnamo probabilità eguali – e perciò le probabilità $1/(n+1)$ – a ciascuna delle $n+1$ proporzioni $0/n$, $1/n, ..., n/n$, in cui una proprietà a può comparire in un campione che ha grandezza n. Segue che dovremmo assegnare la probabilità $P(e) = (2d+1)/(n+1)$ a un resoconto statistico e che ci dica che $m+d$ membri di una popolazione della grandezza n, hanno la proprietà a, cosicché ponendo $\delta = (d+½)/(n+1)$, otteniamo $P(e) = 2\delta$. (L'equidistribuzione descritta qui è quella che Laplace presuppone nella derivazione della sua regola di successione. È adeguata per valutare la probabilità *assoluta*, $P(e)$, se e è un *resoconto statistico su un campione.* Ma è inadeguata per valutare la probabilità relativa $P(e, h)$ dello stesso resoconto, data un'ipotesi h secondo la quale il campione è il prodotto di un esperimento ripetuto n volte i cui risultati possibili compaiono, ciascuno, con una certa probabilità. In questo caso, infatti, è adeguato assumere una distribuzione combinatoria – cioè una distribuzione bernoulliana – invece di una distribuzione laplaciana). Dalla 6) vediamo che, se desideriamo rendere piccola $P(e)$, dobbiamo rendere piccola δ.

D'altra parte, $P(e, h)$ – la verisimiglianza di h – sarà vicina a 1, *o* se δ è relativamente grande (grosso modo se $\delta \approx ½$) *o* – nel caso in cui δ sia piccola – se n, la grandezza del campione, è un numero grande. Troviamo perciò che $P(e, h) - P(e)$, e dunque le nostre funzioni E e C, possono essere grandi solo se δ è piccola e n grande; o, in altre parole, se e è un resoconto statistico *che asserisce una buona conformità* [*fit*] *in un vasto campione.*

[*1] Si assume qui che se la dimensione del campione è n, la frequenza all'interno di questo campione può essere determinata, nel migliore dei casi, con un'imprecisione di $\pm 1/2n$, cosicché, per una n finita abbiamo $\delta \geq 1/2n$. (Per grandi campioni, questo conduce semplicemente a $\delta > 0$).

[*2] La formula 6) è una conseguenza diretta del fatto che il contenuto informativo di un'asserzione cresce con la sua precisione, cosicché la sua probabilità logica assoluta cresce col suo grado d'imprecisione; cfr. §§ 34-37. (A questo aggiungiamo il fatto che, nel caso di un campione statistico, il grado d'imprecisione e la probabilità hanno gli stessi minimi e massimi, 0 e 1).

Cosí l'asserzione di controllo e sarà tanto migliore quanto maggiore sarà la sua precisione (che sarà l'inversa di 2δ) e, di conseguenza, la sua confutabilità o contenuto, e quanto piú grande sarà la misura n del campione, cioè a dire il materiale statistico indispensabile per controllare e. E l'asserzione di controllo e, cosí costruita, può allora essere confrontata con i risultati delle osservazioni effettive.

Vediamo che l'accumulazione di prove statistiche, se queste sono favorevoli, farà aumentare E e C. Conseguentemente, E o C possono essere prese come misure del peso delle prove in favore di h; altrimenti i loro valori assoluti possono essere presi come misure del peso delle prove rispetto ad h.

8. Siccome il valore numerico di $P(e, h)$ può essere determinato con l'aiuto del teorema binomiale (o dell'integrale di Laplace) e siccome, specialmente per una piccola δ, possiamo, per la 6), porre $P(e)$ eguale a 2δ, è possibile calcolare il valore numerico di $P(e, h)-P(e)$ e anche di E.

Inoltre, per ogni n dato, possiamo calcolare un valore $\delta = P(e)/2$ per cui $P(e, h)-P(e)$ diventerebbe un massimo. (Per $n = 1\,000\,000$, otteniamo $\delta = 0{,}0018$). Analogamente, possiamo calcolare un altro valore di $\delta = P(e)/2$, per cui E diventerebbe un massimo. (Per lo stesso n, otteniamo

$$\delta = 0{,}00135, \quad \text{e} \quad E(h, e) = 0{,}9946).$$

Per una legge universale h, tale che $h =$ «$P(a, b) = 1$» che ha superato n controlli severi, i quali hanno dato *tutti* il risultato a, otteniamo, prima $C(h, e) = E(h, e)$ tenuto conto di $P(h) = 0$; e inoltre, valutando $P(e)$ con l'aiuto della distribuzione laplaciana e di $d = 0$, otteniamo $C(h, e) = n/(n+2) = 1-(2/(n+2))$. Si dovrebbe in ogni caso ricordare che le teorie scientifiche non-statistiche hanno di regola una forma totalmente differente da quella dell'h descritta qui; inoltre, se vengono fatte entrare a forza in questa forma, allora ogni caso a, e perciò la «prova» e, diventerebbe essenzialmente non-osservativo [*3].

[*3] Si potrebbe comunque parlare del grado di corroborazione di una teoria *rispetto a un dominio di applicazione*, nel senso delle appendici I e *VIII, e allora si potrebbe usare il metodo di calcolo descritto qui. Ma poiché ignora la microstruttura di contenuto e probabilità, questo metodo è molto rozzo, per quanto riguarda le teorie non-statistiche. Cosí, in questi casi possiamo fidarci del metodo comparativo spiegato nella nota 7 alla Prima nota. Si dovrebbe mettere l'accento sul fatto che formulando una teoria nella forma «$(x)Ax$», siamo in generale costretti a fare di «A» un predicato alta-

9. Si può vedere da tutto ciò che, come quello di tutte le altre ipotesi, il controllo di un'ipotesi statistica è deduttivo: prima si costruisce un'asserzione di controllo in modo che segua (o quasi segua) dall'ipotesi anche se il suo contenuto, o controllabilità, è alto; poi la si mette a confronto con l'esperienza.

È interessante osservare che se e fosse scelta in modo da costituire un resoconto completo delle nostre osservazioni – un resoconto completo, poniamo, di una lunga successione di lanci: testa, testa, croce,... ecc., sequenza composta di mille elementi – allora, come prova di un'ipotesi statistica, e sarebbe inutile; infatti *qualsiasi* sequenza effettiva di lunghezza n ha la stessa probabilità di qualsiasi altra sequenza (data h). Cosí dovremmo arrivare allo stesso valore di $P(e, h)$ e dunque di E e C – cioè, $E = C = 0$ – sia che e contenga, poniamo, *soltanto* teste, sia che contenga esattamente per metà teste e per metà croci. Ciò mostra che, come prova favorevole o contraria ad h, non possiamo usare la nostra conoscenza osservativa *totale*, ma dobbiamo estrarre, dalla nostra conoscenza osservativa, quelle asserzioni *statistiche* che o seguono da h o hanno almeno un'alta probabilità, data h. Cosí, se e consiste dei risultati completi di una lunga sequenza di lanci, allora, *in questa forma*, e è completamente inutile come asserzione di controllo di un'ipotesi statistica. Ma si può usare un'asserzione logicamente piú debole della *frequenza media* di testa, traendola dalla stessa e. Infatti un'ipotesi probabilistica può spiegare soltanto i ritrovamenti *interpretati statisticamente* e può perciò essere controllata e corroborata soltanto per mezzo di estratti statistici, e non, ad esempio, dalla

mente complesso e non osservativo. (Cfr. anche appendice *VII, specialmente la nota 1).

Io credo che sia abbastanza interessante menzionare, qui, che il metodo sviluppato nel testo ci permette di ottenere *risultati numerici* – cioè gradi numerici di corroborazione – in tutti i casi contemplati da Laplace e da quei logici moderni che introducono sistemi linguistici artificiali nella vana speranza di ottenere, in questo modo, una metrica a priori per la probabilità dei loro predicati, credendo, come credono, che ciò sia necessario al fine di ottenere risultati numerici. Tuttavia, io ottengo risultati numerici di corroborazione in molti casi che vanno molto al di là di questi sistemi linguistici, dal momento che i predicati misurabili non creano, per il nostro metodo, alcun problema. (Ed è un gran vantaggio il non dover introdurre una metrica per la probabilità logica di nessuno dei «*predicati*» di cui si tratta; cfr. la mia critica al punto 3 della Seconda nota. Cfr. anche la mia seconda prefazione, 1958).

«totalità delle prove disponibili», quando questa totalità consista di un resoconto completo delle osservazioni; e non lo può fare neppure se le varie interpretazioni statistiche di questa totalità possono essere usate come eccellenti, e ponderose, asserzioni di controllo [*4].

La nostra analisi mostra cosí che i nostri metodi sono essenzialmente ipotetico-deduttivi e, come tutti gli altri metodi della scienza, procedono mediante l'eliminazione delle ipotesi inadeguate.

10. Se δ è molto piccola, e perciò è molto piccola anche $P(e)$ – e questo è possibile solo per grossi campioni – abbiamo, tenuto conto della 6),

$$7) \qquad P(e,h) \approxeq P(e,h)-P(e).$$

In questo caso, e solo in questo caso, sarà perciò possibile accettare la funzione di verisimiglianza di Fisher come una misura adeguata del grado di corroborazione. Viceversa possiamo interpretare la nostra misura del grado di corroborazione come *una generalizzazione della funzione di verisimiglianza di Fisher*, generalizzazione che copre i casi, quali il caso di δ relativamente grande, in cui la funzione di verisimiglianza di Fisher diventerebbe chiaramente inadeguata.

[*4] Questo punto presenta considerevole interesse in relazione al problema del valore numerico delle probabilità assolute, valore indispensabile per la determinazione di $C(x, y)$ – in relazione cioè al problema discusso nel punto 3 della Seconda nota e anche in questa (si veda, specialmente, la nota *1). Se dovessimo determinare la probabilità assoluta della «totalità delle prove disponibili», consistenti della congiunzione di un gran numero di resoconti dell'osservazione, dovremmo conoscere la probabilità assoluta (o «ampiezza») di ciascuno di questi resoconti, allo scopo di formare il loro prodotto sotto l'assunzione (discussa nell'appendice *VII) dell'assoluta indipendenza di questi resoconti. Ma per determinare la probabilità assoluta di un estratto statistico non dobbiamo fare alcuna assunzione, né a proposito della probabilità assoluta dei resoconti dell'osservazione, né a proposito della loro indipendenza. È infatti chiaro, anche senza presupporre una distribuzione laplaciana, che la 6) deve valere per piccoli valori di δ, semplicemente, perché il *contenuto* di *e* deve sempre essere una misura della sua precisione (cfr. § 36) e cosí la probabilità assoluta dev'essere misurata dall'*ampiezza* di *e*, che è 2δ. Dunque, una distribuzione laplaciana si può accettare solo come la piú semplice assunzione di equiprobabilità che conduce alla 6). Si può menzionare, in questo contesto, che della distribuzione laplaciana si può dire che è basata su un *universo di campioni*, piuttosto che su un universo di cose o di eventi. L'universo di campioni scelto dipende, naturalmente, dall'ipotesi che si deve controllare. È all'interno di ciascun universo di campioni che un'assunzione di equiprobabilità conduce a una distribuzione laplaciana (o «rettangolare»).

Infatti la verisimiglianza di h alla luce della prova statistica e, non dovrebbe certamente raggiungere un valore vicino al suo massimo, soltanto perché (o in parte perché) la prova statistica disponibile e mancava di precisione.

È insoddisfacente, per non dire paradossale, che la prova statistica e, basata su un milione di lanci e $\delta = 0{,}00135$, possa avere come risultato *la stessa verisimiglianza* (da un punto di vista numerico) – cioè, $P(e, h) = 0{,}9930$ – che avrebbe come risultato la prova statistica e', basata soltanto su un centinaio di lanci e su $\delta = 0{,}135$ [*5]. (Ma è perfettamente soddisfacente trovare che $E(h, e) = 0{,}9946$, mentre $E(h, e') = 0{,}7606$).

11. Si dovrebbe osservare che la probabilità logica assoluta di una legge universale h – cioè, $P(h)$ – sarà, in generale, zero in un universo infinito. Per questa ragione $P(e, h)$ – cioè, la verisimiglianza di h – diventerà indefinita nella maggior parte dei sistemi di probabilità, perché nella maggior parte dei sistemi $P(e, h)$ è definita come $P(e, h)/P(h) = 0/0$. Abbiamo perciò bisogno di un calcolo formale della probabilità che dia luogo a valori definiti per $P(e, h)$, anche se $P(h) = 0$, e che sempre e in modo non ambiguo dia come risultato $P(e, h) = 1$ ogni volta che e segue (o «quasi segue») da h. Un sistema, che risponde a queste esigenze, fu da me pubblicato qualche tempo fa [7].

12. La nostra $E(h, e)$ può essere adeguatamente interpretata come una misura del potere esplicativo di h rispetto ad e, anche se e non è un resoconto dei tentativi genuini e sinceri di confutare h. Ma il nostro $C(h, e)$ può essere adeguatamente interpretato come grado di corroborazione di h

[*5] La «verisimiglianza» di Fisher, si rivela, in molti casi, intuitivamente insoddisfacente. Supponiamo che x sia «Il prossimo lancio di questo dado sarà un sei». Allora, la verisimiglianza di x alla luce della prova y sarà 1, e perciò, se prendiamo y nel significato, ad esempio, di «Il prossimo lancio sarà pari», o «Il prossimo lancio sarà un numero > 4», o anche, «Il prossimo lancio sarà un numero diverso da 2», sarà al suo valore massimale. (I valori di $C(x, y)$ sono, a quanto sembra, soddisfacenti: sono rispettivamente $3/8$, $5/7$ e $1/10$).

[7] «BJPS», 6 (1955), specialmente pp. 56 sg. Una forma semplificata del sistema d'assiomi si può trovare nei miei articoli *Philosophy of Science: A Personal Report* cit., p. 191 e *The Propensity Interpretation*, ecc., a cui si fa riferimento nella nota 3. (Nell'ultimo articolo, a p. 67, nota 3, all'ultima occorrenza di «<» si dovrebbe sostituire «≠», e in B e C, dopo le seconde frecce, dovrebbe cominciare una nuova riga). * Si vedano le mie nuove appendici *IV e *V.

– o della razionalità della nostra credenza in *h* alla luce dei controlli – soltanto se *e* consiste di resoconti dei risultati di sinceri tentativi di confutare *h*, e non dei tentativi di verificarla.

Come ho accennato nella frase precedente, io suggerisco che, mentre è un errore pensare che la probabilità possa essere interpretata come una misura della razionalità delle nostre credenze (interpretazione, questa, esclusa dal paradosso della prova perfetta), il grado di corroborazione può essere interpretato in questo modo[8]. Per quanto riguarda il calcolo della probabilità, esso ha un grandissimo numero di interpretazioni differenti[9]. Anche se tra queste interpretazioni non si trova il «grado di credenza razionale», c'è un'*interpretazione logica* che considera la probabilità come una generalizzazione della deducibilità. Ma questa probabilità logica ha ben poco da fare con le nostre stime ipotetiche delle chances o probabilità; infatti le asserzioni probabilistiche nelle quali esprimiamo queste stime sono sempre apprezzamenti ipotetici delle *possibilità oggettive* inerenti alla situazione particolare, alle condizioni oggettive della situazione: ad esempio all'apparato sperimentale. Queste stime ipotetiche (che non sono derivabili da nient'altro, ma sono il frutto di libere congetture, anche se possono essere state suggerite da considerazioni di simmetria o da materiale statistico) possono, in molti casi importanti, essere sottoposte a controlli statistici. Non sono mai stime della nostra nescienza: il punto di vista opposto, come vide cosí chiaramente Poincaré, è la conseguenza di una visione deterministica (magari inconsapevole) del mondo[10].

Da questo punto di vista uno «scommettitore razionale» tenta sempre di stimare le *chances oggettive*. Le chances che è pronto ad accettare non rappresentano una misura del suo «grado di credenza» (come si suppone di solito): sono, piuttosto, l'oggetto della sua credenza. Egli crede che tali chances esistano oggettivamente: crede in un'ipotesi probabilistica *h*. Se desideriamo misurare comportamentisticamente il

[8] Cfr. «BJPS», 6 (1955), p. 55 (il titolo del paragrafo).
[9] Cfr. la mia nota in «Mind», 47 (1938), pp. 275 sgg.
[10] H. POINCARÉ, *Science and Method*, 1914, IV, I. (Questo capitolo fu pubblicato originariamente in «La revue du mois», 3, 1907, pp. 257-76, e in «The Monist», 22, 1912, pp. 31-52).

grado della sua credenza (in queste chances, o in qualsiasi altra cosa) dobbiamo determinare, poniamo, quale proporzione delle sue fortune sia pronto a rischiare in una scommessa, data uno a uno, che la sua credenza – la sua stima delle chances – è corretta, sempre che ciò possa essere accertato.

Per quanto riguarda il grado di corroborazione, esso non è altro che una misura del grado a cui un'ipotesi *h* è stata controllata e del grado a cui ha superato i controlli. Non deve pertanto essere interpretato come un grado della razionalità della nostra credenza nella *verità* di *h*; in effetti, sappiamo che ogni volta che *h* è logicamente vera, si ha $C(h, e) = 0$. Piuttosto, è una misura della razionalità dell'*accettazione*, in via di tentativo, di una congettura [*guess*] problematica, sapendo che si tratta di una congettura: ma di una congettura che è stata sottoposta a esami minuziosi.

*13. I dodici punti precedenti costituiscono la Terza nota, quale è stata pubblicata nel «BJPS». Allo scopo di rendere piú esplicite alcune delle considerazioni formali che sono implicite in questa nota, possiamo aggiungere ancora due osservazioni.

Il primo problema che ho presente è, ancora una volta, il problema della *metrica* della probabilità logica (cfr. la Seconda nota, punto 3) e la sua relazione con la distinzione tra quelle che chiamerò asserzioni probabilistiche primarie e asserzioni probabilistiche secondarie. La mia tesi è che, al livello secondario, la distribuzione di Bernoulli e quella di Laplace mettono a nostra disposizione una *metrica*.

Possiamo operare con un sistema $S_1 = \{a, b, c, a_1, b_1, c_1, \ldots\}$ di elementi (nel senso del nostro sistema di postulati dell'appendice *IV). Questi elementi daranno origine ad asserzioni probabilistiche della forma «$p(a, b) = r$». Possiamo chiamarle «asserzioni probabilistiche primarie». Queste asserzioni probabilistiche primarie possono ora essere considerate come gli elementi di un sistema secondario di elementi, $S_2 = \{e, f, g, h, \ldots\}$, cosicché, ora «$e$», «$f$», ecc. sono nomi di asserzioni della forma «$p(a, b) = r$».

Ora il teorema di Bernoulli ci dice grosso modo: sia *h* «$p(a, b) = r$»; allora, se *h* è vera, è estremamente probabile che in una lunga sequenza di ripetizioni delle condizioni *b*, la frequenza dell'occorrenza di *a* sarà eguale, o molto vicina, a r. Supponiamo che «$\delta_r(a)_n$» denoti l'asserzione che a comparirà in una lunga sequenza di n ripetizioni con frequenza $r \pm \delta$. Allora il teorema di Bernoulli dice che la probabilità di $\delta_r(a)_n$ si approssimerà a 1 col crescere di n, data b, cioè, dato che sia $p(a, b) = r$. (Dice anche che questa probabilità si approssimerà a 0, dato che sia $p(a, b) = s$, ogni volta che s cade fuori di $r \pm \delta$, cosa che è importante per la confutazione delle ipotesi probabilistiche).

Ora, ciò significa che possiamo scrivere il teorema di Bernoulli sotto forma di un'asserzione (secondaria) di probabilità *relativa* intorno agli elementi g e h di S_2; ciò vuol dire che possiamo scriverla nella forma

$$\lim_{n \to \infty} p(g, h) = 1$$

dove $g = \delta_r(a)_n$ e dove h è l'informazione che $p(a, b) = r$; cioè a dire: h è un'asserzione probabilistica primaria e g è un'asserzione primaria di *frequenza relativa.*

Queste considerazioni mostrano che dobbiamo ammettere, in S_2, *asserzioni frequenziali* quali g, vale a dire $\delta_r(a)_n$, e assunzioni probabilistiche, o stime ipotetiche di probabilità, quali h. Per questa ragione sembra sia appropriato, nell'interesse di un S_2 omogeneo, identificare tutte le asserzioni probabilistiche che formano gli elementi di S_2, con *asserzioni frequenziali* o, in altre parole, assumere, per le asserzioni probabilistiche *primarie* $e, f, g, h, \ldots$, che formano gli elementi di S_2, qualche specie di *interpretazione frequenziale della probabilità.* Nel medesimo tempo possiamo assumere l'*interpretazione logica della probabilità* per le asserzioni probabilistiche della forma

$$P(g, h) = r$$

cioè a dire per le asserzioni probabilistiche *secondarie* che fanno asserzioni sul grado di probabilità delle asserzioni probabilistiche primarie, g e h.

Anche se non possiamo avere una metrica logica (o assoluta) delle asserzioni probabilistiche primarie, vale a dire, anche se può darsi che non abbiamo nessuna idea del valore di $p(a)$ o di $p(b)$, possiamo però avere una metrica logica o assoluta delle asserzioni probabilistiche secondarie; questa metrica ci è fornita dalla distribuzione laplaciana, secondo la quale $P(g)$, cioè la probabilità assoluta di g, cioè ancora, di $\delta_r(a)_n$, è eguale a 2δ, sia che g sia stata osservata empiricamente sia che si tratti di un'ipotesi, cosicché la tipica ipotesi probabilistica, h, ottiene la probabilità $P(h) = 0$, perché h ha la forma «$p(a, b) = r$», con $\delta = 0$. Dal momento che il metodo di Bernoulli ci consente di calcolare il valore della probabilità relativa $P(g, h)$ per mezzo di un'analisi puramente matematica, possiamo considerare le probabilità relative $P(g, h)$ come determinate, in modo analogo, su basi puramente logiche. Sembra perciò completamente adeguato adottare, a livello secondario, l'interpretazione logica del calcolo formale della probabilità.

Riassumendo, possiamo considerare i metodi di Bernoulli e Laplace come metodi che tendono a stabilire una metrica puramente logica delle probabilità a livello secondario, indipendentemente dal fatto che esista o no una metrica logica delle probabilità a livello primario. Il metodo di Bernoulli determina, con ciò, la metrica logica delle probabilità relative (principalmente: verisimiglianza secondaria delle ipotesi primarie) e quello di Laplace la metrica logica delle probabilità assolute (principalmente: dei resoconti statistici sui campioni).

Non c'è dubbio che i loro sforzi fossero in larga misura diretti a fondare una teoria probabilistica dell'induzione; certamente tendevano a identificare C con p. Inutile dire che io credo che in questo avessero torto: le teorie statistiche, come tutte le altre teorie, sono ipotetico-deduttive. E come tutte le altre ipotesi, le ipotesi statistiche si controllano tentando di falsificarle: tentando di ridurre la loro verisimiglianza secondaria a zero, o a quasi zero. Il loro «grado di corroborazione», C, presenta interesse solo se è il risultato di tali controlli; nulla infatti è piú facile, quando desideriamo farlo, che selezionare le prove statistiche in modo che siano *favorevoli* a un'ipotesi statistica.

*14. Giunti alla fine di quest'analisi, si potrebbe benissimo chiedere se io non abbia inavvertitamente cambiato il mio credo. Può infatti sembrare che nulla ci impedisca di chiamare $C(h, e)$ la «probabilità induttiva di h, data e», o – se ci sembra che questo possa indurci in errore, tenuto conto del fatto che C non obbedisce alle leggi del calcolo della probabilità – «il grado della razionalità della nostra credenza in h, data e». Un critico induttivista benevolo potrebbe addirittura congratularsi con me per aver risolto, con la mia funzione C, l'annoso problema dell'induzione, e per averlo risolto *in un senso positivo*; per aver finalmente stabilito, con la mia funzione C, la validità del ragionamento induttivo.

La mia risposta sarebbe la seguente: non ho nulla in contrario a che si dia a $C(h, e)$ il nome che si preferisce, adatto o inadatto che sia; fintanto che la terminologia non ci induce in errore sono perfettamente indifferente nei suoi confronti. E non faccio obiezioni – fintanto che non ci induce in errore – a un'estensione (inavvertita o no) del significato di «induzione». Ma devo insistere sul fatto che $C(h, e)$ può essere interpretato come il grado di corroborazione, solo se e è *un resoconto dei controlli piú severi che siamo stati in grado di escogitare*. Questo è il punto che segna la differenza fra l'atteggiamento dell'induttivista, o verificazionista, e il mio atteggiamento. L'induttivista o verificazionista vuole che la sua ipotesi sia *affermata*. Spera di renderla piú *solida* per mezzo della sua prova e, e cerca la «*solidità*», la «*conferma*». Nella migliore delle ipotesi può rendersi conto che nella nostra scelta di e non dobbiamo lasciarci guidare dai pregiudizi: che non dobbiamo ignorare i casi sfavorevoli, e che e deve comprendere i resoconti della nostra conoscenza osservativa *totale*, sia di quella favorevole sia di quella sfavorevole. (Si noti che l'esigenza fatta valere dall'induttivista, che e debba comprendere la nostra conoscenza osservativa totale, non può essere rappresentata in nessun formalismo. È un'esigenza non-formale, una condizione di adeguatezza che dev'essere soddisfatta se desideriamo *interpretare* $p(h)$ come il *grado della nostra conoscenza imperfetta* di h).

Contro quest'atteggiamento induttivistico io asserisco che $C(h, e)$ non dev'essere interpretato come il grado di corroborazione di h da parte di e, a meno che i resoconti dei risultati non mostrino la *sincerità dei nostri sforzi di scalzare h*. L'esigenza della sincerità non può essere formalizzata piú di quanto non possa esserlo la richiesta induttivistica secondo cui e dovrebbe rappresentare la totalità della nostra conoscenza osservativa. Tuttavia, se *e non* è un resoconto dei risultati dei nostri sinceri tentativi di scalzare h, pensando di poter interpretare $C(h, e)$ come grado di corroborazione, o come qualcosa di simile, non faremo altro che ingannarci.

Il mio critico benevolo potrebbe replicare di non essere tuttavia ancora in grado di vedere le ragioni per cui la mia funzione *C* non debba essere considerata come una soluzione positiva del classico problema dell'induzione. Infatti, potrebbe dire, la mia risposta dovrebbe essere perfettamente accettabile da parte dell'induttivista classico, visto che essa consiste puramente e semplicemente di un'esposizione del cosiddetto «metodo dell'induzione per eliminazione», di un metodo induttivo, cioè, che era ben noto a Bacone, Whewell e Mill e che non è ancora stato dimenticato neppure da qualcuno dei teorici dell'induzione probabilistica (anche se può ben darsi che il mio critico ammetta che questi teorici non sono stati capaci di incorporare effettivamente tale metodo nelle loro teorie).

La mia reazione a questa risposta sarebbe una reazione di rincrescimento di fronte ai miei continui fallimenti di spiegare con sufficiente chiarezza il mio punto principale. Infatti, il solo scopo dell'eliminazione, difesa da tutti questi induttivisti, era quello di *fondare nel modo piú saldo possibile la teoria sopravvissuta.* Infatti, pensavano, questa teoria dev'essere la teoria *vera* (o forse, nella misura in cui non siamo riusciti a eliminare completamente ogni teoria, eccetto quella vera, soltanto una teoria *altamente probabile*).

Contro questo punto di vista, io non penso che potremo mai ridurre seriamente, per eliminazione, il numero delle teorie rivali, dal momento che questo numero rimane sempre infinito. Ciò che facciamo o dovremmo fare – è *attenerci, per il momento, alla piú improbabile delle teorie che sopravvivono* o, piú precisamente, a quella teoria che può essere controllata nel modo piú severo. «*Accettiamo*» questa teoria come un'ipotesi di lavoro, ma soltanto nel senso che la scegliamo come quella degna di essere sottoposta a ulteriori critiche, e ai controlli piú severi che possiamo escogitare.

Prendendo la cosa dal lato positivo, possiamo forse essere autorizzati a dire che la teoria che sopravvive è la teoria migliore – e la teoria meglio controllata – fra tutte quelle che conosciamo.

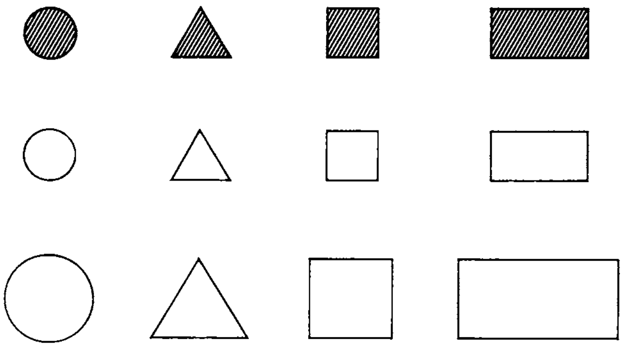
Appendice *x

Universali, disposizioni e necessità naturale o fisica

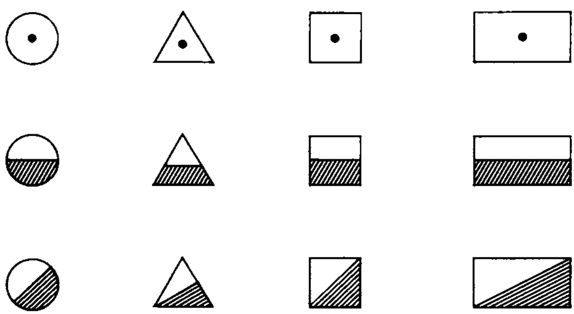
1. La dottrina fondamentale, che corre sotto tutte le teorie dell'induzione, è *la dottrina del primato delle ripetizioni*. Tenendo presente l'atteggiamento di Hume, possiamo distinguere due varianti di questa dottrina. La prima (criticata da Hume) può essere chiamata la dottrina del primato logico delle ripetizioni. Secondo questa dottrina, la ripetizione dei casi fornisce una specie di *giustificazione* all'accettazione di una legge universale. (L'idea di ripetizione è collegata, di regola, a quella di probabilità). La seconda (che Hume sosteneva) può essere chiamata la dottrina del primato temporale (e psicologico) delle ripetizioni. Stando a questa seconda dottrina le ripetizioni, anche se non dovessero riuscire a procurare una qualsiasi specie di *giustificazione* a una legge universale e alle aspettative e alle credenze che essa reca con sé [*entails*], tuttavia di fatto inducono e *suscitano* in noi queste aspettative e queste credenze, per quanto poco «giustificato» o «razionale» sia questo fatto (o questa credenza).

Entrambe le varianti di questa dottrina del primato delle ripetizioni, la dottrina piú forte del primato logico e quella, piú debole, del primato temporale (o causale, o psicologico), sono insostenibili. Ciò si può mostrare con l'aiuto di due argomentazioni tra loro completamente differenti.

La mia prima argomentazione contro il primato delle ripetizioni è la seguente. Tutte le ripetizioni che esperiamo sono *ripetizioni approssimative*; e dicendo che una ripetizione è approssimativa intendo che la ripetizione B di un evento A non è identica ad A, o indistinguibile da A, ma è *piú o meno simile* ad A. Ma se la ripetizione è basata, cosí, su una pura e semplice similarità, dovrà essere partecipe di una delle principali caratteristiche della similarità, cioè a dire della relatività. Due cose che sono simili sono sempre simili per certi aspetti. Questo punto può essere illustrato da una semplice figura:



Osservandola, vediamo che alcune figure sono simili rispetto all'ombreggiatura (al tratteggio) o all'assenza di ombreggiatura; altre sono simili rispetto alla forma, e altre sono simili rispetto alla grandezza. La tavola potrebbe essere estesa in questo modo:



Si può facilmente vedere che non c'è limite alle specie possibili di similarità.

Queste figure mostrano che le cose possono essere simili per *aspetti differenti*, e che due figure qualsiasi che sono simili da un punto di vista, possono essere dissimili da un altro. Generalmente, la similarità, e con essa la ripetizione, presuppongono sempre l'adozione di un *punto di vista*: alcune similarità o ripetizioni ci colpiscono se ci interessa un certo problema, altre se ci interessa un altro problema. Ma se la similarità e la ripetizione presuppongono l'adozione di un punto di vista, o di un interesse, o di un'aspettativa, è logicamente necessario che i punti di vista, o gli interessi, o le aspettative siano, tanto logicamente quanto temporalmente (o causalmente o psicologicamente), primi rispetto alla ripetizione. Ma questo risultato distrugge sia la dottrina del primato logico sia quella del primato temporale delle ripetizioni[1].

Possiamo aggiungere l'osservazione che dato un qualsiasi gruppo o insieme finito di cose, per quanto variamente le abbiamo scelte, possiamo sempre, con un po' d'ingegnosità, trovare punti di vista tali che tutte le cose che appartengono a quell'insieme, considerate da uno di questi punti di vista, siano simili (o parzialmente eguali): ciò vuol dire che di una ripetizione di una cosa qualsiasi si può dire qualsiasi cosa. Ciò mostra quanto sia ingenuo considerare la ripetizione come qualcosa di definitivo, o di dato. Il punto qui fatto valere è strettamente connesso con il fatto (menzionato nell'appendice *VII, nota 9 – cfr. la proprietà *B*) che per *qualsiasi* sequenza finita data di zeri e di uno è possibile trovare una regola o «legge» matematica per costruire una sequenza infinita tale che cominic con la sequenza finita data.

Vengo ora alla mia seconda argomentazione contro il primato delle ripetizioni. Eccola. Ci sono leggi e teorie che hanno un carattere completamente diverso da quello di «Tutti i cigni sono bianchi», anche se possono essere formulate in modo simile. Si prenda l'antica teoria atomistica. Non c'è dubbio che essa possa venire espressa (in una delle sue forme piú semplici) come «Tutti i corpi materiali sono composti di corpuscoli». È chiaro tuttavia che la forma «tutti» è, nel caso di questa legge, relativamente insignificante. Ecco che cosa intendo. Il problema consistente nel mostrare che un singolo corpo fisico – poniamo, un pezzo di ferro – è composto di atomi o «corpuscoli» è almeno tanto difficile quanto quello consistente nel mostrare che *tutti* i cigni sono

[1] Alcune illustrazioni di questo argomento, in quanto diretto contro la dottrina del primato temporale delle ripetizioni, cioè contro Hume, si possono trovare nei §§ IV e V del mio scritto *Philosophy of Science: A Personal Report*, ora compreso, con un titolo diverso, come capitolo I del mio *Conjectures and Refutations* cit.

bianchi. In entrambi i casi la nostra asserzione trascende ogni esperienza che si basi sull'osservazione. Lo stesso accade con quasi tutte le teorie scientifiche. Nemmeno di *un solo* corpo fisico possiamo mostrare direttamente che in assenza di forze si muove secondo una linea retta, o che attrae (o è attratto da) un altro corpo fisico secondo la legge dei quadrati inversi. Tutte queste teorie descrivono quelle che potremmo chiamare le *proprietà strutturali del mondo* e tutte trascendono ogni possibile esperienza. La difficoltà, con queste teorie strutturali, non è tanto quella di fondare l'universalità della legge sulla base della ripetizione dei casi, quanto piuttosto quella di giustificare il fatto che la legge vale anche per un solo caso singolo.

Questa difficoltà è stata scorta da molti induttivisti. La maggior parte di quelli che la scorsero tentarono, come fece Berkeley, di tracciare una netta distinzione fra le pure generalizzazioni dell'osservazione e teorie piú «astratte» o «occulte», quali la teoria corpuscolare, o la teoria di Newton; e tentarono, di regola, di risolvere il problema dicendo, come disse Berkeley, che le teorie astratte non sono asserzioni genuine intorno al mondo, ma non sono *null'altro che strumenti*: strumenti per la predizione dei fenomeni osservabili. Ho dato a questa dottrina il nome di «*strumentalismo*» e l'ho criticata abbastanza dettagliatamente in altri miei scritti[2]. Qui mi limiterò a dire che rifiuto lo strumentalismo, e darò una sola delle ragioni per cui lo rifiuto: la ragione è che lo strumentalismo non risolve il problema delle proprietà «astratte» o «occulte» o «strutturali». Tali proprietà, infatti, non ricorrono soltanto nelle teorie «astratte» a cui pensano Berkeley e i suoi successori, ma vengono menzionate in ogni momento, da tutti, e nel discorso ordinario. Quasi tutte le asserzioni che facciamo trascendono l'esperienza. Non c'è nessuna linea netta di divisione fra un «linguaggio empirico» e un «linguaggio teorico»: *teorizziamo continuamente*, anche quando facciamo la piú banale asserzione singolare. Con questa osservazione sono arrivato al problema principale che intendo esaminare in quest'appendice.

[2] Cfr. i miei scritti: *A Note on Berkeley as a Precursor of Mach* e *Three Views Concerning Human Knowledge*. Entrambi questi scritti si trovano in *Conjectures and Refutations* cit.

2. È incontestabile che se diciamo «Tutti i cigni sono bianchi», la bianchezza che predichiamo è una proprietà osservabile; e nella misura in cui lo è, si può dire che un'asserzione singolare quale «Questo cigno qui è bianco» è basata sull'osservazione. Tuttavia quest'asserzione trascende l'esperienza: non per via della parola «bianco», ma per via della parola «cigno». Infatti, chiamando «cigno» una certa cosa, le attribuiamo proprietà che vanno molto al di là della pura e semplice osservazione, quasi tanto quanto le proprietà che le attribuiamo quando asseriamo che è composta di «corpuscoli».

Cosí non soltanto le teorie esplicative piú astratte, ma anche le asserzioni singolari piú ordinarie, trascendono l'esperienza. Infatti, anche le asserzioni singolari ordinarie sono sempre *interpretazioni dei «fatti» alla luce di teorie*. (E lo stesso vale per «i fatti» in questione. Essi contengono *universali*, e gli universali implicano sempre un comportamento *conforme a leggi* [*law-like*]).

Alla fine del § 25 ho mostrato brevemente come accada che l'uso di universali quali «bicchiere» o «acqua» in un'asserzione come «Qui c'è un bicchier d'acqua», trascenda necessariamente l'esperienza. Ciò è dovuto al fatto che le parole come «bicchiere» o «acqua», vengono usate per caratterizzare il *comportamento conforme a leggi* di certe cose, e questo si può esprimere dicendo che queste parole sono «parole disposizionali». Ora, siccome ogni legge trascende l'esperienza – e questo è semplicemente un altro modo per dire che la legge non è verificabile – ogni predicato che esprima un comportamento conforme a leggi trascende esso pure l'esperienza: ecco perché l'asserzione «Questo recipiente contiene acqua» è un'ipotesi controllabile ma non verificabile, che trascende l'esperienza[3]. Per questa ragione è impossibile

[3] Poiché si tratta di un'asserzione singolare, qui il parlare di una simmetria fra non-verificabilità e non-falsificabilità è meno scorretto di quanto non lo sia nel caso di asserzioni universali; infatti, allo scopo di falsificare quest'asserzione dobbiamo accettare come vera un'altra asserzione singolare, similmente non-verificabile. Ma anche qui permane una certa asimmetria. Infatti, molto in generale, nell'assumere la verità o la falsità di alcune asserzioni di controllo non possiamo far altro che stabilire la *falsità* dell'asserzione che stiamo controllando, non la sua verità. La ragione è che quest'ultima implica un numero infinito di asserzioni di controllo. Cfr. anche § 29 del mio libro e *Postscript* cit., § *22.

«costituire» un qualsiasi termine universale vero (come tentò di fare Carnap), cioè a dire, definirlo in termini puramente empirici o osservativi: infatti *tutti gli universali sono disposizionali* e non possono essere ridotti all'esperienza. Dobbiamo introdurli come termini non definiti, ad eccezione di quelli che possiamo definire in termini di altri universali non-empirici (quali «acqua», se scegliamo di definire l'acqua come «un composto di due atomi di idrogeno e di uno d'ossigeno»).

3. Il fatto che *tutti* gli universali siano disposizionali viene spesso trascurato per il fatto che gli universali possono essere disposizionali in vari gradi. Cosí «solubile» o «fragile» sono chiaramente disposizionali ad un grado piú alto che non «sciolto» o «rotto». Ma talvolta non ci si rende conto che anche «sciolto» o «rotto» sono disposizionali. Nessun chimico direbbe che lo zucchero o il sale si sono *sciolti* in acqua, se non si aspettasse di poter riottenere lo zucchero o il sale facendo evaporare l'acqua. Cosí «sciolto» indica uno stato disposizionale. E per quanto riguarda «rotto» non dobbiamo far altro che considerare il modo in cui procediamo *quando abbiamo dubbi* se una certa cosa (ad esempio qualcosa che abbiamo lasciato cadere, o un osso del nostro corpo) sia rotta o no: controlliamo il comportamento della cosa in questione tentando di scoprire se non mostri una certa, indebita mobilità. Cosí «rotto», come «sciolto», descrive disposizioni a comportarsi in un certo modo regolare, o conforme a leggi. Analogamente, diciamo che una superficie è rossa, o bianca, se ha la disposizione a riflettere la luce rossa o quella bianca, e di conseguenza a sembrare rossa o bianca alla luce del giorno. In generale, il carattere disposizionale di una qualsiasi proprietà universale diventerà chiaro se consideriamo quali controlli dobbiamo intraprendere quando siamo in dubbio se la proprietà sia o no presente in qualche caso particolare.

Cosí, il tentativo di distinguere tra predicati disposizionali e predicati non-disposizionali è errato, proprio come lo è il tentativo di fare una distinzione fra termini (o linguaggi) teorici e termini (o linguaggi) non-teorici, o empirici, o osservativi o fattuali o ordinari. Le cose stanno, forse, piú o meno cosí: gli uomini sono inclini a considerare come fattuale o «ordinario» ciò che hanno imparato prima di aver raggiunto una certa età critica; invece, quello che vengono a sapere piú tardi sono propensi a considerarlo teorico, o magari «puramente strumentale». (Sembra che l'età critica dipenda dal tipo psicologico).

4. Le leggi universali trascendono l'esperienza, se non altro perché sono universali e trascendono qualsiasi numero finito dei loro casi osservabili; e le asserzioni singolari trascendono l'esperienza perché i termini universali, che normalmente compaiono in esse, implicano disposizioni a comportarsi in maniera conforme a leggi cosicché implicano leggi universali (di regola appartenenti a qualche ordine di universalità piú basso). Di conseguenza, le leggi universali trascendono l'esperienza in almeno due modi: per via della loro universalità e perché in esse compaiono termini universali o disposizionali. E trascendono l'esperienza a un grado piú alto se i termini disposizionali che compaiono in essi sono disposizionali a un grado piú alto, o piú astratto. Ci sono strati di gradi sempre piú alti di universalità, e perciò di trascendenza. (Nel § *15 del *Postscript* si fa un tentativo di spiegare il senso in cui ci sono anche strati di quella che si potrebbe chiamare «profondità»).

Naturalmente, proprio a causa di questa trascendenza le leggi e le teorie scientifiche sono non-verificabili, e la *controllabilità* o *confutabilità* è l'unica cosa che le distingua, in generale, dalle teorie metafisiche.

A chi ci chieda perché usiamo queste leggi universali trascendenti invece di attenerci piú strettamente all'«esperienza», possiamo dare due specie di risposta.

a) Perché ne abbiamo bisogno: perché non esiste nulla come «l'esperienza pura»: esiste solo l'esperienza interpretata alla luce di aspettative o di teorie che sono «trascendenti».

b) Perché un teorico è un uomo che *desidera spiegare* le esperienze, e perché la spiegazione coinvolge l'uso di ipotesi esplicative che (per essere controllabili indipendentemente – cfr. § *15 del *Postscript*) devono trascendere quello che speriamo di spiegare.

La ragione che abbiamo dato al punto *a*) è una ragione pragmatica, o strumentalistica, e benché io la creda vera, non penso che sia paragonabile, in importanza, alla ragione data al punto *b*); perché, anche se un programma che avesse lo scopo di eliminare le teorie esplicative per scopi pratici (ad esempio, per la predizione) dovesse avere successo, lo scopo del teorico non ne risulterebbe modificato [4].

5. Che le teorie trascendano l'esperienza nel senso indicato qui, è stato asserito in molti luoghi del libro. Nel medesimo tempo le teorie sono state descritte come asserzioni strettamente universali.

Una critica estremamente penetrante al punto di vista secondo cui le teorie o le leggi di natura posson essere espresse da un'asserzione universale, quale «Tutti i pianeti si muovono descrivendo ellissi», è stata avanzata da William Kneale. Ho trovato le critiche di Kneale difficili da capire. Nemmeno ora sono del tutto sicuro di comprenderle rettamente; ma lo spero [5].

Credo che il punto fatto valere da Kneale possa essere espresso nel modo che segue. Sebbene le asserzioni universali siano *logicamente implicate* da asserzioni di una legge naturale, queste ultime sono logicamente piú forti delle prime. Non soltanto asseriscono «Tutti i pianeti si muovono in orbite ellittiche», ma asseriscono, piuttosto, qualcosa del genere: «Tutti i pianeti si muovono *necessariamente* in orbite el-

[4] Che sia possibile fare senza teorie è asserito da CARNAP, *Logical Foundations of Probability* cit., pp. 574 sg. Tuttavia non c'è nessuna ragione per credere che l'analisi di Carnap, anche se fosse altrimenti difendibile, possa essere legittimamente trasferita dal suo linguaggio-modello al «linguaggio della scienza»; cfr. la mia prefazione del 1958. In due articoli molto interessanti, W. Craig ha discusso certi programmi riduzionistici. (Cfr. «Journal of Symbolic Logic», 18, 1953, pp. 30 sg. e «Philosophical Review», 65, 1956, pp. 38 sgg.). Al suo eccellente commento critico sul proprio metodo per eliminare le idee «ausiliarie» (o «trascendenti») si potrebbe aggiungere quanto segue: I) Sostanzialmente, Craig realizza l'eliminazione delle teorie esplicative promuovendo un numero infinito di teoremi al rango di assiomi (o sostituendo alla definizione di «teorema» una nuova definizione di «assioma» che è coestensiva con la prima fin dove arriva il sotto-linguaggio «purificato»). II) Nella costruzione effettiva del sistema purificato egli è, naturalmente, *guidato dalla nostra conoscenza delle teorie* da eliminare. III) Il sistema purificato non è piú un sistema esplicativo e non è piú controllabile nel senso in cui possono essere controllabili quei sistemi esplicativi la cui controllabilità è essenzialmente in relazione al loro *contenuto* informativo e alla loro *profondità*. (Si potrebbe ben dire che gli assiomi del sistema purificato hanno profondità zero, nel senso del § *15 del *Postscript*).

[5] Cfr. W. KNEALE, *Probability and Induction* [Probabilità e induzione], 1949. Una delle difficoltà minori da me incontrate nella comprensione delle critiche di Kneale, è in relazione col fatto che in alcuni passi egli dà ottime versioni di alcune delle mie teorie, mentre in altri sembra mancare completamente il suo obbiettivo. (Cfr. ad esempio la nota 17, piú avanti).

littiche». Kneale chiama un'asserzione del genere «principio di necessitazione». Non credo che sia riuscito a rendere perfettamente chiara la differenza tra un'asserzione universale e un «principio di necessitazione»: parla del «bisogno di una formulazione piú precisa delle nozioni di contingenza e di necessità» [6], ma qualche pagina piú in là si legge, con nostra sorpresa: «In realtà, la parola "necessità" è la meno imbarazzante fra tutte quelle con cui abbiamo da fare in questa parte della filosofia» [7]. È vero che fra questi due passi Kneale tenta di persuaderci che «il senso di questa distinzione» – della distinzione, cioè, fra contingenza e necessità – «può essere facilmente compreso con alcuni esempi» [8], ma i suoi esempi mi lasciano perplesso. Sempre supponendo che i miei tentativi di comprendere Kneale siano riusciti, devo dire che la sua teoria positiva delle leggi naturali mi sembra assolutamente inaccettabile. Tuttavia ritengo che le sue critiche siano estremamente preziose.

6. Spiegherò ora, con l'aiuto di un esempio, quella che credo sia, essenzialmente, la critica che Kneale muove al punto di vista secondo cui una caratterizzazione delle leggi di natura come di asserzioni universali, è *logicamente sufficiente* e anche *intuitivamente adeguata.*

Consideriamo qualche animale estinto, poniamo un moa: un enorme uccello le cui ossa abbondano in alcune paludi della Nuova Zelanda (e per trovare le quali ho scavato anch'io, quando mi trovavo in quel paese). Decidiamo di usare il nome «moa» come nome universale (e non come nome proprio; cfr. § 14) di una certa struttura biologica; ma dobbiamo ammettere che è naturalmente del tutto possibile – e addirittura perfettamente credibile – che nell'universo non siano mai esistiti o esisteranno altri moa oltre quelli che un tempo vissero in Nuova Zelanda. E supporremo che questo punto di vista, credibile, sia corretto.

Supponiamo ora che la struttura biologica dell'organismo

[6] *Probability and Induction* cit., p. 32.

[7] *Ibid.*, p. 80.

[8] *Ibid.*, p. 32. Una delle difficoltà consiste nel fatto che qualche volta Kneale sembra accettare il punto di vista di Leibniz («Una verità si dice necessaria quando la sua negazione implica una contraddizione, e quando non è necessaria si chiama contingente», *Die philosophischen Schriften*, a cura di Gerhardt, vol. 3, p. 400. Cfr. anche vol. 7, pp. 390 sgg.), mentre altre volte sembra usare «necessario» in un senso piú ampio.

del moa sia di una specie tale che, in condizioni molto favorevoli, un moa potrebbe facilmente vivere sessant'anni o anche piú. Supponiamo inoltre che le condizioni incontrate dai moa in Nuova Zelanda fossero ben lontane dall'essere ideali (a causa, forse, della presenza di qualche virus) e che nessun moa abbia mai raggiunto l'età di cinquant'anni. In questo caso, l'asserzione strettamente universale: «Tutti i moa muoiono prima di aver raggiunto l'età di cinquant'anni» sarà vera, perché, secondo la nostra ipotesi, nell'universo non c'è mai stato, né mai ci sarà, un moa che abbia piú di cinquant'anni. Nel medesimo tempo, quest'asserzione universale non sarà una legge di natura perché, stando alla nostra ipotesi, sarebbe *possibile* a un moa vivere piú a lungo, e il fatto che nessun moa sia vissuto piú a lungo è dovuto soltanto a condizioni *accidentali, o contingenti*, quali la co-presenza di un certo virus.

Quest'esempio mostra che possono esserci *asserzioni vere, rigorosamente universali*, che hanno un carattere accidentale, e non il carattere di vere e proprie leggi universali di natura. Di conseguenza, la caratterizzazione delle leggi di natura come di asserzioni rigorosamente universali è logicamente insufficiente e intuitivamente inadeguata.

7. L'esempio può anche indicare in qual senso le leggi di natura possano essere descritte, secondo i suggerimenti di Kneale, come «principî di necessità» o «principî di impossibilità». Infatti, stando alle nostre ipotesi – ipotesi che sono perfettamente ragionevoli – sarebbe *possibile*, in condizioni favorevoli, che un moa raggiungesse un'età piú avanzata di quella raggiunta da ogni altro moa. Ma se ci fosse una legge naturale che limitasse all'età di cinquant'anni l'età di ogni organismo simile a un moa, *allora non sarebbe possibile*, a nessun moa, vivere piú di cinquant'anni. Le leggi naturali pongono dunque limiti certi a ciò che è possibile.

Penso che tutto ciò sia intuitivamente accettabile; in realtà, quando in diversi e svariati passi del mio libro dissi che le leggi naturali *vietano* che certi eventi accadano, o che hanno il carattere di *proibizioni*, diedi espressione alla medesima idea intuitiva. E penso che sia perfettamente possibile, e addirittura utile, parlare di «necessità naturale» o di «necessità fisica», allo scopo di descrivere questo carattere delle leggi di natura e delle loro conseguenze logiche.

8. Ma credo che sia un errore sottovalutare le differenze fra questa necessità naturale o fisica e altre specie di necessità, per esempio la necessità logica. Possiamo grossomodo descrivere come logicamente necessario ciò che varrebbe in ogni mondo concepibile. Ma anche se, per quanto possiamo concepire, la legge newtoniana dei quadrati inversi è una vera e propria legge di natura in qualche mondo, e, in questa misura, naturalmente necessaria in questo mondo, è perfettamente *concepibile* un mondo in cui non sia valida.

Kneale ha criticato questo tipo di argomentazione mettendo in evidenza il fatto che l'ipotesi di Goldbach (secondo la quale ogni numero pari maggiore di due è la somma di due numeri primi) può essere, *per quanto possiamo concepire*, vera, o, per quanto possiamo concepire, falsa, pur potendo benissimo darsi che sia dimostrabile (o confutabile) e, in questo senso, matematicamente o logicamente, necessaria (o impossibile); ed argomenta che «la concepibilità della contraddittoria non dev'essere presa come una prova dell'inesistenza della necessità in matematica»[9]. Ma se le cose stanno cosí, perché, si chiede, «dovrebbe fornire... una prova negativa [*disproof*] nella scienza naturale»[10]? Ora io credo che questo ragionamento metta un accento troppo forte sulla *parola* «concepibile». Inoltre, opera con un senso di «concepibile» diverso da quello che si intende; una volta che siamo in possesso di una prova del teorema di Goldbach, possiamo dire che la prova stabilisce con precisione che un numero pari maggiore di due, che non sia la somma di due primi, è inconcepibile, nel senso che conduce a risultati contraddittori. In un altro senso, $0 = 1$ può essere perfettamente concepibile: può addirittura essere usata, come qualsiasi altra asserzione matematicamente falsa, come un'assunzione in una prova indiretta. In realtà, una prova indiretta potrebbe benissimo essere messa cosí: «Si *concepisca* che *a* è vera. Allora dobbiamo ammettere che *b* è vera. Ma sappiamo che *b* è assurda. Dunque è *inconcepibile* che *a* sia vera». È chiaro che, sebbene l'uso di «concepibile» e «inconcepibile» sia un po' vago e ambiguo, sarebbe fuorviante il dire che questo modo di ragionare dev'essere non valido perché la verità di *a* non può

[9] *Probability and Induction* cit., p. 80.
[10] *Ibid.*

essere inconcepibile, visto e considerato che siamo partiti concependo proprio la verità di *a*.

Cosí in logica e in matematica «inconcepibile» è semplicemente un'altra parola per «che conduce a un'ovvia contraddizione». *Logicamente* possibile o «concepibile» è ogni cosa che non conduca a un'ovvia contraddizione, e logicamente impossibile o «inconcepibile» è qualsiasi cosa che vi conduca. Quando Kneale dice che la contraddittoria di un teorema può essere «concepibile», usa la parola in un altro senso, e, quanto a questo, in un senso ottimo.

9. Dunque, un'assunzione è logicamente possibile se non è autocontraddittoria; è fisicamente possibile se non contraddice le leggi di natura. I due significati di «possibile» hanno abbastanza in comune per spiegare perché usiamo la medesima parola; ma mascherarne la differenza non può condurre ad altro che a confusione.

A confronto con le tautologie logiche, le leggi di natura hanno un carattere contingente, accidentale. Questo è riconosciuto chiaramente da Leibniz che insegna (*Philos. Schriften*, a cura di Gerhardt, 7, p. 390) che il mondo è opera di Dio in un senso in qualche modo simile a quello in cui un sonetto, un rondò, una sonata, o una fuga, è opera di un artista. L'artista può scegliere liberamente una certa *forma*, restringendo volontariamente, con questa scelta, la sua libertà: impone alla sua creazione certi principî di impossibilità: li impone, ad esempio, al suo ritmo e, in misura minore, alle sue parole che, in confronto con il ritmo, possono apparire contingenti, accidentali. Ma ciò non significa che non fosse contingente anche la sua scelta della forma, o del ritmo. Infatti si sarebbero potuti scegliere un'altra forma o un altro ritmo.

Analogamente per le leggi naturali. Esse restringono la scelta (logicamente) possibile dei fatti singoli. Sono dunque principî di impossibilità rispetto a quei fatti singoli, e, a confronto con le leggi naturali, i fatti singoli sembrano altamente contingenti. Ma le leggi di natura, pur essendo necessarie in confronto coi fatti singoli, sono contingenti in confronto con le tautologie logiche. Possono esserci infatti *mondi strutturalmente differenti*: mondi con leggi di natura differenti.

Cosí la necessità, o impossibilità, naturale è come la necessità, o impossibilità, musicale. È come l'impossibilità che il minuetto classico abbia un ritmo di quattro quarti, o l'impossibilità di concluderlo su un accordo di settima diminuita o su qualche altra dissonanza. Impone al mondo principî *strutturali*, ma lascia ancora una gran quantità di libertà a fatti singolari piú contingenti: alle condizioni iniziali.

Se paragoniamo la situazione della musica con quella del nostro esempio del moa, possiamo dire: non c'è nessuna legge musicale che proibisca di scrivere un minuetto in sol bemolle minore, ma nondimeno è perfettamente possibile che mai nessun minuetto sia stato scritto in questa tonalità piuttosto insolita. Dunque possiamo dire che le leggi musicalmente necessarie possono essere distinte dalle asserzioni universali vere intorno ai fatti storici della composizione musicale.

10. Il punto di vista opposto – il punto di vista, cioè, secondo cui le leggi di natura non sono contingenti in nessun senso del termine – sembra, se ho ben capito, quello avanzato da Kneale. A me sembra del tutto errato, come il punto di vista che egli giustamente critica: il punto di vista secondo cui le leggi non sono nient'altro che asserzioni universali vere.

Il punto di vista di Kneale, secondo cui le leggi di natura sono necessarie nello stesso senso in cui lo sono le tautologie logiche, può forse essere espresso, in termini religiosi, cosí: può ben darsi che Dio si sia trovato di fronte alla scelta tra il creare un mondo fisico e il non crearlo, ma, fatta questa scelta, non era piú libero di scegliere la forma o la struttura del mondo; infatti questa struttura – le regolarità della natura descritte dalle leggi di natura – è necessariamente quella che è: tutto ciò che Egli poteva liberamente scegliere erano le condizioni iniziali.

A me sembra che Descartes sostenesse un punto di vista molto simile a questo. Secondo lui, tutte le leggi di natura discendono necessariamente dal solo principio analitico (la definizione essenziale di «corpo») secondo cui «essere un corpo» significa la stessa cosa che «essere esteso»; e questo implica che due corpi *differenti* non possono occupare la medesima estensione, o il medesimo spazio. (In realtà, questo principio è simile all'esempio-standard di Kneale: «che nulla che sia rosso è anche verde»[11]). Ma proprio andando oltre questi «truismi» (come li chiama Kneale, mettendo l'accento sulla loro similarità con le tautologie logiche[12]) la teoria fisica ha raggiunto, a partire da Newton, una penetrazione in profondità che va molto oltre quella consentita dall'approccio cartesiano.

Mi sembra che la dottrina secondo cui le leggi di natura *non sono in alcun senso contingenti* sia una forma particolarmente estremistica di quella dottrina che altrove ho descritto, e criticato, come «essenzialismo»[13]. Essa infatti implica logicamente la dottrina dell'esistenza delle *spiegazioni ultime*; cioè a dire la dottrina dell'esistenza di teorie esplicative che a loro volta non hanno bisogno di spiegazioni ulteriori né sono passibili di essere spiegate ulteriormente. Infatti, se mai riuscissimo nel compito di ridurre tutte le leggi di natura ai veri «principî di necessitazione» – a truismi quale quello che due cose essenzialmente estese non possono occupare la medesima estensione, o quello che nulla che sia rosso è anche verde – ogni ulteriore spiegazione diventerebbe superflua e impossibile.

Non vedo nessuna ragione per credere che la dottrina dell'esistenza delle spiegazioni ultime sia vera, mentre ne vedo molte per credere che è falsa. Quanto piú impariamo intorno alle teorie, o alle leggi di natura, tanto meno esse ci rammentano i truismi autoesplicativi di Descartes, o le definizioni essenzialistiche. Ciò che la scienza svela non sono i truismi. Piuttosto, fa parte della grandezza e della bellezza della scienza che possiamo imparare, attraverso le nostre indagini critiche, che il mondo è fondamentalmente differente da quello che avremmo mai immaginato prima che la nostra immaginazione fosse stata innescata dalla confutazione delle nostre teorie primitive. Sembra che non ci sia alcuna ragione per pensare che questo processo arriverà mai alla fine[14].

Tutto ciò riceve un fortissimo appoggio dalle nostre considerazioni intorno al contenuto e alla probabilità logica (as-

[11] Cfr. KNEALE, *Probability and Induction* cit., p. 32; cfr. anche, ad esempio, p. 80.
[12] *Ibid.*, p. 33.
[13] Cfr. *Poverty of Historicism* cit., § 10; *The Open Society* cit., cap. 3, § VI, cap. 11; *Three Views Concerning Human Knowledge* cit. e *Postscript* cit., ad es. §§ *15 e *31.
[14] Cfr. *Postscript* cit., specialmente § *15.

soluta). Se le leggi di natura non sono, puramente e semplicemente, asserzioni rigorosamente universali, allora devono essere *logicamente piú forti* che non le asserzioni universali corrispondenti, dal momento che queste ultime devono essere deducibili da esse. Ma, come abbiamo visto alla fine dell'appendice *v, la *necessità logica* di a può essere definita dal *definiens*

$$p(a) = p(a, \bar{a}) = 1.$$

D'altra parte, per le asserzioni universali a otteniamo (cfr. la stessa appendice e le appendici *VII e *VIII):

$$p(a) = p(a, \bar{a}) = 0;$$

e lo stesso deve valere per ogni asserzione logicamente piú forte. Di conseguenza, una legge di natura è, per il suo contenuto maggiore, tanto lontana da un'asserzione logicamente necessaria quanto può esserlo un'asserzione non-contraddittoria; e, dal punto di vista della sua significanza [*import*] logica è molto piú vicina a un'asserzione universale «per puro accidente», di quanto non lo sia a un truismo logico.

11. Il risultato di questa discussione è che sono pronto ad accettare le critiche di Kneale nella misura in cui sono pronto ad accettare il punto di vista secondo cui esiste una categoria di asserzioni – le leggi di natura – che sono logicamente piú forti delle asserzioni universali corrispondenti. Secondo me questa dottrina è incompatibile con qualsiasi teoria dell'induzione. Per la mia metodologia, comunque, questo fa ben poca differenza. Al contrario, è perfettamente chiaro che un principio proposto, o congetturato, che dichiari la impossibilità di certi eventi, dovrebbe essere controllato tentando di mostrare che questi eventi sono possibili; cioè a dire, tentando di produrli. Ma questo è né piú né meno il metodo di controllo di cui io sono l'assertore.

Dunque, dal punto di vista adottato qui, non c'è bisogno di nessun cambiamento metodologico. Il cambiamento si situa interamente su un livello ontologico, metafisico. Può essere descritto dicendo che se congetturiamo che a sia una legge di natura, congetturiamo che a esprima una *proprietà strutturale del nostro mondo*; una proprietà che impedisce l'occorrenza di certi eventi singolari logicamente possibili, o di certi stati di cose di un certo genere (proprio come si è spiegato nei §§ 21-23 del libro, e anche nei §§ 79, 83 e 85).

12. Come ha mostrato Tarski, è possibile spiegare la *necessità logica* in termini di universalità: si può dire che un'asserzione è logicamente necessaria se, e solo se, è deducibile (ad esempio per particolarizzazione) da una funzione assertoria «*universalmente valida*», cioè a dire da una funzione assertoria che sia *soddisfatta da ogni modello* [15]. (Ciò significa: vera in tutti i mondi possibili).

Penso che con lo stesso metodo possiamo spiegare che cosa intendiamo per *necessità naturale*; possiamo infatti adottare la seguente definizione, N°):

N°) *Si può dire che un'asserzione è naturalmente o fisicamente necessaria se, e solo se, è deducibile da una funzione assertoria che è soddisfatta in tutti i mondi che differiscono dal nostro, ammesso che differiscano, solo rispetto alle condizioni iniziali.* (*Cfr. Addendum alla presente appendice).

Naturalmente, non potremo mai *sapere* se quella che crediamo una legge sia una legge o se invece abbia soltanto l'aspetto di una legge ma dipenda in realtà da certe condizioni iniziali speciali predominanti nella nostra regione dell'universo (cfr. § 79). Perciò, data una qualsiasi asserzione non-logica, non potremo mai venire a sapere se sia davvero naturalmente necessaria: la congettura che è, rimane una congettura per sempre (non semplicemente perché non possiamo indagare l'intiero nostro mondo allo scopo di assicurarci che non esistano controesempi, ma per la ragione, ancor piú forte, che non potremo mai indagare tutti i mondi che differiscono dal nostro rispetto alle condizioni iniziali). Ma sebbene la definizione che abbiamo proposto escluda la possibilità di ottenere un *criterio positivo* di necessità naturale, in pratica possiamo applicare la nostra definizione di necessità naturale in modo *negativo*: trovando condizioni iniziali in cui la supposta legge si riveli non-valida, possiamo mostrare che non era necessaria, cioè a dire che non era una legge di natura. Cosí la definizione che abbiamo proposto si attaglia alla nostra metodologia in modo davvero perfetto.

Naturalmente, la definizione proposta renderebbe tutte le

[15] Cfr. la mia *Note on Tarski's Definition of Truth* [Nota sulla definizione di verità di Tarski], in «Mind», 64 (1955), specialmente p. 391.

leggi di natura, insieme con tutte le loro conseguenze logiche, ***naturalmente o fisicamente necessarie***[16].

Si vedrà subito che la definizione proposta è in perfetto accordo con i risultati che abbiamo raggiunto nella nostra discussione dell'esempio del moa (cfr. punti 6 e 7); proprio perché pensavamo che i moa vivessero piú a lungo in condizioni differenti – in condizioni, cioè piú favorevoli – abbiamo ritenuto che un'asserzione universale vera intorno alla loro effettiva età massima avesse carattere accidentale.

13. Introduciamo ora il simbolo «N» come nome della classe delle asserzioni che sono necessariamente vere nel senso della necessità fisica o naturale: che sono vere, cioè, quali che possano essere le condizioni iniziali.

Con l'aiuto di «N» possiamo definire «$a \underset{N}{\rightarrow} b$» (in parole: «se a allora necessariamente b») mediante la seguente definizione, piuttosto ovvia:

D) $a \underset{N}{\rightarrow} b$ è vera se, e solo se $(a \rightarrow b) \in N$.

In parole, forse: «Se a allora necessariamente b» vale se, e solo se, «se a allora b» è necessariamente vera. Qui, naturalmente, «$a \rightarrow b$» è il nome di un condizionale ordinario il cui antecedente è a e il cui conseguente è b. Se fosse nostra intenzione il definire l'implicazione [*entailment*] logica, o «implicazione stretta», allora potremmo usare D), ma dovremmo interpretare «N» come «logicamente necessario» (e non come «naturalmente o fisicamente necessario»).

Per la definizione D) possiamo dire che «$a \underset{N}{\rightarrow} b$» è il nome di un'asserzione con le seguenti proprietà.

A) $a \underset{N}{\rightarrow} b$ non è sempre vera se a è falsa, a differenza di quanto accade per $a \rightarrow b$.

B) $a \underset{N}{\rightarrow} b$ non è sempre vera se b è vera, a differenza di quanto accade per $a \rightarrow b$.

A′) $a \underset{N}{\rightarrow} b$ è sempre vera se a è impossibile o necessariamente falsa o se la sua negazione, $\bar{a}$, è necessariamente ve-

[16] Tra parentesi, le asserzioni logicamente necessarie diventerebbero (semplicemente perché seguono da qualsiasi asserzione) anche necessarie fisicamente; ma naturalmente questo non ha importanza.

ra sia per necessità logica sia per necessità fisica. (Cfr. le tre ultime pagine di questa appendice e la nota 26).

B′) $a \underset{N}{\rightarrow} b$ è sempre vera se b è necessariamente vera (sia per necessità logica sia per necessità fisica).

Qui a e b possono essere asserzioni o funzioni assertorie. $a \underset{N}{\rightarrow} b$ può essere chiamata «condizionale necessario» o «condizionale nomico». Esprime, io credo, quelli che alcuni autori hanno chiamato i «condizionali congiuntivi» o «condizionali controfattuali». (Sembra però che alcuni autori – ad esempio Kneale – intendessero, con «condizionale controfattuale», qualcos'altro: usarono questo nome per implicare che a è in realtà falsa[17]. Non penso che quest'uso sia da raccomandarsi).

Basta riflettere un po' per vedere che la classe N delle asserzioni naturalmente necessarie comprende non soltanto la classe di tutte quelle asserzioni che, come le vere leggi universali di natura, si possono descrivere intuitivamente dicendo che non sono influenzate dai cambiamenti nelle condizioni iniziali, ma anche tutte quelle asserzioni che seguono dalle vere leggi universali di natura, o dalle teorie strutturali vere intorno al mondo. Tra queste ci saranno asserzioni che descrivono un insieme finito di condizioni iniziali; ad esempio, asserzioni della forma «Se in questo recipiente si mescolano idrogeno e ossigeno a temperatura ambiente ordinaria, e a una pressione di 1000 g per cm^2,... allora...». Se dalle leggi vere di natura sono deducibili asserzioni condizionali, allora la loro verità sarà anche invariante rispetto a tutti i cambiamenti di condizioni iniziali: o le condizioni iniziali descritte nell'antecedente saranno soddisfatte, nel qual caso il conseguente sarà vero (e sarà perciò vero l'intero condizionale) o

[17] Nella mia *Note on Natural Laws and So-Called Contrary-to-Fact Conditionals* [Nota sulle leggi naturali e sui cosiddetti condizionali controfattuali], in «Mind», 58, N. S. 1949, pp. 62-66, ho usato il termine «condizionale congiuntivo» per quello che qui chiamo «condizionale necessario» o «nomico»; e ho spiegato ripetutamente che questi condizionali congiuntivi devono essere deducibili da leggi di natura. È perciò difficile capire come mai Kneale («Analysis», 10, 1950, p. 122) abbia potuto attribuirmi, anche solo in via di tentativo, il punto di vista secondo cui un condizionale congiuntivo o «controfattuale» è della forma «$\sim\varphi(a).(\varphi(a) \supset \psi(a))$». Mi chiedo se Kneale si sia reso conto che questa sua espressione non è altro che un modo complicato per dire «$\sim\varphi(a)$»; infatti, chi potrebbe mai pensare di asserire che «$\sim\varphi(a)$» è deducibile dalla legge «$(x)(\varphi(x) \supset \psi(x))$»?

le condizioni iniziali descritte nell'antecedente non saranno soddisfatte e perciò fattualmente non-vere («controfattuali»). In questo caso il condizionale sarà vero, in quanto soddisfatto in modo vuoto. Cosí il tanto discusso soddisfacimento vuoto adempie la sua funzione appropriata nell'assicurare che le asserzioni deducibili da leggi naturalmente necessarie siano esse pure «naturalmente necessarie» nel senso della nostra definizione.

In realtà, avremmo potuto semplicemente definire *N* come la classe delle leggi di natura e delle loro conseguenze logiche. Ma il definire *N* con l'aiuto dell'idea di condizioni iniziali (di una classe-simultaneità di asserzioni singolari) presenta un leggero vantaggio su quest'altro tipo di definizione. Definendo *N* come, ad esempio, la classe delle asserzioni che sono vere in tutti i mondi che differiscono dal nostro (se ne differiscono) solo rispetto alle condizioni iniziali, evitiamo l'uso di espressioni congiuntive (o controfattuali) quali «che rimarrebbe vera (nel nostro mondo) anche se valessero condizioni iniziali differenti da quelle che effettivamente valgono».

Nondimeno, la frase in N°), «tutti i mondi che differiscono (se differiscono) dal nostro mondo solo rispetto alle condizioni iniziali» contiene implicitamente l'idea di leggi di natura. Quello che intendiamo è «tutti i mondi che hanno la stessa struttura (o le stesse leggi naturali) del nostro mondo». Nella misura in cui il nostro *definiens* contiene implicitamente l'idea di leggi di natura, si può dire che N°) è circolare. Ma tutte le definizioni non possono non essere circolari *in questo senso*, proprio come sono circolari tutte le derivazioni (in quanto contrapposte alle prove [18]) ad esempio tutti i sillogismi: la conclusione dev'essere infatti contenuta nelle premesse. Comunque, in senso piú tecnico la nostra definizione non è circolare. Il suo *definiens* opera con un'idea intuitiva perfettamente chiara: l'idea del far variare le condizioni iniziali del nostro mondo; ad esempio, le distanze fra i pianeti, le loro masse e la massa del Sole. Interpreta i risultati di questi cambiamenti come la costruzione di una specie di «modello» del nostro mondo (modello o «copia» che non

[18] Della distinzione fra derivazione e prova si tratta nel mio scritto *New Foundations for Logic* [Nuovi fondamenti per la logica], in «Mind», 56 (1947), pp. 193-94.

deve necessariamente essere fedele rispetto alle condizioni iniziali), e quindi imita il ben noto artificio consistente nel chiamare «necessarie» quelle asserzioni che sono vere nell'universo di *tutti* questi modelli (cioè per tutte le condizioni iniziali *logicamente possibili*).

14. Il mio trattamento attuale di questo problema differisce, intuitivamente, da una versione pubblicata in precedenza[19]. Io penso che sia un miglioramento considerevole, e sono lieto di riconoscere che di questo miglioramento sono debitore, in misura considerevole, alle critiche di Kneale. Nondimeno, da un punto di vista piú tecnico (e non intuitivo) i cambiamenti sono leggeri. Infatti, in quello scritto operavo *a*), con l'idea di leggi naturali, *b*) con l'idea di condizioni che *seguono* dalle leggi naturali; ma, come abbiamo visto, *a*) e *b*) prese insieme hanno la stessa estensione di *N*. *c*) Suggerisco che i «condizionali congiuntivi» sono quelli che seguono da *a*), cioè sono soltanto quelli della classe *b*). E, *d*), suggerisco (nell'ultimo capoverso) che forse dovremo introdurre il presupposto che tutte le condizioni iniziali logicamente possibili (e perciò tutti gli eventi e i processi compatibili con le leggi) siano, da qualche parte, e in qualche tempo, realizzate nel mondo, il che è un modo piuttosto goffo per dire piú o meno quello che dico ora, con l'aiuto dell'idea di tutti i mondi che differiscono (se differiscono) dal nostro, solo rispetto alle condizioni iniziali[20].

La mia posizione del 1949 potrebbe in realtà essere formulata con l'aiuto dell'asserzione seguente. Anche se può darsi che non comprenda tutti i mondi logicamente possibili, perché possono essere logicamente possibili mondi aventi un'altra struttura – aventi cioè leggi differenti –, il nostro mondo comprende tutti i mondi fisicamente possibili, nel

[19] Cfr. *A Note on Natural Laws and So-Called Contrary-to-Fact Conditionals* cit. Cfr. anche *Poverty of Historicism* cit., nota a p. 123.

[20] Chiamo «goffa» la mia vecchia formulazione, perché essa equivale all'introdurre l'assunzione che qualche moa sia, da qualche parte, vissuto, o che qualche giorno vivrà, in condizioni ideali, assunzione che mi sembra un po' troppo spinta. Ora a quest'assunzione preferisco sostituirne un'altra: che fra i «modelli» del nostro mondo – che non si suppone che siano reali ma che siano, per cosí dire, costruzioni logiche – ce ne sarà almeno uno in cui i moa vivono in condizioni ideali. E questo mi sembra non soltanto ammissibile, ma addirittura ovvio. A parte i cambiamenti terminologici, questo mi sembra il solo cambiamento nella mia posizione, in confronto con la mia nota su «Mind», del 1949. Ma penso che si tratti di un cambiamento importante.

senso che in esso sono realizzate tutte le condizioni iniziali fisicamente possibili, da qualche parte e in qualche momento. Secondo il mio punto di vista attuale, è fin troppo ovvio che quest'assunzione metafisica può essere vera in entrambi i sensi di «possibile», ma che ci troviamo molto meglio senza di essa.

Tuttavia, una volta che sia stata adottata quest'assunzione metafisica, il mio punto di vista piú vecchio e il mio punto di vista attuale diventano (se si eccettuano certe differenze puramente terminologiche) equivalenti per quanto riguarda *lo status delle leggi*. Cosí, il mio vecchio punto di vista è semmai piú «metafisico» (o meno «positivistico») del mio punto di vista attuale, anche se nel descrivere lo status delle leggi non fa uso della *parola* «necessario».

15. Per uno studioso di metodologia, che si opponga alla dottrina dell'induzione e aderisca alla teoria della falsificazione, non c'è molta differenza tra il punto di vista secondo cui le leggi universali non sono altro che asserzioni rigorosamente universali e il punto di vista che sono «necessarie»: in entrambi i casi non possiamo far altro che controllare la nostra congettura mediante tentativi di confutarla.

Per l'induttivista, qui c'è una differenza cruciale; egli dovrebbe rifiutare l'idea di leggi «necessarie», dal momento che queste ultime, essendo logicamente piú forti, devono essere ancor meno accessibili all'induzione di quanto non lo siano le asserzioni semplicemente universali.

Tuttavia, di fatto, gli induttivisti non ragionano sempre in questo modo. Al contrario, alcuni di essi sembrano pensare che per giustificare l'induzione, magari lungo le linee di un «principio di uniformità della natura», si può usare un'asserzione che asserisca che le leggi di natura sono necessarie.

Ma è ovvio che nessun principio di questo genere potrebbe mai giustificare l'induzione, né potrebbe rendere valide, o anche soltanto probabili, le conclusioni induttive.

Naturalmente, è perfettamente vero che se vogliamo giustificare la nostra ricerca delle leggi di natura dobbiamo fare appello a un'asserzione come «esistono leggi di natura»[21].

[21] Cfr. WITTGENSTEIN, *Tractatus* cit., 6.36: «Se vi fosse una legge di causalità essa potrebbe sonare: "Vi sono leggi naturali". Ma ciò non si può certo dire: si mostra da sé». Secondo me, ciò che si mostra, ammesso che qualcosa si mostri, è che è chiaro che questo si *può* dire: *è stato* detto da Witt-

Ma nel contesto di questa mia osservazione, «giustificare» ha un senso molto differente da quello che ha nel contesto della questione se possiamo giustificare l'induzione. In quest'ultimo caso desideriamo fondare certe asserzioni, cioè le generalizzazioni frutto di induzione. Nel primo caso desideriamo semplicemente giustificare un'attività: la ricerca di leggi. Inoltre, anche se può essere giustificata in qualche senso del termine dalla conoscenza che esistono vere leggi – che nel mondo ci sono regolarità strutturali – quest'attività potrebbe essere giustificata anche senza quella conoscenza: la speranza di trovare un po' di cibo da qualche parte, certo «giustifica» il fatto che andiamo a cercarlo – specialmente se siamo affamati – ma questa speranza è tutt'altra cosa dalla conoscenza. Dunque, possiamo dire che, anche se la conoscenza che esistono vere leggi aggiungerebbe qualcosa alla giustificazione della nostra ricerca di tali leggi, mancando la conoscenza questa ricerca è giustificata dalla nostra curiosità e dalla pura e semplice speranza di aver successo.

Inoltre, la distinzione fra leggi «necessarie» e asserzioni rigorosamente universali non sembra rilevante per questo problema: necessaria o no, la conoscenza che esistono leggi di natura aggiungerebbe qualcosa alla «giustificazione» della nostra ricerca, pur non essendo indispensabile a questo genere di «giustificazione».

16. Io credo, comunque, che l'idea che ci sono leggi necessarie di natura, nel senso della necessità naturale o fisica spiegato al punto 12, è metafisicamente o ontologicamente importante, e di grande significato intuitivo, per i nostri tentativi di comprendere il mondo. E sebbene sia impossibile fondare quest'idea metafisica su basi empiriche (perché non è falsificabile) o di altro genere, io credo che si tratti di un'idea vera (come ho indicato nei §§ 79 e 83-85). Tuttavia sto tentando di andar oltre quello che ho detto in questi paragrafi, per mettere l'accento sullo status ontologico peculiare delle leggi universali (parlando, ad esempio, della loro «necessità» o del loro «carattere strutturale») e sul fatto che il

genstein, ad esempio. Ciò che non si può certo fare è *verificare* l'asserzione che ci sono leggi naturali (e non la si può neppure falsificare). Ma il fatto che un'asserzione non sia verificabile (o anche che non sia falsificabile) non significa che sia priva di significato, o che non possa essere capita, o che «non possa, chiaramente, esser detta», come credeva Wittgenstein.

carattere metafisico o l'inconfutabilità dell'asserzione che le leggi di natura esistono, non deve impedirci di discutere quest'asserzione razionalmente, cioè a dire, criticamente. (Cfr. il mio *Postscript*, specialmente i §§ *6, *7, *15 e *120).

Ciononostante, a differenza di Kneale, io considero «necessario» una pura e semplice parola, un'etichetta utile per distinguere *l'universalità delle leggi* dall'universalità «accidentale». Naturalmente, qualsiasi altra etichetta renderebbe esattamente il medesimo servizio, perché qui di relazioni con la necessità logica non ce ne sono molte. Sono in larga misura d'accordo con lo spirito della parafrasi wittgensteiniana di Hume: «Una costrizione, secondo la quale una cosa debba avvenire perché ne è avvenuta un'altra, non v'è. V'è solo una necessità logica»[22]. $a \underset{N}{\rightarrow} b$ è connessa con la necessità logica solo in un modo: il legame necessario tra a e b non si può trovare né in a né in b, ma nel fatto che il condizionale ordinario corrispondente (o «implicazione materiale» $a \rightarrow b$, senza «N») segue *con necessità logica* da una legge di natura, cioè è necessario relativamente a una legge di natura[23]. E si può dire che una legge di natura è a sua volta necessaria, perché è logicamente derivabile da, o può essere spiegata in base a, una legge dotata di un grado di universalità ancora piú alto, o di «profondità» maggiore. (Cfr. il mio *Postscript*, § *15). Si potrebbe supporre che è questa dipendenza logicamente necessaria da asserzioni vere di universalità piú alta, che si congettura esista, a suggerire, in prima istanza, l'idea di «connessione necessaria» fra causa ed effetto[24].

17. Per quanto posso capirne, le discussioni moderne del «condizionale congiuntivo» o dei «condizionali contrari ai fatti», o «controfattuali» sembrano essere sorte soprattutto dall'orizzonte di problemi venutosi a creare in seguito alle difficoltà intrinseche dell'induttivismo o positivismo o operazionalismo o fenomenalismo.

Ad esempio, il fenomenalista desidera tradurre le asserzioni su oggetti fisici in asserzioni su osservazioni. Ad esem-

[22] Cfr. *Tractatus* cit., 6.37.

[23] L'ho messo in evidenza in «Aristotelian Society Supplementary Volume», 22 (1948), pp. 141-54, § 3; specialmente p. 148. In quest'articolo ho dato un breve schizzo di un programma che da allora ho ampiamente completato.

[24] Cfr. il mio articolo citato nella nota precedente.

pio, «C'è un vaso di fiori sul davanzale della finestra» dovrebbe essere traducibile in qualcosa come «Se qualcuno, situato nel posto appropriato, guarda nella direzione appropriata, vedrà quello che ha imparato a chiamare vaso di fiori». L'obiezione piú semplice (ma per nulla piú importante) al fatto che si voglia considerare la seconda asserzione come una traduzione della prima, consiste nel mettere in evidenza che mentre la seconda sarà vera (in modo vuoto) quando nessuno guarda verso la finestra, sarebbe assurdo il dire che ogni volta che nessuno sta guardando verso il davanzale di qualche finestra, dev'esserci su di esso un vaso di fiori. Il fenomenalista è tentato di rispondere che il ragionamento dipende dalla definizione, in termini di tavole di verità, del condizionale (dell'«implicazione materiale») e che dobbiamo renderci conto che c'è bisogno di un'interpretazione differente del condizionale, di un'interpretazione *modale* che lasci spazio al fatto che ciò che intendiamo è qualcosa come «Se qualcuno guarda, o se qualcuno guardasse, vedrà, o vedrebbe, un vaso di fiori»[25].

Si potrebbe pensare che la nostra $a \underset{N}{\rightarrow} b$ sia in grado di fornirci il condizionale modale desiderato, e in un certo modo ce lo fornisce. In realtà, ce lo fornisce tanto bene quanto ci si potrebbe mai aspettare che ce lo fornisse. Nondimeno, la nostra obiezione originaria sta in piedi, perché sappiamo che se $\bar{a}$ è necessaria – cioè, se $\bar{a} \in N$ – allora $a \underset{N}{\rightarrow} b$ vale per ogni b. Ciò significa che, se per una ragione o per l'altra il luogo in cui è (o non è) situato un vaso di fiori è tale che è fisicamente *impossibile* che qualcuno lo guardi, allora «Se qualcuno guarda, o qualcuno guardasse, verso quel posto, allora vedrà, o vedrebbe un vaso di fiori» sarebbe vera solo perché nessuno *può* guardare[26]. Ma ciò significa che la traduzione modale

[25] Fu R. B. Braithwaite a rispondere, seguendo linee simili a queste, all'obiezione di soddisfacimento vuoto che gli mossi dopo che egli ebbe letto un suo scritto in un seminario della professoressa Susan Stebbing, nella primavera del 1936. Era la prima volta che sentivo parlare, in un contesto come questo, di quello che oggi si chiama «condizionale congiuntivo». Per una critica ai «programmi riduzionistici» dei fenomenisti, cfr. la nota 4 e il testo relativo.

[26] Una formulazione un po' piú completa di questo punto di vista sul condizionale congiuntivo si può trovare nella mia nota *On Subjunctive Conditionals with Impossible Antecedents* [Sui condizionali congiuntivi con antecedenti impossibili], in «Mind», N. S. 68 (1959), pp. 518-20.

del fenomenalista di «Al posto x c'è un vaso di fiori» sarà vera per tutti quei posti x che per una ragione fisica o per l'altra, nessuno *può* guardare. (Cosí, c'è un vaso di fiori – o qualunque altra cosa preferiate – al centro del Sole). Ma tutto questo è assurdo.

Per questa, e per molte altre ragioni, non credo che ci sia la minima possibilità di salvare, con questo metodo, il fenomenalismo.

Per quanto riguarda la dottrina dell'operazionalismo – che esige che i termini scientifici, quali lunghezza, solubilità, ecc., siano definiti nei termini della procedura sperimentale appropriata – si può mostrare piuttosto facilmente che tutte le cosiddette definizioni operative saranno circolari. Posso mostrarlo brevemente nel caso di «solubile»[27].

Gli esperimenti per mezzo dei quali controlliamo se una sostanza quale lo zucchero sia *solubile in acqua*, implicano controlli quali il recupero dello zucchero dalla soluzione (poniamo, per evaporazione dell'acqua; cfr. punto 3). È chiaro che è necessario identificare la sostanza recuperata, cioè a dire, determinare se abbia le stesse proprietà dello zucchero. Tra queste proprietà, una è la *solubilità in acqua*. Dunque, se vogliamo controllare «x è solubile in acqua» mediante i controlli operativi standard, dobbiamo almeno dire qualcosa del genere:

«x è *solubile in acqua* se e solo se *a*), quando lo mettiamo nell'acqua x sparisce (necessariamente) e *b*) quando, dopo l'evaporazione dell'acqua si ritrova (necessariamente) una sostanza che è a sua volta *solubile in acqua*».

La ragione fondamentale per la circolarità di questo genere di definizione è molto semplice: gli esperimenti non sono mai conclusivi e devono, a loro volta, essere controllabili per mezzo di ulteriori esperimenti.

Sembra che gli operazionalisti credessero che, una volta che il problema del condizionale congiuntivo fosse stato ri-

[27] L'argomento è contenuto in un mio contributo del gennaio 1955 al volume dedicato a Carnap della Library of Living Philosophers, a cura di P. A. Schilpp. Tale articolo si trova ora in *Conjectures and Refutations* cit., cap. 11, p. 278. Per quanto riguarda la circolarità della definizione operativa di lunghezza, la possiamo vedere da questi due fatti: *a*) la definizione operativa di *lunghezza* implica correzioni di *temperatura*, e *b*), la definizione operativa (usuale) di *temperatura* implica misurazioni di lunghezza.

solto (in modo da evitare il soddisfacimento vuoto del condizionale definiente) non ci sarebbero stati altri ostacoli sulla strada delle definizioni operative dei termini disposizionali. Sembra che il grande interesse dimostrato per il cosiddetto problema dei condizionali congiuntivi (o controfattuali) fosse dovuto soprattutto a questa credenza. Ma credo di aver mostrato che se anche avessimo risolto il problema dell'analisi logica dei condizionali congiuntivi (o «nomici») non potremmo sperare di definire, operazionalisticamente, i termini disposizionali, o universali. Infatti, come ho spiegato qui ai punti 1 e 2, e nel § 25 del libro, i termini universali, o disposizionali, trascendono l'esperienza.

Addendum, 1968.

Da quando quest'appendice fu pubblicata, per la prima volta, nel 1959, c'è stata una replica molto interessante di W. Kneale, «BJPS», 12 (1961), pp. 99 sgg., e una critica di G. C. Nerlich e W. A. Suchting, «BJPS», 18 (1967), pp. 233 sgg., a cui risposi, in «BJPS» 18 (1967), pp. 316 sgg. Adesso non credo che la mia risposta fosse molto buona. Infatti, solo dopo aver ripreso in considerazione le critiche di Kneale mi resi conto di che cosa fosse alla radice della nostra controversia.

Ora credo che alla radice della nostra controversia ci fosse il fatto che la maggior parte dei filosofi considerano importanti le definizioni, e non hanno mai preso sul serio la mia assicurazione che io non le considero importanti. Io non credo che le definizioni possano rendere definito il significato delle nostre parole, e non credo neanche che valga la pena preoccuparsi per il problema se un termine possa o no essere definito (anche se talvolta il fatto che un termine possa essere definito con l'aiuto di termini *di un certo genere* può rivestire un certo, moderato interesse); infatti, in ogni caso abbiamo bisogno di termini primitivi non definiti.

Potrei forse riassumere la mia posizione dicendo che mentre le teorie e i problemi connessi con la loro verità sono estremamente importanti, le parole e i problemi connessi con il loro significato non lo sono. (Cfr. *Conjectures and Refutations*, 3ª ed., 1968, punto 9 di p. 28).

Per questa ragione, io non nutro in realtà molto interesse per la definizione o la definibilità di «necessità naturale», pur avendo interesse per il fatto (perché credo che sia un fatto) che l'idea non è priva di significato.

Meno che mai sono interessato a stabilire il fatto (se è un fatto, il che considero dubbio) che un termine modale può essere definito con l'aiuto di termini non-modali. Se ho dato l'impressione di voler mostrare proprio questo, ho certamente dato un'impressione sbagliata.

Appendice *xi

Sull'uso e l'abuso degli esperimenti immaginari, specialmente nella teoria dei quanti

Le critiche presentate nelle ultime parti di quest'appendice hanno carattere logico. Il mio scopo principale non è quello di rifiutare certi argomenti, alcuni dei quali, per quanto ne so, possono ormai da tempo essere stati messi da parte dai loro creatori. Piuttosto cercherò di mostrare che certi *metodi di argomentazione* – metodi che per molti anni sono stati usati nelle interpretazioni della teoria dei quanti senza peraltro essere stati messi alla prova – sono inammissibili. Qui l'oggetto principale delle mie critiche è costituito soprattutto dall'*uso apologetico* degli esperimenti immaginari, e non da una teoria particolare in difesa della quale siano stati proposti questi metodi [1]. Meno che mai desidero creare l'impressione di star mettendo in dubbio la fecondità degli esperimenti immaginari.

1) Uno dei piú importanti esperimenti immaginari nella storia della filosofia naturale, che costituisce al medesimo tempo una delle argomentazioni piú semplici e ingegnose nella storia del pensiero razionale intorno all'universo, è contenuto nelle critiche di Galileo alla teoria del moto di Aristotele [2]. Prova la falsità della supposizione di Aristotele che la velocità naturale di un corpo piú pesante sia maggiore di quella di un corpo piú leggero. Ecco le argomentazioni del personaggio che rappresenta Galileo: «Quando dunque noi avessimo due mobili, le naturali velocità de i quali fussero

[1] Piú in particolare, io non desidero criticare qui né la teoria dei quanti, né qualche sua interpretazione particolare.

[2] Galileo stesso dice orgogliosamente del suo argomento (mette le parole in bocca di Simplicio): «Il vostro discorso procede benissimo veramente». Cfr. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, in *Opere complete*, vol. XIII, 1855, Prima giornata, p. 66.

ineguali, è manifesto che se noi congiugnessimo il piú tardo col piú veloce, questo dal piú tardo sarebbe in parte ritardato, ed il tardo in parte velocitato dall'altro piú veloce». Cosí, «se questo è, ed è insieme vero che una pietra grande si muova, per esempio, con otto gradi di velocità, ed una minore con quattro, adunque, congiugnendole amendue insieme, il composto di loro si moverà con velocità minore di otto gradi: ma le due pietre, congiunte insieme, fanno una pietra maggiore che quella prima, che si moveva con otto gradi di velocità: *adunque questo composto (che pure è maggiore che quella prima sola) si muoverà piú tardamente che la prima sola, che è minore; che è contro alla vostra supposizione*»[3]. E poiché questa supposizione di Aristotele è quella da cui prende le mosse il suo ragionamento, essa è ora confutata: si è mostrato che è assurda.

Nell'esperimento immaginario di Galileo io scorgo un modello perfetto dell'uso migliore che si possa fare degli esperimenti immaginari. Si tratta dell'*uso critico.* Non intendo però suggerire che questo sia l'unico modo di usare tali esperimenti. C'è, in modo particolare, un uso *euristico* molto apprezzabile, ma ci sono anche usi meno apprezzabili.

Un vecchio esempio di quello che io chiamo uso euristico degli esperimenti immaginari è l'uso che forma la base euristica dell'atomismo. Immaginiamo di prendere un pezzo d'oro, o di qualche altra sostanza, e di suddividerlo in parti sempre piú piccole «finché arriviamo a parti cosí piccole che non possono essere ulteriormente suddivise»: si tratta di un esperimento ideale usato allo scopo di spiegare gli «atomi indivisibili». Gli esperimenti euristici immaginari sono diventati particolarmente importanti in termodinamica (il ciclo di Carnot), e ultimamente sono diventati di moda grazie al loro impiego nella teoria della relatività e nella teoria dei quanti. Uno dei migliori esempi di questo genere di esperimenti è quello, immaginato da Einstein, dell'ascensore sottoposto ad accelerazione: illustra l'equivalenza locale di accelerazione e gravità, e suggerisce che in un campo gravitazionale i raggi di luce possono procedere seguendo traiettorie curvilinee. Quest'uso è importante e legittimo.

[3] GALILEO, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* cit., p. 66.

Lo scopo principale di questa nota è quello di mettere in guardia contro quello che può essere chiamato *l'uso apologetico degli esperimenti immaginari.* Quest'uso risale, secondo me, alla discussione del comportamento dei regoli di misura e degli orologi dal punto di vista della relatività speciale. In un primo tempo questi esperimenti furono usati in modo illustrativo ed espositivo, in modo, cioè, perfettamente legittimo. Ma poi, nella discussione della teoria dei quanti, furono usati talvolta come argomenti di carattere ora critico ora difensivo, o apologetico. (In questo sviluppo ebbe una parte importante il microscopio immaginario di Heisenberg, per mezzo del quale si potrebbero osservare gli elettroni; cfr. punti 9 e 10).

Ora, l'uso di esperimenti immaginari nelle argomentazioni critiche è indubbiamente legittimo: equivale a un tentativo di mostrare che l'autore di una teoria ha trascurato certe possibilità. È chiaro che dev'essere anche legittimo controbattere a tali obiezioni critiche mostrando, ad esempio, che l'esperimento immaginario proposto è in linea di principio impossibile, e che qui, almeno, non si è trascurata alcuna possibilità [4]. Un esperimento immaginario progettato con spirito critico – progettato cioè allo scopo di criticare una teoria mostrando che si sono trascurate certe possibilità – è di solito lecito, ma si deve far molta attenzione nel dargli una risposta: piú in particolare, nel ricostruire l'esperimento controverso allo scopo di difendere la teoria, è importante *non introdurre nessun'idealizzazione*, o altre assunzioni speciali, a meno che non siano favorevoli a un oppositore, o a meno che un oppositore, che usi l'esperimento immaginario in questione, non sia costretto ad accettarli.

2) Piú in generale, io penso che l'uso argomentativo degli esperimenti immaginari sia legittimo soltanto se i punti di vista dell'oppositore nella disputa sono stati formulati con chiarezza e se si è aderito alla regola secondo cui *le idealizzazioni che si sono fatte devono essere concessioni all'oppositore, o almeno devono poter essere accettate dall'oppositore.* Ad esempio, nel caso del ciclo di Carnot tutte le idealizza-

[4] Ad esempio, nella sua lettera ristampata qui nell'appendice *XII, Einstein ha mostrato che il mio esperimento del § 77 è in linea di principio impossibile (dal punto di vista della teoria dei quanti); cfr. pp. 257-58, nota **, e § 77, note *3 e *4.

zioni introdotte accrescono l'efficienza della macchina, cosicché l'oppositore della teoria – il quale asserisce che una macchina termica può produrre lavoro meccanico senza trasferire il calore da una temperatura piú alta a una temperatura piú bassa – non può non essere d'accordo che si tratta di concessioni. È chiaro che ogni volta che questa regola venga violata le idealizzazioni non possono piú essere permesse per gli scopi della discussione critica.

3) Questa regola può essere applicata, per esempio, alla discussione promossa dall'esperimento immaginario di Einstein, Podolsky e Rosen. (Il loro ragionamento è stato brevemente riformulato da Einstein in una lettera qui riprodotta nell'appendice *XII; ulteriori commenti su queste discussioni si trovano nel mio *Postscript*, § *109). Nella loro argomentazione critica Einstein, Podolsky e Rosen tentano di far uso di idealizzazioni che potessero essere accettate da Bohr, e nella sua replica Bohr non mette in dubbio la legittimità delle loro idealizzazioni. Einstein, Podolsky e Rosen introducono (cfr. *Postscript*, § *109 e appendice *XII) due particelle, *A* e *B*, che interagiscono in modo tale che, misurando la posizione (o l'impulso) di *B*, la teoria ci permette di calcolare la posizione (o l'impulso) di *A* che nel frattempo si è di molto allontanata da *B* e non può piú essere disturbata dalla misurazione di *B*. Dunque l'impulso (o la posizione) di *B* non può risultare offuscato – o «imbrattato», per usare un termine di Schrödinger – come vorrebbe Heisenberg [5]. Nella sua replica, Bohr opera con l'idea che la misurazione di una posizione si può ottenere soltanto grazie a «qualche strumento *rigidamente fissato al sostegno che definisce il sistema di riferimento spaziale*», mentre la misurazione dell'impulso dovrebbe essere eseguita da un «diaframma» *mobile* il cui «impulso... viene misurato tanto prima quanto dopo il passaggio della

[5] Naturalmente Heisenberg pensava soltanto all'imbrattamento di una sola particella: quella che è misurata. Einstein, Podolsky e Rosen, mostrano che deve essere esteso a un'altra particella: quella con cui la particella misurata ha interagito in un qualche istante, forse anni fa. Ma se le cose stanno cosí, come possiamo evitare che tutto sia «imbrattato» – il mondo intero – da una singola osservazione? La risposta è, presumibilmente, che, a causa della «riduzione del pacco d'onda» l'osservazione distrugge la vecchia *immagine* del sistema e, nello stesso tempo, ne crea una nuova. Cosí, l'interferenza non è con il mondo, ma semplicemente col nostro modo di rappresentarlo. Come si vedrà, questa situazione è illustrata dalla replica di Bohr, che segue nel testo.

particella»[6]. Bohr opera con l'argomento che, nello scegliere uno di questi due sistemi di riferimento, «noi... ci precludiamo ogni... possibilità» di usare l'altro, in relazione con lo stesso sistema fisico che stiamo analizzando. Se capisco bene quello che dice, suggerisce che, benché A non soffra di alcuna interferenza, le sue coordinate possono risultare imbrattate dall'imbrattamento del *sistema di riferimento.*

4) La replica di Bohr mi sembra inaccettabile per almeno tre ragioni diverse.

In primo luogo, prima dell'esperimento immaginario proposto da Einstein, Podolsky e Rosen, la ragione che si era soliti dare per l'imbrattamento della posizione o dell'impulso di un sistema era che, misurandolo, si interferiva col sistema. Mi sembra che Bohr abbia lasciato cadere surrettiziamente quest'argomento e gli abbia sostituito l'affermazione (piú o meno chiara) che la ragione è che si interferisce col nostro sistema di riferimento, o col sistema di coordinate, e non col sistema fisico. Questo è un cambiamento troppo grosso perché possa passare inosservato. Si sarebbe dovuto riconoscere esplicitamente che la posizione piú antica era stata confutata dall'esperimento immaginario, e si sarebbe dovuto mostrare perché questo non distrugga quello sul quale era stato costruito.

A questo proposito, non dobbiamo dimenticare che cosa fosse destinato a mostrare l'esperimento di Einstein, Podolsky e Rosen. Era destinato semplicemente a confutare certe *interpretazioni* delle formule d'*indeterminazione*, non certo a confutare queste formule. In un certo senso la risposta di Bohr riconobbe, sia pure in modo non esplicito, che l'esperimento immaginario aveva raggiunto il proprio scopo; Bohr infatti tentò semplicemente di difendere le relazioni d'indeterminazione in quanto tali; rinunciò al punto di vista secondo cui la misurazione interferirebbe col sistema A, che avrebbe dovuto imbrattare. Inoltre, il ragionamento di Einstein, Podolsky e Rosen poté essere spinto un po' piú in là grazie all'assunzione che nello stesso istante in cui misuriamo l'impulso di B misuriamo (accidentalmente) la posizione di A. Otteniamo allora, *per quell'istante*, le posizioni e gli impulsi

[6] BOHR, in «Physical Review», 48 (1935), pp. 696-702. Le citazioni sono prese dalle pp. 700 e 699 (il corsivo è mio). Cfr. anche pp. 257-58, nota **.

sia di *A* sia di *B*. (Non c'è dubbio che l'impulso di *A* e la posizione di *B* saranno stati distrutti o imbrattati da queste misurazioni). Ma questo è sufficiente a stabilire il punto che Einstein, Podolsky e Rosen volevano far valere: che è scorretto interpretare le formule di indeterminazione come asserenti che il sistema può avere, nel medesimo tempo, una posizione e un impulso esattamente definiti, anche se si deve ammettere che è impossibile *predire* impulso e posizione al medesimo tempo. (Per un'interpretazione che tiene conto di tutto questo, cfr. il mio *Postscript*).

In secondo luogo, l'argomento di Bohr, secondo cui «ci siamo preclusi» l'altro sistema di riferimento, mi sembra un argomento *ad hoc*: infatti è chiaramente possibile misurare l'impulso mediante uno spettroscopio (sia direttamente sia usando l'effetto Doppler), e lo spettroscopio sarà rigidamente fissato allo stesso sistema a cui è fissato il primo «strumento». (Il fatto che lo spettroscopio assorba la particella *B* è irrilevante al ragionamento che riguarda il destino di *A*). Cosí, non si può accettare come parte essenziale dell'esperimento un apparato che preveda un sistema di riferimento mobile.

In terzo luogo, Bohr non spiega qui come misurare l'impulso di *B* con l'aiuto di questo diaframma mobile. In un suo scritto successivo, si trova descritto un metodo per compiere tale misurazione; ma questo metodo mi sembra, di nuovo, illecito[7]. Infatti il metodo descritto da Bohr consiste nel misurare (due volte) la *posizione* di un «diaframma munito di una fessura... e sospeso, mediante deboli molle, a un giogo solido»[8]; e poiché la misurazione dell'impulso con un apparato di questo genere dipende da misurazioni di posizione, non convalida l'argomento che Bohr porta contro Einstein, Podolsky e Rosen, né riesce altrimenti. Infatti, in questo modo non possiamo ottenere l'impulso «accuratamente sia prima sia dopo il passaggio» di *B*[9]: la prima di queste misurazioni (che utilizza una misurazione di *posizione*) interferirà con l'impulso del diaframma; essa sarà dunque soltanto retro-

[7] Cfr. BOHR, in *Albert Einstein: Philosopher-Scientist* [A. Einstein: scienziato filosofo], a cura di P. A. Schilpp, 1949; cfr. specialmente il diagramma a p. 220.

[8] *Ibid.*, p. 219.

[9] BOHR, in «Physical Review», 48 (1935), p. 699.

spettiva, e non sarà di alcuna utilità per calcolare l'impulso del diaframma nell'istante immediatamente precedente l'interazione con *B*.

Non sembra, perciò, che nella sua replica Bohr abbia aderito al principio che raccomanda di compiere solo quelle idealizzazioni, o quelle speciali assunzioni, che siano favorevoli ai suoi oppositori (a parte il fatto che era tutt'altro che chiaro cosa volesse contestare).

5) Ciò mostra che, quando si tratta di esperimenti immaginari di questo genere, c'è il grave pericolo di portare avanti l'analisi fin dove il portarla avanti è utile per i nostri scopi, e poi non piú; e questo pericolo si può evitare solo se si aderisce rigorosamente ai principî enunciati piú sopra.

Ci sono tre casi simili, ai quali desidero fare riferimento, perché li trovo istruttivi.

6) Allo scopo di controbattere un esperimento critico immaginario di Einstein, basato sulla sua famosa formula $E = mc^2$, Bohr fece ricorso ad argomenti tratti dalla teoria gravitazionale di Einstein (cioè a dire dalla relatività generale)[10]. Ma $E = mc^2$ può essere derivata dalla relatività speciale, e anche da argomentazioni non-relativistiche. In ogni caso, assumendo $E = mc^2$, non assumiamo di certo la validità della teoria einsteiniana della gravitazione. Se, perciò, come suggerisce Bohr, per salvare la non-contraddittorietà della teoria dei quanti (in presenza di $E = mc^2$), dobbiamo assumere certe formule caratteristiche della teoria gravitazionale di Einstein, allora io sostengo che ciò equivale alla strana asserzione che la teoria dei quanti contraddice la teoria gravitazionale di Newton e, oltre a ciò, all'asserzione, ancor piú strana, che la validità della teoria gravitazionale di Einstein (o almeno delle formule caratteristiche usate, che fanno parte della teoria del campo gravitazionale) può essere derivata dalla teoria dei quanti. Credo che questo risultato non farà felici neanche quelli che sarebbero pronti ad accettarlo.

Cosí abbiamo ancora un esperimento immaginario che fa assunzioni stravaganti, a scopo apologetico.

7) Anche la replica di David Bohm all'esperimento di

[10] BOHR, in *Albert Einstein: Philosopher-Scientist* cit.; il caso è discusso alle pp. 225-28. Il dottor J. Agassi ha attirato la mia attenzione sul fatto che l'argomentazione non è valida. * Dobbiamo ricordare che «*l'equivalenza*» $m_i = m_g$ fa parte della teoria di Newton.

Einstein, Podolsky e Rosen mi sembra altamente insoddisfacente[11]. Bohm crede di aver mostrato che la particella *A* di Einstein, che si è allontanata molto da *B* e dall'apparato di misurazione, viene nondimeno imbrattata nella sua posizione (o nel suo impulso) quando si misuri l'impulso (o la posizione) di *B*, e a questo fine tenta di mostrare che, nonostante si sia allontanata, *A* soffre ancora di interferenze, in modo che non è possibile predire. In questo modo tenta di mostrare che la sua teoria concorda con l'interpretazione data da Heisenberg alle relazioni di indeterminazione. Ma non ci riesce. Che non ci riesca diventa manifesto se consideriamo che le idee di Einstein, Podolsky e Rosen ci permettono, con una leggera estensione del loro esperimento, di determinare simultaneamente le posizioni *e* gli impulsi sia di *A* sia di *B*, anche se il risultato di questa determinazione avrà valore *predittivo* solo per la posizione di una particella e l'impulso dell'altra. Infatti, come abbiamo spiegato al punto 4), possiamo misurare la posizione di *B* mentre qualcun altro, situato a grande distanza, può misurare accidentalmente l'impulso di *A* nel medesimo istante, o ad ogni modo prima che l'effetto imbrattante della nostra misurazione di *B* abbia potuto raggiungere *A*. Ma questo è tutto ciò di cui c'è bisogno per mostrare che il tentativo compiuto da Bohm allo scopo di salvare l'idea di Heisenberg della nostra interferenza con *A* è fuori posto.

La replica di Bohm a quest'obiezione è implicita nella sua asserzione che l'effetto perturbatore procede a velocità superiore a quella della luce, o addirittura istantaneamente (cfr. i commenti alla velocità superiore a quella della luce, di Heisenberg, nel § 76), assunzione questa che dev'essere sostenuta dall'ulteriore assunzione che quest'effetto non può essere usato per trasmettere segnali. Ma che cosa accade, *in realtà*, se le due misurazioni sono eseguite simultaneamente? Forse che la particella che dovremmo osservare nel nostro microscopio di Heisenberg si mette a ballare proprio sotto i nostri occhi? E se sí, non è questo un segnale? (Questo par-

[11] Cfr. DAVID BOHM, in «Physical Review», 85 (1952), pp. 166 sgg., 180 sgg. Cfr. specialmente pp. 186-87. (A quanto mi par di capire, Bohm non sostiene piú alcuni dei punti di vista espressi negli scritti che ho criticato qui. Ma mi sembra che almeno una parte delle mie argomentazioni sia ancora applicabile alle sue teorie piú recenti).

ticolare effetto imbrattante di Bohm, come la «riduzione del pacco d'onde», non fa parte del suo formalismo, ma dell'interpretazione del formalismo).

8) Un esempio simile è costituito dalla risposta di Bohm a un altro esperimento immaginario proposto da Einstein (che in questo modo ha richiamato in vita le critiche mosse da Pauli alla teoria, formulata da de Broglie, dell'onda pilota)[12].

Einstein propone di prendere in considerazione una «particella» macroscopica (che può essere una cosa piuttosto grossa, ad esempio una palla da bigliardo) che si muove, con una certa velocità costante, dall'uno all'altro di due muri paralleli, dai quali è riflessa elasticamente. Einstein mostra che questo sistema può essere rappresentato, nella teoria di Schrödinger, da un'onda stazionaria e mostra inoltre che la teoria dell'onda pilota di de Broglie, o della cosiddetta «interpretazione causale della teoria dei quanti» di Bohm, conduce al risultato paradossale, messo in evidenza per la prima volta da Pauli, che la velocità della particella (o della palla da bigliardo) si annulla; o, in altre parole: la nostra assunzione originaria, secondo cui la particella si muove con qualche velocità arbitrariamente scelta, conduce, nella sua teoria, alla conclusione che per ogni velocità scelta la velocità è zero, e che la particella non si muove.

Bohm accetta questa conclusione, e risponde attenendosi alle linee seguenti: «L'esempio preso in considerazione da Einstein – egli scrive – è quello di una particella che *si muove liberamente* fra due muri perfettamente riflettenti e perfettamente lisci»[13]. (Non è necessario che ci addentriamo nelle particolarità piú sottili dell'apparato). «Ora, secondo l'interpretazione causale della teoria dei quanti – cioè, secondo l'interpretazione di Bohm – ... la particella è in istato *di quiete*». Questo scrive Bohm, e continua dicendo che, se desideriamo *osservare* la particella dobbiamo «far scattare» un processo che farà muovere la particella[14]. Ma quali che siano i suoi meriti, quest'argomento che chiama in causa l'osser-

[12] Cfr. A. EINSTEIN, in *Scientific Papers Presented to Max Born* [Scritti scientifici in onore di M. Born], 1953, pp. 33 sgg. Cfr. specialmente p. 39.

[13] D. BOHM, in *Scientific Papers Presented to M. Born* cit., p. 13. Il corsivo è mio.

[14] *Ibid.*, p. 14. Si veda anche la seconda nota nella stessa pagina.

vazione non è piú interessante. Quello che è interessante è che l'interpretazione di Bohm paralizza la particella che si muove liberamente: il suo argomento equivale all'asserzione che, fin tanto che non la osserviamo, la particella non può muoversi fra i due muri. Infatti l'assunzione che la particella *si muova* in questo modo, conduce Bohm alla conclusione che essa sia *in quiete*, a meno che non venga messa in moto dall'osservazione. Bohm nota quest'effetto paralizzante, ma, semplicemente, non lo discute. Invece procede all'asserzione che, benché la *particella* non si muova, le nostre *osservazioni* ci mostreranno che si sta movendo (ma questo non era il punto in questione); e procede inoltre a costruire un esperimento immaginario interamente nuovo, descrivendo in qual modo la nostra osservazione – il segnale radar, o il fotone usato per osservare la velocità della particella – potrebbe far scattare il movimento desiderato. Ma intanto il problema non era neanche questo. E, in secondo luogo, Bohm non riesce a spiegare in che modo il fotone che fa scattare il movimento possa rivelarci la particella nella sua piena velocità propria, e non invece in uno stato di accelerazione che le fa raggiungere la sua velocità propria. Ciò infatti sembra richiedere che la particella (che può essere veloce e pesante quanto vogliamo) acquisti e riveli la sua piena velocità durante il tempo eccessivamente breve della sua interazione con il fotone che la fa scattare. Tutte queste sono assunzioni *ad hoc* che pochi degli oppositori di Bohm accetterebbero.

Ma possiamo elaborare l'esperimento immaginario di Einstein operando con due particelle (o palle da bigliardo), delle quali l'una si muove dal muro sinistro al centro della stanza e viceversa, mentre l'altra si muove tra il muro di destra e il centro; nel centro le due particelle collidono elasticamente tra loro. Quest'esempio conduce di nuovo alle onde stazionarie e perciò alla sparizione della velocità, e le critiche di Pauli-Einstein alla teoria rimangono invariate. Ma l'effetto-grilletto di Bohm diventa ancor piú precario. Assumiamo infatti di osservare la particella di sinistra sparandole, da sinistra, un fotone che faccia scattare l'effetto. Secondo Bohm questo manderà all'aria l'equilibrio delle forze che mantengono la particella in istato di quiete e la particella comincerà a muoversi presumibilmente da sinistra a destra. Ma anche se abbiamo fatto scattare soltanto la particella di sinistra, la particella di destra dovrà partire simultaneamente, e nella direzione opposta. Chiedere a un fisico di accettare tranquillamente la possibilità di tutti questi processi – tutti assunti *ad hoc*, allo scopo di evitare le conseguenze dell'argomento di Pauli ed Einstein – è veramente chiedere molto.

Einstein avrebbe potuto, io credo, rispondere a Bohm nel modo seguente.

Nel caso preso in considerazione, il nostro sistema fisico era una grossa palla macroscopica. Non ci è stata data alcuna ragione per cui in questo caso non fosse possibile applicare la solita teoria classica della misurazione; e dopo tutto si tratta di una teoria che si conforma all'esperienza tanto quanto si può desiderare.

Ma, lasciando da parte la misurazione, si asserisce forse seriamente che una palla oscillante (o due palle oscillanti, in una disposizione simmetrica come quella che abbiamo descritto) semplicemente *non può* esistere se nessuno la sta osservando? O, il che è lo stesso, si asserisce forse seriamente che l'assunzione che la palla si muove, o oscilla, mentre nessuno l'osserva, deve condurre alla conclusione che non si muove? E che cosa accade se, una volta che l'osservazione ha messo in moto la palla, non si interferisce piú asimmetricamente con essa, cosicché il sistema diventa nuovamente stazionario? Allora la particella si ferma improvvisamente, cosí com'è partita? E la sua energia si trasforma in energia di campo? O il processo è irreversibile?

Anche supponendo che a queste questioni si possa dare, in qualche modo, una risposta, io credo che esse illustrino il significato delle critiche di Pauli e di Einstein e dell'uso critico degli esperimenti immaginari, specialmente dell'esperimento di Einstein, Podolsky e Rosen. E credo che illustrino anche i pericoli di un uso apologetico degli esperimenti immaginari.

9) Finora ho discusso il problema di *coppie di particelle*, introdotte nella discussione da Einstein, Podolsky e Rosen. Mi rivolgo ora a qualcuno dei piú vecchi esperimenti immaginari con particelle singole, quali il famoso *microscopio immaginario* di Heisenberg, grazie al quale si potrebbero «osservare» elettroni e «misurare» o le loro posizioni o i loro impulsi. Pochi esperimenti immaginari hanno esercitato, sul pensiero fisico, un'influenza maggiore di questo.

Con l'aiuto del suo esperimento immaginario Heisenberg tentò di stabilire alcuni punti, dei quali posso menzionarne tre; *a*) l'*interpretazione* delle formule d'indeterminazione di Heisenberg, secondo cui tali formule asserirebbero l'esistenza di *barriere insuperabili alla precisione delle nostre misurazioni*; *b*) la *perturbazione* dell'oggetto misurato da parte del processo di misurazione, *sia della posizione sia dell'impulso*; e *c*) l'*impossibilità di controllare la «traiettoria» spazio-temporale* della particella. Io credo che le *argomentazioni* di Heisenberg tendenti ad avvalorare questi punti siano chiaramente prive di validità, quali che possano essere i meriti di questi punti, presi a sé. La ragione è che la discussione di Heisenberg *non riesce a dimostrare che le misurazioni di posizione e di impulso sono simmetriche*; simmetriche, cioè, rispetto alla perturbazione dell'oggetto misurato da parte del processo di misurazione. Infatti Heisenberg *mostra bensí*, con l'aiuto di questo esperimento, che allo scopo di misurare la *posizione* dell'elettrone dovremmo usare una luce ad alta frequenza, cioè a dire, fotoni ad alta energia – il che significa che trasferiamo all'elettrone un impulso sconosciuto, e cosí lo *disturbiamo* dandogli, per cosí dire, un forte colpo – ma *non* mostra che quando desideriamo misurare l'*impulso* dell'elettrone, e non la sua posizione, la situazione è analoga. In questo caso infatti, dice Heisenberg, dobbiamo osservare l'elettrone con una luce a bassa frequenza: cosí bassa da poter assumere che *con la nostra osservazione non disturbiamo l'impulso dell'elettrone.* Pur rivelando l'impulso, l'osservazione che ne risulta non riuscirà a rivelare la posizione dell'elettrone, che rimarrà cosí indeterminata.

Consideriamo ora quest'ultima argomentazione. Qui non si asserisce affatto che abbiamo *disturbato* (o «imbrattato») la posizione dell'elettrone. Infatti Heisenberg si limita semplicemente ad asserire che *non siamo riusciti a svelarla.* In realtà, la sua argomentazione implica che non abbiamo affatto disturbato il sistema (o l'abbiamo disturbato soltanto in modo cosí leggero che possiamo trascurare il disturbo): abbiamo usato fotoni di un livello di energia cosí basso che semplicemente non era disponibile l'energia sufficiente a disturbare l'elettrone. Cosí, stando all'argomentazione di Heisenberg, *i due casi – la misurazione della posizione e quella dell'impulso – sono ben lontani dall'essere analoghi o simmetri-*

ci. Questo fatto è però tenuto nascosto dalla solita chiacchiera (chiacchiera positivistica, o operazionalistica, o strumentalistica) intorno ai «*risultati della misurazione*» la cui incertezza è incontestabilmente simmetrica rispetto alla posizione e all'impulso. Tuttavia in innumerevoli discussioni dell'esperimento, a cominciare proprio da quella di Heisenberg, si assume sempre che quest'argomentazione stabilisca *la simmetria delle perturbazioni.* (Nel formalismo la simmetria tra posizione e impulso è naturalmente completa, ma questo non significa che l'esperimento immaginario di Heisenberg renda conto di questo fatto). Cosí si assume, in modo del tutto errato, che se misuriamo l'impulso dell'elettrone col microscopio di Heisenberg *ne disturbiamo la posizione*, e che questo effetto «imbrattante» è stato stabilito dalla discussione di Heisenberg del proprio esperimento immaginario.

Il mio esperimento immaginario del § 77 era basato in gran parte su quest'asimmetria nell'esperimento di Heisenberg (cfr. appendice VI, nota *1). Tuttavia il mio esperimento non è valido, proprio perché l'asimmetria invalida l'intiera discussione di Heisenberg a proposito della misurazione: per illustrare le *formule* di Heisenberg si possono usare solo le misurazioni risultanti da quella che io chiamo la *selezione fisica*, e una selezione fisica – come ho messo in evidenza, in modo del tutto corretto, nel mio libro – deve sempre soddisfare le «relazioni di dispersione». (La selezione fisica disturba *davvero* il sistema).

Se le «misurazioni» di Heisenberg fossero possibili, potremmo addirittura controllare, senza disturbarlo, l'impulso di un elettrone fra due misurazioni di posizione e ciò – in contraddizione col punto *c*) – ci permetterebbe di controllare (parte del) la sua «traiettoria» spazio-temporale, calcolabile in base a queste due misurazioni di posizione.

Che l'inadeguatezza dell'argomentazione di Heisenberg sia passata inosservata per tanto tempo è indubbiamente dovuto al fatto che le *formule* d'indeterminazione seguono chiaramente dal formalismo della teoria dei quanti (l'equazione d'onda) e che la simmetria fra la posizione *q*) e l'impulso *p*) è anche implicita in questo formalismo. Ciò può forse spiegare perché molti fisici non siano riusciti a esaminare l'esperimento immaginario di Heisenberg con sufficiente accuratezza: secondo me non lo presero sul serio, ma lo considerarono semplicemente come l'illustrazione di una formula derivabile. Io sostengo che si tratta di una cattiva illustrazione, proprio perché non riesce a render conto della simmetria fra posizione e impulso. Ed essendo una cattiva illustrazione, è del tutto inadeguata a interpretare queste formule, non parliamo poi di interpretare l'intera teoria dei quanti.

10) Sono convinto che l'immensa influenza dell'esperimento immaginario di Heisenberg sia dovuta al fatto che Heisenberg riuscí a trasmettere, per suo mezzo, un nuovo quadro metafisico del mondo fisico, proprio nel medesimo tempo in cui sconfessava la metafisica. (In ciò contribuí ad alimentare un'ossessione curiosamente ambivalente della nostra età post-razionalistica: la preoccupazione di uccidere il Padre – cioè la metafisica – proprio mentre, sotto qualche altra forma. Lo si mantiene inviolato e al di sopra di ogni critica. Nel caso di alcuni fisici quantistici sembra quasi che il padre sia Einstein). Il quadro metafisico del mondo, trasmesso in qualche modo dalla discussione che Heisenberg fece del suo esperimento, benché mai implicito in essa, è il seguente. La *cosa in sé* è inconoscibile: possiamo solo conoscere le sue apparenze, che si devono intendere (come è stato messo in evidenza da Kant) come risultanti dalla cosa in sé e dal nostro apparato percettivo. Cosí le apparenze risultano da una specie di interazione tra le cose in sé e noi stessi. Ecco perché una stessa cosa può apparirci in forme diverse, secondo i nostri diversi modi di percepirla, di osservarla e di interagire con essa. Noi tentiamo, per cosí dire, di catturare la cosa in sé ma non ci riusciamo mai: nelle nostre trappole non troviamo altro che apparenze. Possiamo disporre una classica *trappola per particelle* o una classica *trappola per onde* («classiche» perché possiamo costruirle e caricarle come una classica trappola per topi), e mentre facciamo scattare la trappola, interagendo cosí con essa, la cosa è indotta ad assumere l'apparenza di una particella o di un'onda. Tra queste due apparenze, o tra i due modi di intrappolare la cosa, c'è simmetria. Inoltre, mentre carichiamo la trappola, non solo dobbiamo fornire uno stimolo per la cosa allo scopo di indurla ad assumere una delle sue due classiche apparenze fisiche, ma dobbiamo anche metterle un'esca di energia: dell'energia necessaria per una realizzazione fisica classica della materializza-

zione dell'inconoscibile cosa in sé. In questo modo salviamo le leggi di conservazione.

Questo è il quadro metafisico trasmesso da Heisenberg, e forse anche da Bohr.

Ora, io sono ben lontano dall'obbiettare a una metafisica di questo genere (anche se non sono molto attratto da questa particolare miscela di positivismo e di trascendentalismo), e non ho nessuna obiezione contro il fatto che tale metafisica ci sia comunicata per mezzo di metafore. Ciò contro cui sollevo obiezioni è la disseminazione quasi inconsapevole di questo quadro metafisico, disseminazione spesso combinata con professioni di antimetafisica. Infatti non credo che debba essere permesso di affondare nell'inosservato, e dunque nel non criticato.

È interessante, io credo, che tanta parte dell'opera di David Bohm sembri ispirata dalla stessa metafisica. Si potrebbe addirittura descrivere il suo lavoro come un coraggioso tentativo di costruire una teoria fisica che renda la sua metafisica chiara ed esplicita. Ciò è ammirevole. Ma mi chiedo se questa particolare idea metafisica sia buona abbastanza, e valga realmente la pena che ci si prendano tanti fastidi, visto e considerato che (come si è visto) non può essere sostenuta dall'esperimento immaginario di Heisenberg, che è la fonte intuitiva di tutto questo.

Mi sembra che tra il «principio di complementarità» di Bohr e la sua teoria metafisica di una realtà inconoscibile – teoria che suggerisce la «rinuncia» (per usare un termine favorito da Bohr) alle nostre aspirazioni alla conoscenza e la restrizione dei nostri studi fisici alle apparenze e alle loro interrelazioni – ci sia una connessione piuttosto ovvia. Ma in questa sede non discuterò quest'ovvia connessione. Mi limiterò invece a discutere certi argomenti in favore della complementarità, argomenti che sono stati basati su ulteriori esperimenti immaginari.

11) In relazione con questo «principio di complementarità» (discusso piú a fondo nel mio *Postscript*; cfr. anche il mio articolo *Three Views Concerning Human Knowledge*, ora in *Conjectures and Refutations*, cap. III) Bohr ha analizzato un gran numero di sottili esperimenti immaginari, in modo egualmente apologetico. Poiché le formulazioni date da Bohr al principio di complementarità sono vaghe e difficili

a discutersi, farò ricorso a un libro ben noto e per certi aspetti eccellente, *Anschauliche Quantentheorie* di P. Jordan (in cui, tra parentesi, si discuteva brevemente il mio *Logik der Forschung*)[15].

Di (parte dei) contenuti del principio di complementarità, Jordan dà una formulazione che mette tale principio in relazione piú stretta col problema del *dualismo fra particelle e onde*. Jordan formula il principio nel modo seguente. «Qualsiasi esperimento che mettesse in evidenza *al medesimo tempo* sia le proprietà ondulatorie, sia le proprietà corpuscolari della luce, non soltanto contraddirebbe le teorie classiche (siamo ormai abituati alle contraddizioni di questo genere), ma, oltre a questo, sarebbe assurdo sia in senso logico sia in senso matematico»[16].

Jordan illustra questo principio col famoso esperimento delle due fessure. (Si veda la mia vecchia appendice v). «Supponiamo che ci sia una fonte luminosa da cui parte una luce monocromatica che cade su uno schermo nero dotato di due fessure [parallele] vicine l'una all'altra. Supponiamo ora, *da un lato*, che le fessure e la loro distanza siano sufficientemente piccole (a paragone della lunghezza d'onda della luce) per ottenere frange d'interferenza su una lastra fotografica, che registri la luce che passa per le due fessure; e, *d'altro lato*, che ci sia qualche apparato sperimentale che renda possibile trovare attraverso quale delle due fessure sia passato un singolo fotone»[17].

Jordan asserisce «che queste due assunzioni contengono una contraddizione»[18].

Non contesterò quest'asserzione, anche se la contraddizione non sarebbe un'assurdità logica o matematica (come Jordan suggerisce in uno dei passi che abbiamo citato); piuttosto, le due asserzioni prese insieme contraddirebbero il formalismo della teoria dei quanti. Tuttavia desidero contestare un altro punto. Jordan usa quest'esperimento per illustrare la sua formulazione dei contenuti del principio di complementarità. Ma lo stesso esperimento per mezzo del quale Jordan illustra questo principio può essere usato per confutarlo.

[15] JORDAN, *Anschauliche Quantentheorie* cit., p. 282.
[16] *Ibid.*, p. 115.
[17] *Ibid.*, pp. 115 sg. (Il corsivo è di Jordan).
[18] *Ibid.*, p. 116.

Si consideri infatti la descrizione data da Jordan dell'esperimento delle due fessure, omettendo, dapprima, la sua ultima ipotesi (quella introdotta dalle parole «*d'altro lato*»). Qui otteniamo frange d'interferenza sulla lastra fotografica. Dunque questo è un esperimento che «mette in risalto le proprietà ondulatorie della luce». Supponiamo ora che l'intensità della luce sia sufficientemente bassa da ottenere sulla lastra tracce distinte dell'impatto dei fotoni; o, in altre parole, cosí bassa che le frange d'interferenza siano analizzabili come dovute alla distribuzione di densità dei singoli impatti dei fotoni. Abbiamo qui, allora, «un solo esperimento» che «mette in risalto, *nel medesimo tempo*, sia le proprietà corpuscolari sia le proprietà ondulatorie della luce», o almeno alcune di tali proprietà. Cioè a dire, fa esattamente quello che, secondo Jordan, dovrebbe essere «assurdo in senso logico e in senso matematico».

È incontestabile che se fossimo in grado, oltre a ciò, di trovare attraverso quale delle fessure è passato un certo fotone, dovremmo essere capaci di determinare la sua traiettoria; e allora potremmo dire che quest'esperimento (presumibilmente impossibile) metterebbe in risalto ancor piú forte le proprietà corpuscolari del fotone. Ammetto tutto ciò, che però è assolutamente irrilevante. Infatti, ciò che il principio di Jordan asseriva non è che *qualche* esperimento che a prima vista può sembrare possibile si rivela impossibile – il che è banale – ma che *non ci sono* esperimenti che «mettano in risalto, *nel medesimo tempo*, sia le proprietà ondulatorie sia le proprietà corpuscolari della luce». E, come abbiamo mostrato, quest'asserzione è semplicemente falsa: è confutata da *quasi tutti* gli esperimenti tipici della meccanica quantistica.

Ma allora, che cosa voleva asserire Jordan? Forse che non c'è nessun esperimento che metta in risalto *tutte* le proprietà ondulatorie e *tutte* le proprietà corpuscolari della luce? È chiaro che la sua intenzione non poteva essere questa, dal momento che è impossibile anche un esperimento che metta in risalto, nel medesimo tempo, *tutte* le proprietà ondulatorie, anche se lasciamo cadere la richiesta che l'esperimento metta in risalto una qualsiasi delle proprietà corpuscolari. (E questo vale anche nella direzione opposta).

Quello che tanto disturba nell'argomentazione di Jordan è la sua arbitrarietà. Da quello che si è detto, è ovvio che devono esserci alcune proprietà ondulatorie e alcune proprietà corpuscolari che nessun esperimento è in grado di combinare. Questo fatto è generalizzato prima da Jordan e formulato come un principio (la cui formulazione da parte di Jordan abbiamo, ad ogni modo, confutato), e poi è illustrato per mezzo di un esperimento immaginario che Jordan dimostra impossibile. Tuttavia, come abbiamo visto, quella parte dell'esperimento di cui ognuno ammette la possibilità è proprio quella che confuta di fatto il principio, almeno nella formulazione che ne dà Jordan.

Ma guardiamo un po' piú da vicino all'altra metà dell'esperimento immaginario; alla parte, cioè, introdotta con le parole «d'altro lato». Se disponiamo le cose in modo da determinare la fessura attraverso la quale è passata la particella, allora, si dice, distruggiamo le frange. Bene. Ma distruggiamo le proprietà ondulatorie? Prendiamo la disposizione piú semplice: chiudiamo una delle fessure. Se lo facciamo, rimangono ancora molti segni del carattere ondulatorio della luce. (Anche con una sola fessura otteniamo una distribuzione ondulatoria [*wave-like*] della densità). Ma ora si ammette da parte dei nostri oppositori che le proprietà corpuscolari si mostrano in modo molto completo, dal momento che adesso possiamo rintracciare la traiettoria della particella.

12) Da un punto di vista razionale, tutti questi argomenti sono inammissibili. Non metto in dubbio che dietro il principio di complementarità di Bohr ci sia un'idea intuitiva interessante. Ma né Bohr né nessun altro membro della sua scuola sono stati in grado di spiegarla, neppure a quei critici che, come Einstein, hanno tentato di tutto, per anni, per capirla [19].

La mia impressione è che quest'idea potrebbe benissimo essere l'idea metafisica descritta al punto 10. Posso sbagliarmi, ma quale che sia quest'idea, ho la sensazione che Bohr ci sia debitore di una spiegazione migliore [20].

[19] Cfr. *Albert Einstein: Philosopher-Scientist* cit., p. 674.

[20] (Nota aggiunta nel 1967:) Un'ulteriore discussione di questi problemi si trova nel mio articolo *Quantum Mechanics Without «The Observer»* cit.

Appendice *XII

L'esperimento di Einstein, Podolsky e Rosen

Lettera di Albert Einstein, 1935

La lettera di Albert Einstein, qui tradotta [1], liquida in maniera concisa e decisiva il mio esperimento immaginario del § 77 del libro (si riferisce anche a una versione leggermente diversa di tale esperimento, contenuta in uno scritto inedito) e procede descrivendo con chiarezza ammirevole l'esperimento di Einstein, Podolsky e Rosen («Physical Review», 47, 1935, pp. 777-80; cfr. la mia nota a pp. 257-58 e il punto 3 dell'appendice *XI).

Fra questi due punti si troveranno alcune osservazioni a proposito della relazione fra teoria ed esperimento in generale, e dell'influenza delle idee positivistiche sull'interpretazione della teoria dei quanti.

I due ultimi capoversi trattano anche di un problema discusso nel mio libro (e in *Postscript*): il problema della probabilità soggettiva e del trarre conclusioni statistiche dalla nescienza. Io non sono ancora d'accordo con Einstein: credo che tiriamo queste conclusioni probabilistiche da congetture sull'equidistribuzione (spesso si tratta di congetture molto naturali, e per questa ragione non sempre fatte consapevolmente) e perciò da premesse probabilistiche.

Gli esecutori letterari di Einstein chiesero che, se si fosse pubblicata una traduzione della lettera, se ne pubblicasse contemporaneamente anche il testo originale. Ciò mi suggerí l'idea di riprodurre il manoscritto originale di Einstein.

[1] [La «traduzione» di cui parla Popper è, naturalmente, la traduzione inglese, opera dello stesso autore].

Old Lyme, 11 settembre '35.

Caro signor Popper,

Ho letto il suo articolo, e sono largamente [*weitgehend*] d'accordo con lei [×]. Solo, non credo nella possibilità di produrre un «caso super puro» che ci permetterebbe di predire la posizione *e* l'impulso (colore) di un fotone con precisione «inammissibile». Ritengo in linea di principio inefficaci i mezzi che Lei propone (uno schermo con un rapido otturatore congiunto con un insieme selettivo di filtri di vetro), per la ragione che io credo fermamente che un filtro di questo genere agirebbe in modo da «imbrattare» la posizione, proprio come farebbe una griglia spettroscopica.

Ragiono cosí. Si consideri un breve segnale luminoso (posizione precisa). Allo scopo di vedere piú facilmente gli effetti di un filtro assorbente, assumo che il segnale venga analizzato in un numero piú grande di treni d'onda quasi monocromatici, W_n. Supponiamo che l'insieme di filtri assorbenti tagli fuori tutti i colori W_n eccetto uno, W_1. Ora, questo gruppo d'onde avrà una considerevole estensione spaziale («imbrattamento» della sua posizione) perché è quasi-monocromatico; e ciò significa che il filtro «imbratterà» necessariamente la posizione.

Tutto sommato, la tendenza «positivistica» oggi alla moda [*modische*], di attaccarsi a ciò che è osservabile, non mi piace affatto. Considero banalmente ovvio che nell'ambito delle grandezze atomiche non è possibile fare predizioni con qualsiasi grado di precisione si desideri e penso (come del resto pensa anche lei) che la teoria non possa essere fabbricata a partire dai risultati dell'osservazione, ma possa solo essere inventata.

Non ho attualmente a mia disposizione copie dell'articolo che scrissi coi signori Rosen e Podolsky, ma posso dirle brevemente di che cosa si tratti.

Ci si può chiedere se, dal punto di vista dell'odierna teoria dei quanti, il carattere statistico delle nostre scoperte spe-

[×] Punto principale: la funzione ψ caratterizza un aggregato statistico di sistemi, piuttosto che un sistema singolo. Questo risulta anche dalla considerazione esposta piú sotto. Questo punto di vista rende inessenziale distinguere, piú particolareggiatamente, fra casi «puri» e casi «non puri».

rimentali *non sia altro che il risultato del fatto che si interferisce con un sistema dall'esterno, il che comprende il fatto che lo si misura*, mentre i sistemi in se stessi – descritti da una funzione ψ – si comportano in modo deterministico. Heisenberg civetta [*liebäugelt*] con quest'interpretazione senza adottarla coerentemente. Ma si può anche porre la domanda in questo modo: dovremmo considerare la funzione ψ, i cui cambiamenti dipendenti dal tempo sono, secondo l'equazione di Schrödinger, deterministici, come una descrizione completa della realtà fisica, e dovremmo perciò considerare l'interferenza (insufficientemente conosciuta) dall'esterno col sistema come la sola responsabile del fatto che le nostre predizioni hanno un carattere meramente statistico?

La risposta a cui perveniamo è che la funzione ψ non dovrebbe essere considerata come una descrizione completa dello stato fisico di un sistema.

Prendiamo in considerazione un sistema composito, consistente dei sistemi parziali *A* e *B* che interagiscono soltanto per un breve tempo.

Assumiamo di conoscere la funzione del sistema composito *prima* che l'interazione – ad esempio la collisione di due particelle libere – abbia avuto luogo. Allora l'equazione di Schrödinger ci darà la funzione ψ del sistema composito *dopo* l'interazione.

Si supponga di compiere ora (cioè dopo l'interazione) una misurazione ottimale [*vollständige*] sul sistema parziale *A*, misurazione che può essere compiuta in modi diversi, dipendenti comunque dalle variabili che si vogliono misurare con precisione: ad esempio la coordinata dell'impulso *o* quella della posizione. La meccanica quantistica ci darà allora la funzione ψ per il sistema parziale *B*, e ci darà *svariate funzioni ψ che differiscono secondo il genere di misurazioni che abbiamo scelto di compiere su A.*

Ora, è irragionevole assumere che lo stato fisico di *B* possa dipendere da qualche misurazione compiuta su un sistema *A* che a questo punto è separato da *B* [cosicché non interagisce piú con *B*] e ciò significa che due differenti funzioni ψ appartengono a un solo e medesimo stato fisico di *B*. Poiché una descrizione *completa* di uno stato fisico deve necessariamente essere una descrizione *non ambigua* (a parte alcuni particolari irrilevanti quali le unità, la scelta delle coordinate, ecc.), non è perciò possibile considerare la funzione ψ come la descrizione *completa* dello stato del sistema.

Un teorico quantistico ortodosso dirà, naturalmente, che non esiste nulla del genere di una descrizione completa e che può esserci soltanto una descrizione statistica di un *aggregato* di sistemi, piuttosto che una descrizione di *un singolo* sistema. Ma prima di tutto, deve *dirlo* chiaramente; e, in secondo luogo, io non credo che dobbiamo ritenerci soddisfatti di una descrizione cosí imprecisa e inconsistente della natura.

Si dovrebbe osservare che alcune delle predizioni precise che io posso ottenere dal sistema *B* (secondo il modo, liberamente scelto, di misurare *A*) possono benissimo essere in relazione tra loro nello stesso modo in cui sono in relazione tra loro le misurazioni di impulso e di posizione. È perciò praticamente impossibile evitare la conclusione che il sistema *B* ha davvero un impulso definito e una coordinata di posizione definita. Infatti, se, avendo liberamente scelto di far cosí [se ho scelto cioè di farlo senza interferire con esso], sono in grado di predire qualcosa, allora questo qualcosa deve esistere nella realtà.

Un [metodo di] descrizione che, come quello ora in uso, sia statistico in linea di principio, può secondo me, costituire soltanto una fase passeggera.

Desidero ripetere* che non credo che lei abbia ragione quando sostiene la tesi che è impossibile derivare conclusioni statistiche da una teoria deterministica. Le basti pensare alla meccanica statistica classica (la teoria dei gas o la teoria del moto browniano). Esempio: un punto materiale si muove di velocità costante in un circolo chiuso; io posso calcolare la probabilità di trovarlo, in un tempo dato, in una data parte della periferia. Ciò che è essenziale è solo questo: io non conosco lo stato iniziale, o non lo conosco con precisione!

Con i migliori saluti, suo A. Einstein

* Si tratta di un'allusione a una lettera precedente (K.R.P.).

(Facsimile ridotto)

Old Lyme. 11. IX. 35.

Lieber Herr Popper!

Ich habe Ihre Abhandlung angesehen und stimme weitgehend überein.* Nur glaube ich nicht an die Herstellbarkeit eines „überreinen Falles", der es erlauben würde, Ort und Impuls (Farbe) eines Lichtquants mit „unzulässiger" Genauigkeit zu prognostizieren. Ihr Mittel (Blende mit Momentan-Verschlussklappe in Verbindung mit selektiv durchlässigem Gläsersatz) halte ich aus dem Grunde für prinzipiell unwirksam, weil ich bestimmt glaube, dass ein solches Filter „ortsverschmierend" wirkt wie etwa ein Beugungsgitter.

Meine Begründung ist folgende. Denken Sie an ein kurzes Lichtsignal (genauer Ort). Um die Wirksamkeit des Absorptionsfilters bequem zu übersehen, denke ich mir dieses rein formal in eine grosse Anzahl von quasi-monochromatischen Wellenzügen W_n zerlegt. Der Absorptionssatz wirke auf alle W_n (Farben) zerstörend bis auf W_1. Diese Wellengruppe hat aber eine erhebliche Ausdehnung, weil sie quasi-monochromatisch ist (Ortsverschmierung); d. h. das Filter wirkt notwendig „ortsverschmierend".—

Mir gefällt das ganze modische „positivistische" Kleben am Beobachtbaren überhaupt nicht. Ich

* Hauptsache: Die ψ-Funktion charakterisiert eine (statistische) System-Gesamtheit, nicht ein Einzelsystem. Dies ist auch das Ergebnis der weiter unten dargelegten Betrachtung. Diese Auffassung macht es auch überflüssig, zwischen „reinen" und „nicht-reinen" Fällen besonders zu unterscheiden.

halte es für trivial, dass man auf atomistischem Gebiete nicht beliebig genau prognostizieren kann und denke, dass Theorie nicht aus Beobachtungsresultaten fabriziert sondern nur erfunden werden kann (wie Sie übrigens auch). –

Ich habe keine Exemplare meiner mit den Herrn Rosen und Podolski zusammen verfassten Arbeit hier, kann Ihnen aber kurz sagen, um was es sich handelt.

~~Wie Sie schon hervorgehoben haben.~~

Man kann sich fragen, ob der statistische Charakter unserer experimentellen Befunde gemäss der heutigen Quantentheorie erst durch die fremden Eingriffe inklusive Messungen veranlasst wird, während die Systeme als solche – durch eine ψ-Funktion beschrieben – sich an sich deterministisch verhalten. Heisenberg liebäugelt mit einer solchen Auffassung, ohne sie konsequent zu vertreten. Man kann auch so fragen: Ist die ψ Funktion, die sich nach der Schrödingergleichung zeitlich deterministisch verändert, nicht als vollständige Beschreibung der physikalischen Realität aufzufassen, wobei lediglich der (ungenügend bekannte) fremde Eingriff durch Beobachtung dafür verantwortlich ist, dass die Prognosen nur statistischen Charakter haben?

Wir kommen zu dem Ergebnis, dass die ψ-Funktion nicht als vollständige Beschreibung des physikalischen Zustandes eines Systems aufgefasst werden kann.

Wir betrachten ein Gesamtsystem, das aus den Teilsystemen A und B besteht, die nur während einer beschränkten Zeit in Wechselwirkung miteinander stehen.

Die ψ-Funktion des Gesamtsystems *vor* der Wechselwirkung (z. B. Zusammenstoss zweier freier Teilchen) sei bekannt. Die Schrödinger-Gleichung liefert dann die ψ Funktion des Gesamtsystems *nach* der Wechselwirkung. (nach der Wechselwirkung)

Es werde nun am Teilsystem A eine (vollständige) Messung ausgeführt, was aber in verschiedener Weise möglich ist, je nach den Variabeln, die man (genau) misst (z. B. Impuls *oder* Koordinate). Die Quanten-Mechanik liefert dann die ψ Funktion für das Teilsystem B, *und zwar verschieden, je nach der Wahl der Messung, die man an A ausgeführt hat.*

Da es aber unvernünftig ist, anzunehmen, dass der physikalische Zustand von B davon abhängig sei, was für eine Messung ich an dem von ihm getrennten System A vornehme, so heisst dies, dass zu demselben physikalischen Zustande von B zwei verschiedene ψ-Funktionen gehören. Da eine *vollständige* Beschreibung eines physikalischen Zustandes notwendig eine *eindeutige* Beschreibung sein muss (abgesehen von Äusserlichkeiten wie Einheiten, Koordinatenwahl etc.), so kann die ψ-Funktion nicht als die *vollständige* Beschreibung des Zustandes aufgefasst werden.

Natürlich wird ein orthodoxer Quantentheoretiker sagen, es gebe eben keine vollständige Beschreibung bzw. nur die statistische Beschreibung einer System*gesamtheit* und nicht *eines* Systems. Aber erstens soll er dies *sagen* (und zweitens glaube ich nicht, dass wir uns für die Dauer mit einer so fadenscheinigen Naturbeschreibung werden begnügen müssen).

Zu beachten ist, dass die (exakten) Prognosen, zu welchen ich (je nach freier Wahl der Messungsart an A) für das System B gelangen kann, sich zu einander sehr wohl wie Impulsmessung und Ortsmessung verhalten können. Man kann also nicht wohl um die Auffassung herumkommen, dass das System B thatsächlich einen bestimmten Impuls und eine bestimmte Koordinate hat. Denn was ich nach freier Wahl prophezeihen kann, das muss auch in der Wirklichkeit existieren. —

Meiner Meinung nach ist die gegenwärtige prinzipiell statistische Beschreibung nur ein Durchgangsstadium. — Ich möchte nochmals sagen, dass ich Ihre Behauptung, dass aus einer deterministischen Theorie keine statistischen Sätze gefolgert werden können, nicht für richtig halte. Denken Sie nur an die klassische statistische Mechanik (Gastheorie, Theorie der Brown'schen Bewegung). Beispiel: ein materieller Punkt läuft gleichförmig auf einem geschlossenen Kreisbahn; ich kann die Wahrscheinlichkeit rechnerisch bestimmen, ihn zu einer bestimmten Zeit ~~auf~~ einem bestimmten Teil der Peripherie anzutreffen. Wesentlich ist nur, dass ich den Anfangszustand nicht oder nicht genau kenne!

Freundlich grüsst Sie Ihr

A. Einstein

Indici analitico e dei nomi

a cura di J. Agassi

Nell'indice analitico i numeri di pagina in corsivo indicano che il riferimento è di speciale importanza. Un numero di pagina seguito da *d* indica una pagina in cui il termine viene discusso; n sta per «nota».

Indice analitico

Indice dei nomi

Finito di stampare il 2 febbraio 1974
per conto della Giulio Einaudi editore s. p. a.
presso le Industrie Grafiche G. Zeppegno & C. s. a. s., Torino
Ristampa identica alla precedente del 18 aprile 1970

C. L. 2911-6